

# DA SÉRIE DE FOURIER À TRANSFORMADA DE FOURIER

## TRANSFORMADA DE FOURIER VIA SÉRIE DE FOURIER

Seja  $\hat{g}(t)$  uma função periódica genérica, de período  $\hat{T}$ , ilustrada na figura abaixo.

Como  $\hat{g}(t)$  é periódica,

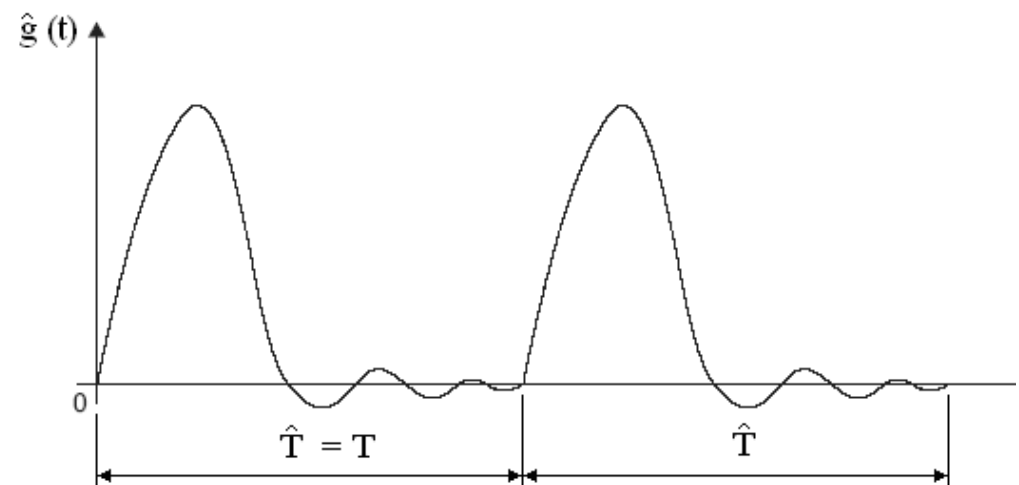
$$\hat{g}(t + n\hat{T}) = \hat{g}(t), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

sendo que a frequência fundamental é

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\hat{T}}.$$

Em **série de Fourier**, tem-se que

$$\hat{g}(t) = \frac{\hat{A}_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ \hat{A}_j \cos(\omega_j t) + \hat{B}_j \text{sen}(\omega_j t) \right] = \hat{G}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \hat{G}_j \text{sen}(\omega_j t + \hat{\phi}_j), \quad \omega_j = j\omega_1.$$



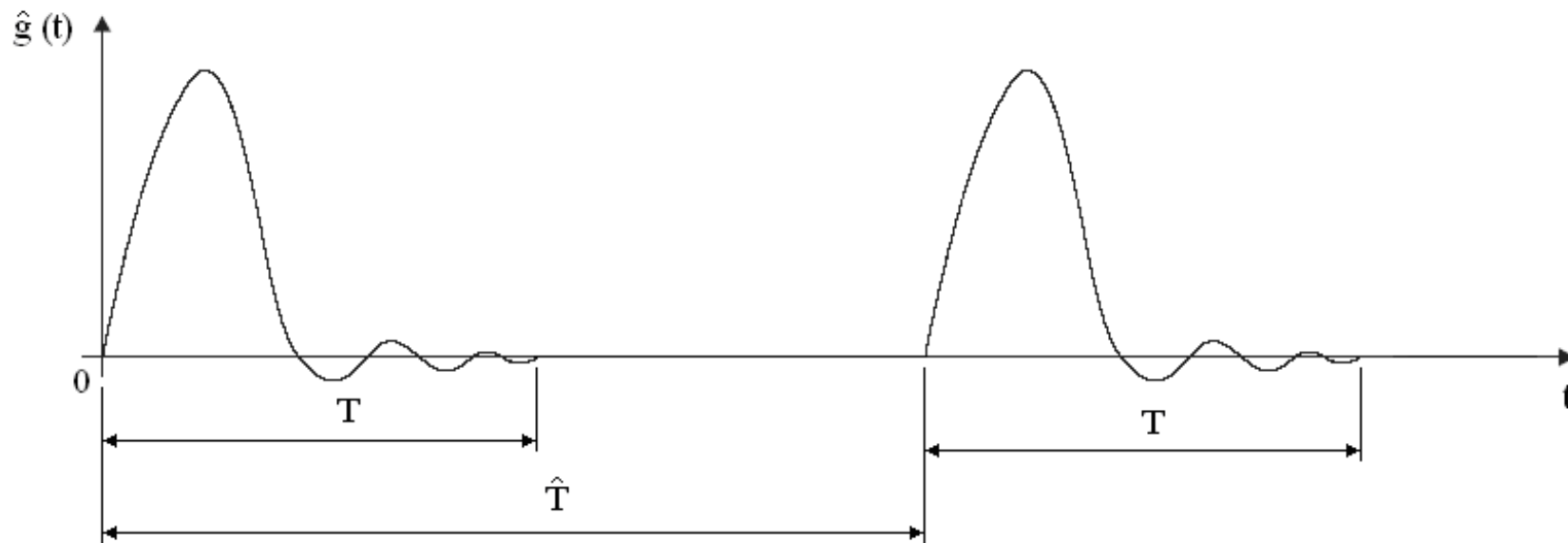
*Função periódica  $\hat{g}(t)$*

## TRANSFORMADA DE FOURIER VIA SÉRIE DE FOURIER (cont.)

Tem-se ainda, na **forma complexa da série de Fourier**, que

$$\hat{g}(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{G}_j e^{i(\omega_j t)}, \quad \text{com} \quad \hat{G}_j = \frac{1}{\hat{T}} \int_{-\hat{T}/2}^{\hat{T}/2} \hat{g}(t) e^{-i(\omega_j t)} dt \quad \text{e} \quad \omega_j = j\omega_1 = \frac{j2\pi}{\hat{T}}.$$

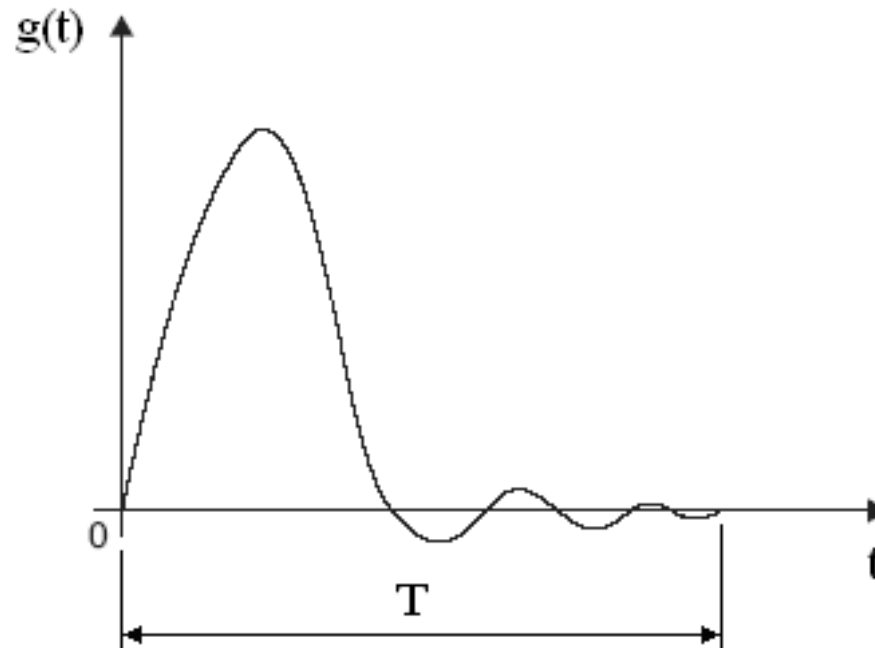
Suponha-se agora que o período  $\hat{T}$  cresça continuamente, como esboçado abaixo.



*Função periódica  $\hat{g}(t)$  com período  $\hat{T}$  crescente*

## TRANSFORMADA DE FOURIER VIA SÉRIE DE FOURIER (cont.)

No limite, quando  $\hat{T} \rightarrow \infty$ , obtém-se a função não periódica  $g(t)$  ilustrada abaixo.



*Função não periódica (transitória)  $g(t)$*

Ou seja, a função  $g(t)$ , com duração de  $T$  segundos, é tal que (em abstração!)

$$g(t) = \lim_{\hat{T} \rightarrow \infty} [\hat{g}(t)] .$$

## TRANSFORMADA DE FOURIER VIA SÉRIE DE FOURIER (cont.)

Recordando a forma complexa da série de Fourier da função original  $\hat{g}(t)$ , decorre, então, que

$$g(t) = \lim_{\hat{T} \rightarrow \infty} [\hat{g}(t)] = \lim_{\hat{T} \rightarrow \infty} \left[ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{G}_j e^{i(\omega_j t)} \right].$$

Substituindo a expressão dos coeficientes  $\hat{G}_j$  na expressão acima, obtém-se

$$g(t) = \lim_{\hat{T} \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\hat{T}} \int_{-\hat{T}/2}^{\hat{T}/2} \hat{g}(\tau) e^{-i(\omega_j \tau)} d\tau \right] e^{i(\omega_j t)} \right\}, \quad \text{em que } \omega_j = j\omega_1 = j \frac{2\pi}{\hat{T}}.$$

$$\text{Sabe-se que } \Delta\omega \triangleq \omega_{j+1} - \omega_j = \frac{(j+1)2\pi}{\hat{T}} - \frac{j2\pi}{\hat{T}} = \frac{2\pi}{\hat{T}} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{1}{\hat{T}} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}}.$$

## TRANSFORMADA DE FOURIER VIA SÉRIE DE FOURIER (cont.)

Substituindo o resultado acima na expressão de  $g(t)$ , tem-se que

$$g(t) = \lim_{\hat{T} \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\hat{T}/2}^{\hat{T}/2} \hat{g}(\tau) e^{-i(\omega_j \tau)} d\tau \right] e^{i(\omega_j t)} \right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{\hat{T} \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\hat{T}/2}^{\hat{T}/2} \hat{g}(\tau) e^{-i(\omega_j \tau)} d\tau \right] e^{i(\omega_j t)} \Delta\omega \right\}$$

$$\frac{1}{\hat{T}} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

Quando  $\hat{T} \rightarrow \infty$ , pode-se argumentar que:

- $\Delta\omega \rightarrow d\omega$  (diferença para diferencial);
- $\omega_j \rightarrow \omega$  (valores discretos a contínuos).

Assim sendo,  $g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] e^{i\omega t} d\omega$  (somatório  $\rightarrow$  integral em  $\omega$ ).

## TRANSFORMADA DE FOURIER VIA SÉRIE DE FOURIER (cont.)

Definindo

$$\bar{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

→ transformada de Fourier

resulta que

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

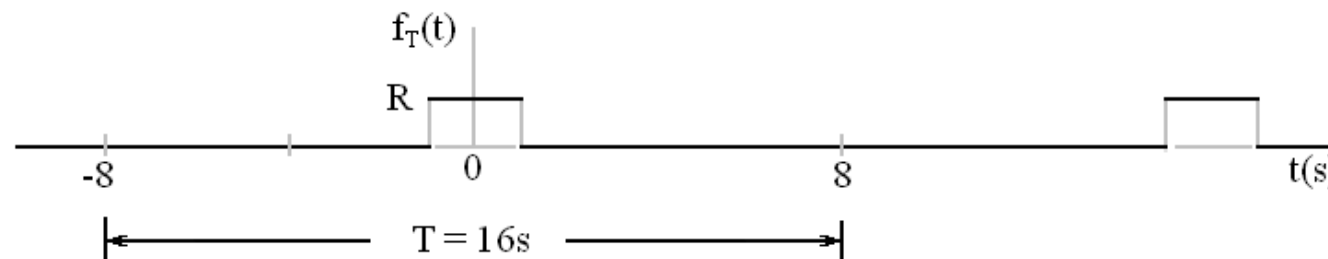
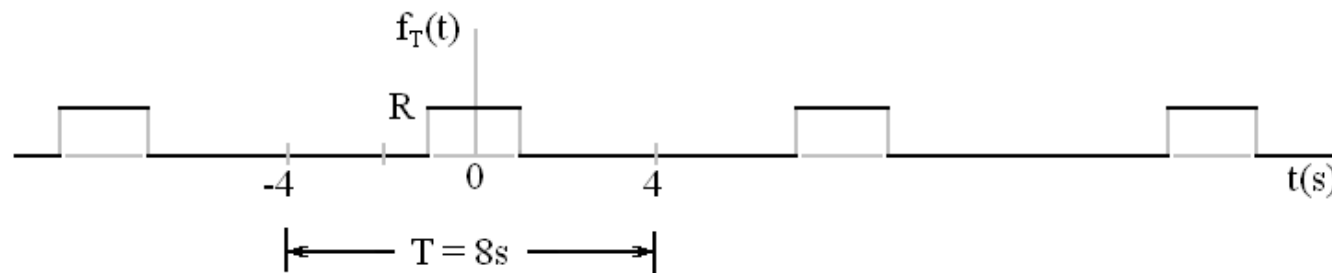
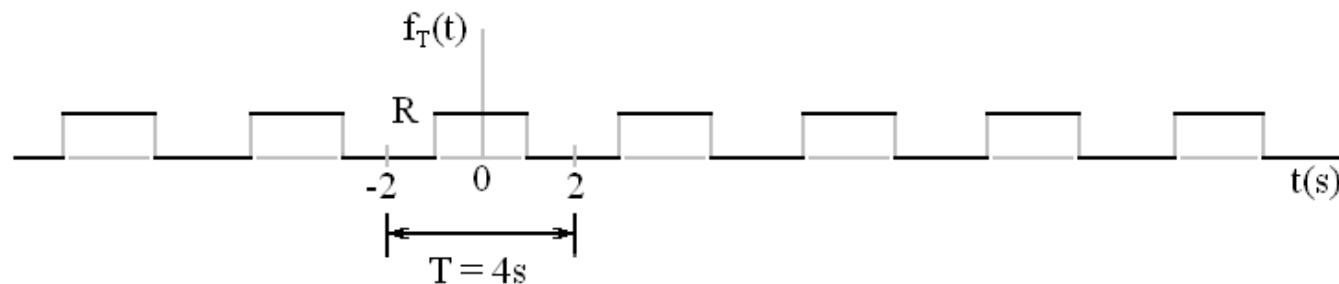
→ transformada inversa de Fourier

Realmente, uma **função não periódica**  $g(t)$  pode, como sugerido pela **abordagem informal** anteriormente exposta, ser representada por um número infinito não numerável (**integral**) de **funções harmônicas**, em **generalização** da descrição por um número infinito numerável (**somatório**) dessas funções.

Diz-se que a **transformada de Fourier conduz** a função  $g(t)$  do **tempo para a frequência**, gerando uma nova função, denotada por  $\bar{G}(\omega)$ . Já a **transformada inversa de Fourier** leva  $\bar{G}(\omega)$  da **frequência para o tempo** para obter  $g(t)$ .

## EXEMPLO – FORÇA RETANGULAR

Seja  $f_T(t)$  uma força periódica retangular, de período  $T > L$ , onde  $L$  é a largura dos trechos não nulos. Nesses trechos, a força em questão vale  $R$ . Essa força é ilustrada abaixo, para os seguintes valores:  $L = 2s$  e  $T = 4s, 8s$  e  $16s$ .



## EXEMPLO – FORÇA RETANGULAR (cont.)

Matematicamente, a força  $f_T(t)$  pode ser representada por

$$f_T(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\frac{T}{2} < t < -\frac{L}{2} \\ R, & \text{se } -\frac{L}{2} < t < \frac{L}{2} \\ 0, & \text{se } \frac{L}{2} < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

sendo que  $f_T(t + T) = f_T(t)$ , posto que essa força é periódica.

Será investigado, a seguir, o que ocorre quando  $T \rightarrow \infty$ .

**Solução:** Os coeficientes de Fourier de  $f_T(t)$  são dados, sucessivamente, por

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-L/2}^{L/2} R dt = \frac{Rt}{T} \Big|_{-L/2}^{L/2} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{A_0}{2} = \frac{RL}{T}}.$$



## EXEMPLO – FORÇA RETANGULAR (cont.)

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \cos(\omega_j t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-L/2}^{L/2} R \cos(j\omega_1 t) dt = \frac{2R}{T} \frac{\text{sen}(j\omega_1 t)}{j\omega_1} \Big|_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{2R}{j\omega_1 T} \left[ \text{sen}\left(\frac{j\omega_1 L}{2}\right) - \text{sen}\left(-\frac{j\omega_1 L}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Acima, como  $\omega_j = j\omega_1$ ,  $\omega_1 = 2\pi/T$  e  $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$ , decorre que

$$A_j = \frac{4R}{j\omega_1 T} \text{sen}\left(\frac{j\omega_1 L}{2}\right) = \frac{2R}{j\pi} \text{sen}\left(\frac{j\pi L}{T}\right) \quad \therefore \quad A_j = \frac{2RL}{T} \frac{\text{sen}\left(\frac{j\pi L}{T}\right)}{\frac{j\pi L}{T}} .$$

## EXEMPLO – FORÇA RETANGULAR (cont.)

$$\begin{aligned} B_j &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) \text{sen}(\omega_j t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_{-L/2}^{L/2} R \text{sen}(j\omega_1 t) dt = -\frac{2R}{T} \frac{\cos(j\omega_1 t)}{j\omega_1} \Big|_{-L/2}^{L/2} \\ &= -\frac{2R}{j\omega_1 T} \left[ \cos\left(\frac{j\omega_1 L}{2}\right) - \cos\left(-\frac{j\omega_1 L}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Acima, como  $\cos(-x) = \cos(x)$ , resulta que  $B_j = 0$ .

A montagem da série de Fourier se dá a partir da expressão geral, qual seja,

$$f_T(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left[ A_j \cos(\omega_j t) + B_j \text{sen}(\omega_j t) \right].$$

## EXEMPLO – FORÇA RETANGULAR (cont.)

Substituindo os resultados encontrados, obtém-se, então, a **série de Fourier**

$$f_T(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} A_j \cos(\omega_j t) = \frac{RL}{T} + \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{2RL}{T} \left[ \frac{\text{sen}\left(\frac{j\pi L}{T}\right)}{\left(\frac{j\pi L}{T}\right)} \right] \right\} \cos\left(\frac{j2\pi}{T}t\right) .$$

Caso se faça  $L = 2s$  e  $T = 4s$  na expressão acima, decorre que

$$f_T(t) = R \left\{ \frac{1}{2} + 2 \left[ \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) - \frac{1}{3\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \frac{1}{5\pi} \cos\left(\frac{5\pi}{2}t\right) - \dots \right] \right\}$$

Para a **geração dos espectros unilaterais de amplitude e fase**, usa-se a expressão

$$f_T(t) = F_0 + \sum_{j=1}^{\infty} F_j \text{sen}(\omega_j t + \phi_j) \quad (\text{conveniência!}) .$$

## EXEMPLO – FORÇA RETANGULAR (cont.)

Face aos resultados obtidos antes, tem-se que as **amplitudes** são dadas por

$$F_0 = \frac{A_0}{2} \quad \text{e} \quad F_j = \sqrt{A_j^2 + B_j^2} = |A_j| ,$$

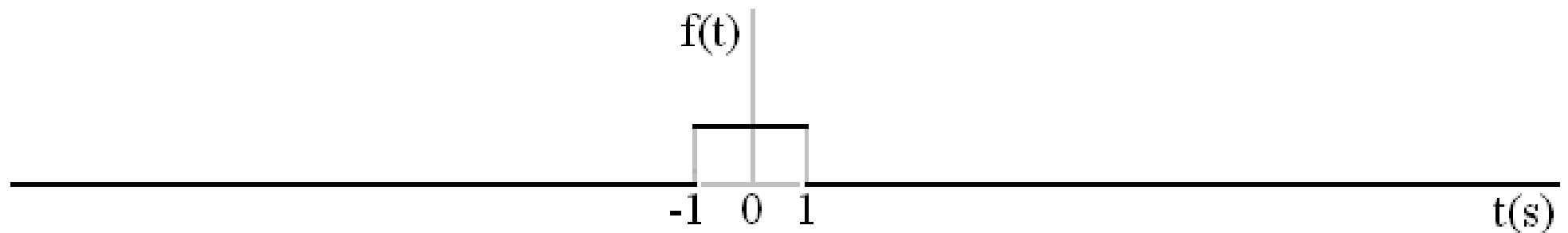
ao passo que as **fases** são dadas por

$$\phi_{fj} = \arctg(A_j/B_j) = \begin{cases} 0 & (A_j = 0) \\ \frac{\pi}{2} & (A_j > 0) \\ -\frac{\pi}{2} & (A_j < 0) \end{cases} .$$

Com base nessas expressões, são gerados os espectros unilaterais associados.

## EXEMPLO – FORÇA RETANGULAR (cont.)

À medida que  $T \rightarrow \infty$ , a força  $f_T(t)$  tende para outra força, denotada por  $f(t)$ . Essa outra força é ilustrada abaixo para  $L = 2s$ .



Matematicamente, pode-se escrever que

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = \begin{cases} R, & \text{se } -\frac{L}{2} < t < \frac{L}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Observa-se que, quando  $T \rightarrow \infty$ , os **espectros unilaterais de amplitude** tornam-se mais “densos” e **passam de discretos a contínuos**.