TRANSFORMADA DE FOURIER

REPRESENTAÇÃO VIA TRANSFORMADA DE FOURIER

Uma função genérica g(t) pode ser representada da seguinte forma:

$$\boxed{g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(\omega)e^{i\omega t}d\omega} \quad (1)\,, \qquad \text{onde} \qquad \boxed{\bar{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau} \quad (2)$$

Transformada inversa de Fourier **Transformada de Fourier**

A **transformada de Fourier conduz** a função **g(t) do domínio do tempo para o domínio da frequência**, **gerando** uma nova função, referenciada por $\mathbf{\bar{G}(\omega)}$.

A **operação inversa**, que **conduz** $\mathbf{\bar{G}(\omega)}$ **da frequência para o tempo**, **para** se **obter** (representar) **g(t)**, é denominada **transformada inversa de Fourier**.

→ Transformada e transformada inversa formam o **par de Fourier**.

CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA E APLICAÇÕES DE INTERESSE

O **par de Fourier** é dado por

$$\boxed{g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(\omega)e^{i\omega t}d\omega} \quad (1) \qquad \text{e} \qquad \boxed{\bar{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau} \quad (2)$$

→ A dimensão de $\bar{G}(\omega)$ é a dimensão de $g(t)$ x tempo.

Condições suficientes: $g(t)$ contínua por partes em todo intervalo finito, com derivada à direita e à esquerda em todos os pontos e absolutamente integrável em t (Kreyszig, 2006).

→ $g(t)$ absolutamente integrável: $\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 |g(t)|dt + \lim_{b\to\infty}\int_0^b |g(t)|dt$ existe.

Aplicações de interesse: análise espectral de excitações, vibrações e ruídos em sistemas mecânicos.

REPRESENTAÇÃO POLAR DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Seja uma função g(t) tal que

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (1) \qquad \text{onde} \qquad \overline{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \quad (2)$$

Em geral, a **função** $\overline{G}(\omega)$ é **complexa**, de modo que $\overline{G}(\omega) = G_R(\omega) + i\,G_I(\omega)$, ou

→ **forma polar**: $\boxed{\overline{G}(\omega) = \left|\overline{G}(\omega)\right| e^{i\psi(\omega)} = G(\omega)e^{i\psi(\omega)}}$ (3) $\left[\; G(\omega) = \left|\overline{G}(\omega)\right| \;\right]$

Em (3), evidenciam-se em $\overline{G}(\omega)$ módulo (→ **amplitude**) e argumento (→ **fase**).

Da Eq. (2), tem-se que $\overline{G}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i(-\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{i\omega t}dt = \overline{G}^{*}(\omega)$ (4)

Decorre, então, das Eqs. (3) e (4) que $\boxed{\overline{G}(-\omega) = G(\omega)e^{-i\psi(\omega)}}$ (5)

INTERPRETAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER

Seja agora a soma s(t) de dois componentes de largura infinitesimal da integral da Eq. (1), numa frequência arbitrária $\hat{\omega}$. Ou seja, de g(t) extraia-se s(t), de modo que

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{G}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{1}{2\pi}\left[\bar{G}(-\hat{\omega})e^{i(-\hat{\omega})t}\,d\omega + \bar{G}(\hat{\omega})e^{i\hat{\omega}t}\,d\omega\right] \quad (6)$$

Substituindo as formas polares das Eqs. (3) e (5) na Eq. (6), tem-se que

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\left[G(\hat{\omega})e^{-i\psi(\hat{\omega})}e^{-i\hat{\omega}t}\,d\omega + G(\hat{\omega})e^{i\psi(\hat{\omega})}e^{i\hat{\omega}t}\,d\omega\right] \quad (7)$$

Manipulando a expressão acima, obtém-se

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}[G(\hat{\omega})d\omega]\left\{e^{-i[\hat{\omega}t+\psi(\hat{\omega})]} + e^{i[\hat{\omega}t+\psi(\hat{\omega})]}\right\} \quad (8)$$

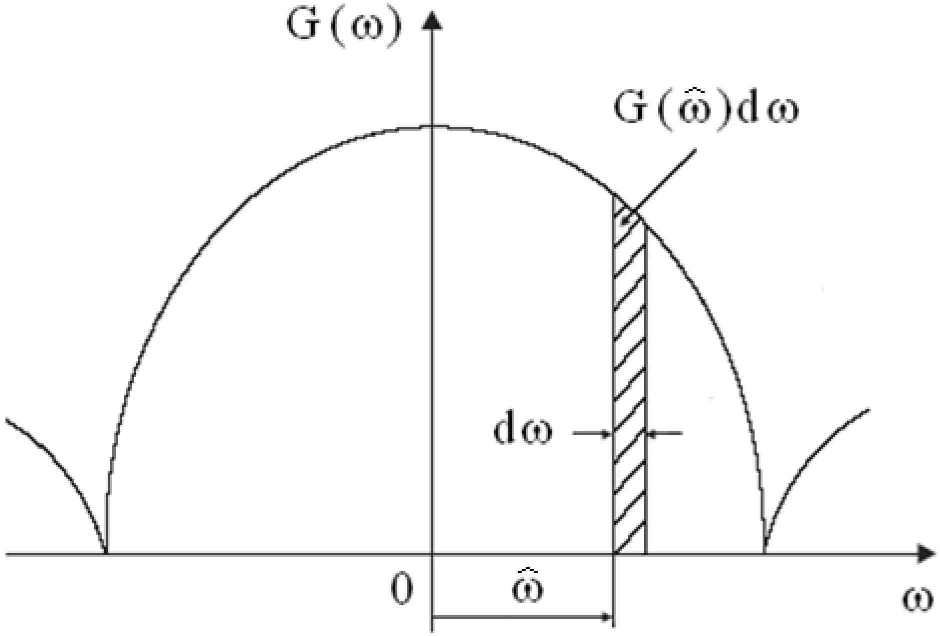
INTERPRETAÇÃO DA TRANSFORMADA DE FOURIER (cont.)

Como $$\frac{1}{2}\left\{e^{-i\left[\hat{\omega}t+\psi(\hat{\omega})\right]}+e^{i\left[\hat{\omega}t+\psi(\hat{\omega})\right]}\right\}=\cos\left[\hat{\omega}t+\psi(\hat{\omega})\right] \quad (9)$$

resulta, de (9) em (8), que

$$s(t)=\frac{1}{\pi}\left[G(\hat{\omega})d\omega\right]\cos\left[\hat{\omega}t+\psi(\hat{\omega})\right] \qquad (10)$$

Ou seja, a **soma** s(t) corresponde a uma **função harmônica** de frequência $\hat{\omega}$ (arbitrária!), cuja **amplitude** pode ser observada no **espectro de amplitude** $G(\omega)$, tal como ilustrado na figura ao lado.



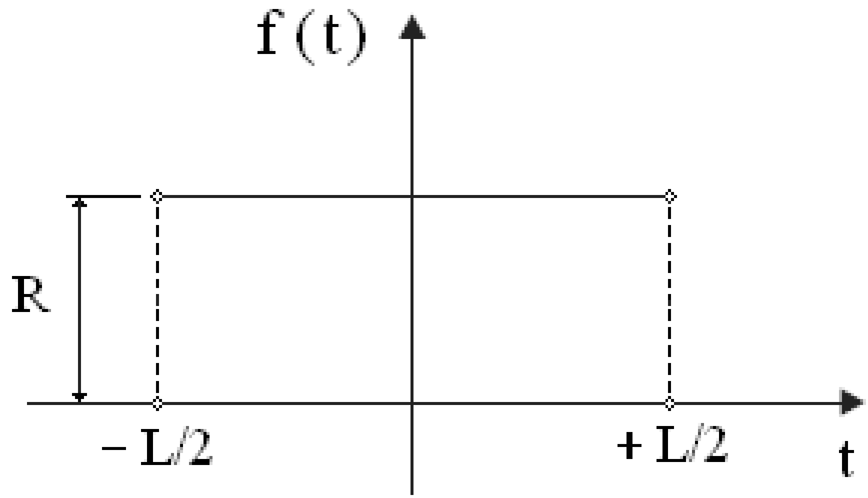
Espectro genérico de amplitudes G(ω)

Já a **fase** de interesse pode ser encontrada no **espectro de fase** $\psi(\omega)$ associado.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÃO RETANGULAR

Determinar a transformada de Fourier da função f(t) ilustrada na figura abaixo, que pode ser descrita por

$$f(t) = \begin{cases} R, & |t| < L/2 \\ 0, & |t| > L/2 \end{cases} \qquad (11)$$



A transformada de Fourier de f(t), por definição (vide expressão (2)), é dada por

$$\overline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-L/2}^{L/2} Re^{-i\omega t}dt = R\int_{-L/2}^{L/2} \cos(\omega t)dt - iR\int_{-L/2}^{L/2} \mathrm{sen}(\omega t)dt$$

A segunda integral acima é zero, posto que a função seno é ímpar.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÃO RETANGULAR (cont.)

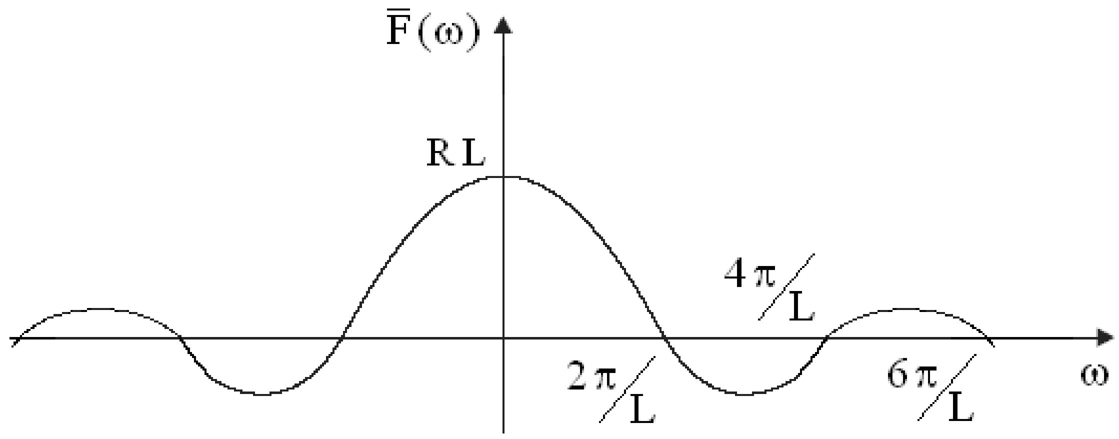
Assim sendo, deve-se resolver apenas a primeira integral. Tem-se, então, que

$$\overline{F}(\omega) = \frac{R\,\mathrm{sen}(\omega t)}{\omega}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{R}{\omega}\left[\mathrm{sen}(\omega L/2) - \mathrm{sen}(-\omega L/2)\right] = \frac{2R}{\omega}\mathrm{sen}(\omega L/2).\frac{(L/2)}{(L/2)}$$

donde decorre que

$$\boxed{\overline{F}(\omega) = RL\frac{\mathrm{sen}(\omega L/2)}{(\omega L/2)}} \quad (12)$$

Essa transformada, em particular uma função real, é ilustrada ao lado. Observa-se que seu **valor máximo**, dado por **RL**, é igual à **área sob a função f(t)**.

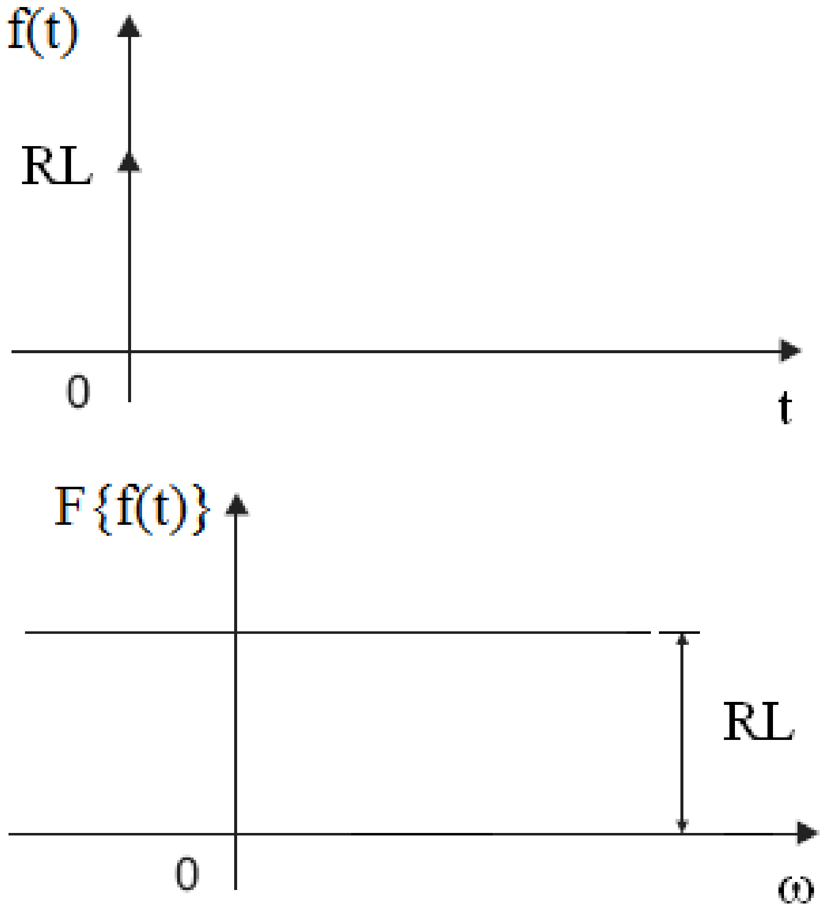


TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

Suponha-se, agora, que o produto RL se mantenha constante, enquanto $L \to 0$. Para tanto, $R \to \infty$.

Nesse caso limite, f(t) deve ser representada por uma função "especial", de intensidade igual a RL. Assim, f(t) passa a ser denotada por $RL\delta(t)$, onde $\delta(t)$ é a **função impulso unitário**, ou **função delta de Dirac**.

Por sua vez, $\overline{F}(\omega)$ corresponde a uma reta paralela ao eixo das abscissas, de altura RL, que é o valor da intensidade do impulso.



Representação da função $f(t) = RL\delta(t)$ e sua transformada de Fourier $\overline{F}(\omega)$

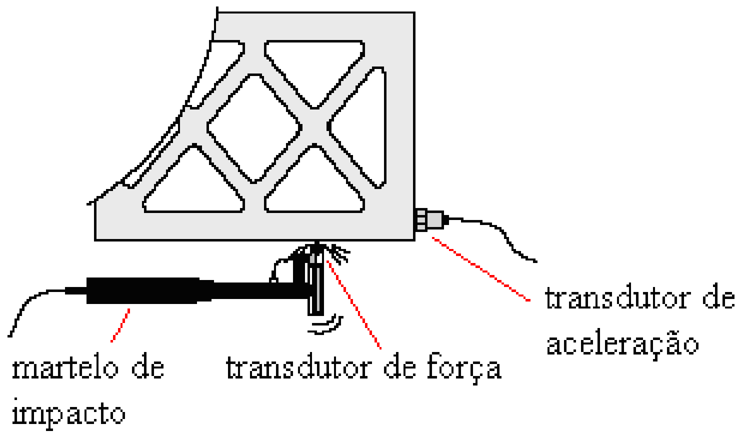
TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÃO DELTA DE DIRAC (cont.)

Assim, a **transformada de Fourier** de uma **função delta de Dirac**, cuja intensidade é igual a 1, é constante e também igual a 1, ou seja,

$$\boxed{\mathcal{F}\left\{\delta(t)\right\} = 1, \quad -\infty < \omega < +\infty} \qquad (13)$$

Essa transformada é dita **ruído branco**, dada a associação com a luz branca.

Nota-se que a função delta de Dirac $\delta(t)$ é composta por harmônicos de todas as frequências, de $-\infty$ a $+\infty$, todos de mesma amplitude. Isso pode ser explorado em ensaios de vibrações, como indicado ao lado.



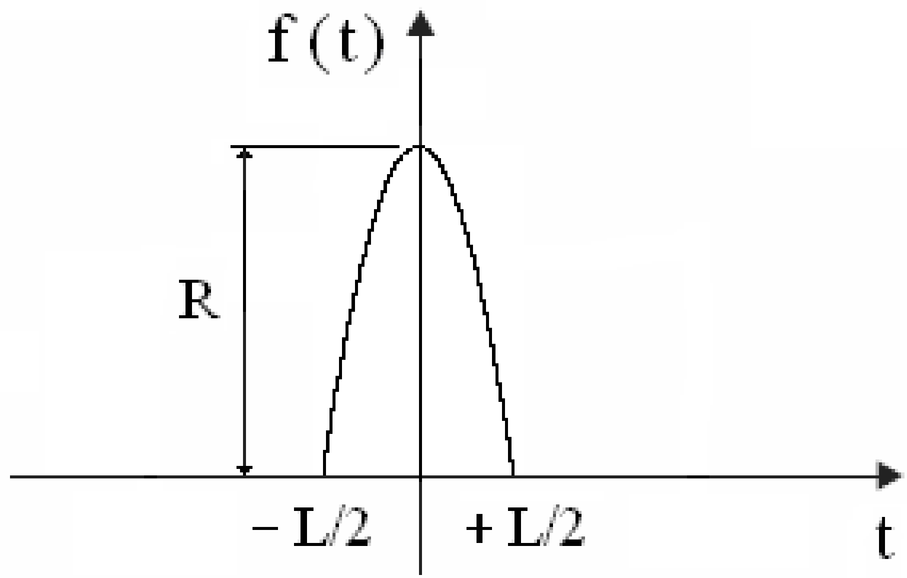
(Copyright © Brüel & Kjær)

A função delta de Dirac voltará a ser abordada mais adiante, face à sua importância.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÃO MEIO COSSENO

Determinar a transformada de Fourier da função f(t) ilustrada abaixo, dada por

$$f(t) = \begin{cases} R\cos(\pi t/L), & |t| < L/2 \\ 0, & |t| > L/2 \end{cases} \qquad (14)$$



A transformada de Fourier de f(t) é

$$\bar{F}(\omega) = \int_{-L/2}^{L/2} R\cos(\pi t / L) e^{-i\omega t} dt$$

$$= R\int_{-L/2}^{L/2} \cos(\pi t / L)\cos(\omega t)dt - iR\int_{-L/2}^{L/2} \cos(\pi t / L)\mathrm{sen}(\omega t)dt$$

A segunda integral acima é zero, pois o integrando é função ímpar.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÃO MEIO COSSENO (cont.)

Recorda-se também que, para $\alpha = \pi/L$, tem-se que

$$\cos\left(\pi t / L\right)\cos(\omega t) = \cos(\alpha t)\cos(\omega t) = \left\{\cos\left[(\alpha+\omega)t\right] + \cos\left[(\alpha-\omega)t\right]\right\}\Big/2 .$$

Assim sendo, a transformada $\overline{F}(\omega)$ é tal que

$$\overline{F}(\omega) = \frac{R}{2}\int_{-L/2}^{L/2}\left\{\cos\left[(\alpha+\omega)t\right] + \cos\left[(\alpha-\omega)t\right]\right\}dt$$

$$= \frac{R}{2}\left\{\left.\frac{\operatorname{sen}\left[(\alpha+\omega)t\right]}{(\alpha+\omega)}\right|_{-L/2}^{L/2} + \left.\frac{\operatorname{sen}\left[(\alpha-\omega)t\right]}{(\alpha-\omega)}\right|_{-L/2}^{L/2}\right\}$$

$$= \frac{R}{2}\left\{\left\{2\frac{\operatorname{sen}\left[(\alpha+\omega)L/2\right]}{(\alpha+\omega)}\right\} + \left\{2\frac{\operatorname{sen}\left[(\alpha-\omega)L/2\right]}{(\alpha-\omega)}\right\}\right\}$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÃO MEIO COSSENO (cont.)

Manipulando o resultado acima, tem-se que $\overline{F}(\omega)$, também uma função real, é

$$\boxed{\overline{F}(\omega) = \frac{RL}{2}\left\{\left\{\frac{\mathrm{sen}\left[(\alpha+\omega)L/2\right]}{(\alpha+\omega)L/2}\right\} + \left\{\frac{\mathrm{sen}\left[(\alpha-\omega)L/2\right]}{(\alpha-\omega)L/2}\right\}\right\}} \quad (15)$$

$\rightarrow$ Quando RL = cte. e L $\rightarrow$ 0, $\overline{F}(\omega) \rightarrow 2RL/\pi$ $(-\infty < \omega < +\infty)$, pois $\alpha = \pi/L$.

Esse valor também corresponde, como antes, à área sob a curva da função f(t).

De modo geral, pode-se concluir, então, que *(ver simulação em Matlab)*

$\rightarrow$ **quanto mais curta no tempo for uma certa função,**

mais rica ela será em conteúdo harmônico.

São várias as implicações dessa constatação na identificação de sistemas, como será visto oportunamente.

DEFINIÇÕES ALTERNATIVAS DO PAR DE FOURIER

$\rightarrow$ $g(t) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (1)$	$\overline{G}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (2)$
$\rightarrow$ $\boxed{g(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(f)e^{i2\pi ft}df} \quad (16)$	$\boxed{\overline{G}(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i2\pi f\tau}d\tau} \quad (17)$
$g(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (18)$	$\overline{G}(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (19)$
$g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{G}(\omega)e^{i\omega t}d\omega \quad (20)$	$\overline{G}(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \quad (21)$

obs.: Como $\omega = 2\pi f$, $d\omega = 2\pi df$.

FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

A **função delta de Dirac** é uma ferramenta importante na matemática aplicada, posto que ela simplifica a obtenção de vários resultados que, de outra forma, envolveriam desenvolvimentos complicados.

Ela não é uma função ordinária, mas sim uma **distribuição**, ou uma **função generalizada**. Uma distribuição é um processo através do qual se atribui um determinado número a uma função arbitrária g(t), com certas características. Esse número depende da função g(t), sendo determinado através de uma integral.

Para a função generalizada delta de Dirac $\delta(t)$, é válida a seguinte **definição**:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \left[\delta(\sigma)g(\sigma)\right]d\sigma = g(0)} \qquad (22) \qquad (\rightarrow \text{efeito de } \delta(t) \text{ em } g(t); \text{ se } g(t) = 1, \ldots)$$

onde σ é a variável de interesse (via de regra, tempo, mas também frequência).

DEGRAU UNITÁRIO E DELTA DE DIRAC – DESCRIÇÃO OPERACIONAL

Seja a função ordinária $f_k(\sigma)$, da variável independente σ, tal que

$$f_k(\sigma)=\begin{cases}0, \text{ se } \sigma<-(k/2)\\(\sigma/k)+(1/2), \text{ se } -(k/2)<\sigma<(k/2)\\1, \text{ se } \sigma>(k/2)\end{cases}$$

A derivada de $f_k(\sigma)$ em relação a σ, denotada por $g_k(\sigma)$, é

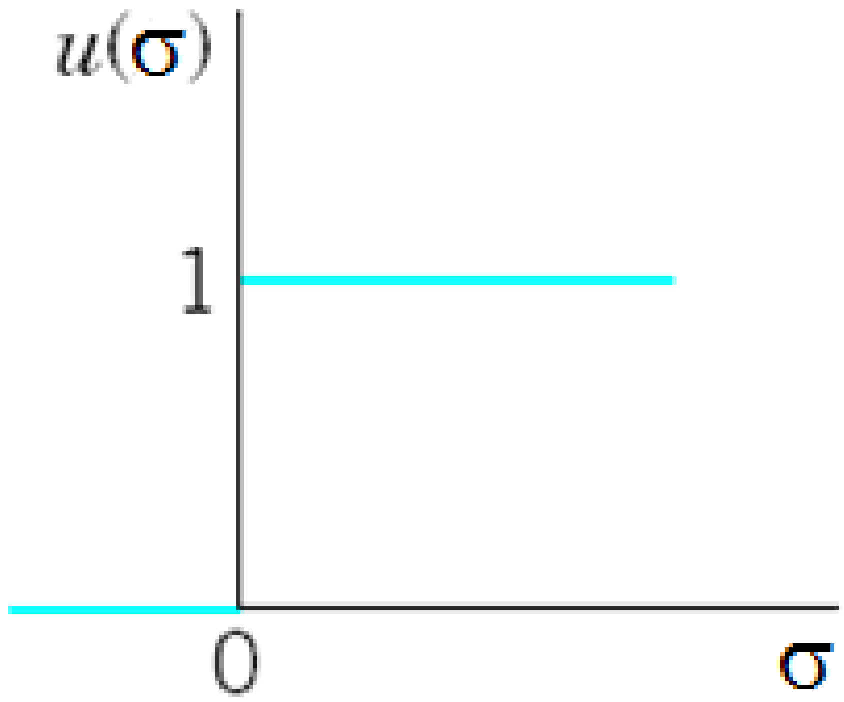
$$g_k(\sigma)=\begin{cases}1/k, \text{ se } -(k/2)<\sigma<(k/2)\\0, \text{ caso contrário}\end{cases}$$

As **funções degrau unitário** $u(\sigma)$ **e delta de Dirac** $\delta(\sigma)$ podem ser descritas, por conveniência, da seguinte forma *(ver simulação em Matlab)*:

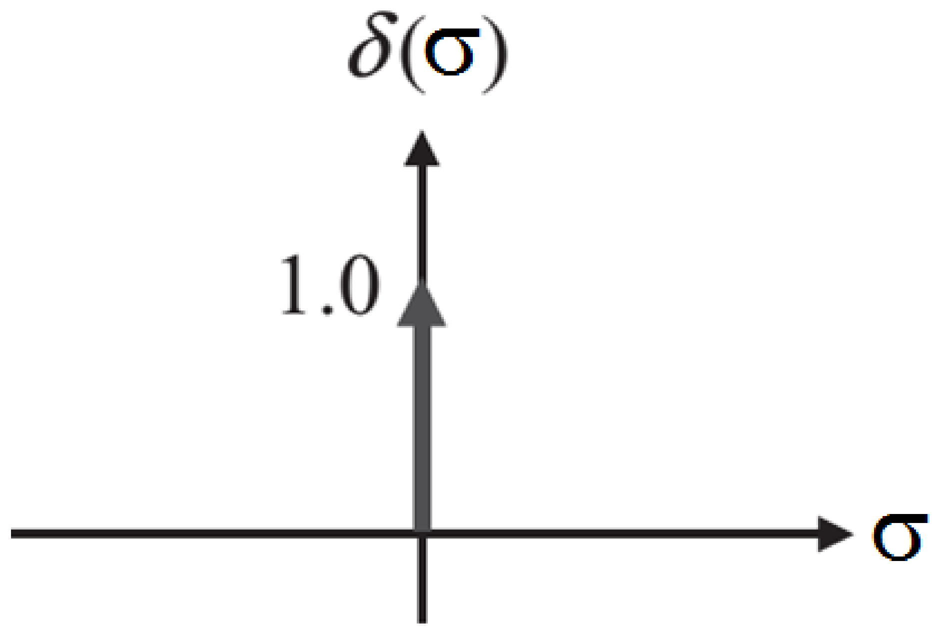
$$u(\sigma)=\lim_{k\to 0}\left[f_k(\sigma)\right] \quad \text{e} \quad \delta(\sigma)=\lim_{k\to 0}\left[g_k(\sigma)\right].$$

DEGRAU UNITÁRIO E DELTA DE DIRAC – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Abaixo, são ilustradas graficamente as funções degrau unitário e delta de Dirac. Nota-se que a função delta de Dirac é representada, com sua intensidade, por meio de uma seta, no valor associado da variável independente.



função degrau unitário (Kreyszig, 2006)



função delta de Dirac (Shin & Hammond, 2009)

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DELTA DE DIRAC (Shin & Hammond)

	deslocamento	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\sigma-\sigma_0)g(\sigma)d\sigma = g(\sigma_0)$	(b)
$\rightarrow$	**descrição alternativa**	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i2\pi\sigma t}dt = \delta(\sigma)$ ou $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\sigma t}dt = 2\pi\delta(\sigma)$	(c)
	função derivada	$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(\sigma-\sigma_0)g(\sigma)d\sigma = (-1)^n g^{(n)}(\sigma_0)$, (n): $\frac{d^n}{d\sigma^n}$	(e)
	compressão/expansão	$\delta(c\,\sigma) = \frac{1}{\lvert c\rvert}\delta(\sigma)$, c: constante arbitrária	(d)
	paridade	$\delta(\sigma) = \delta(-\sigma)$	(a)

$\rightarrow$ Tem-se ainda que $\boxed{\frac{du(\sigma)}{d\sigma} = \delta(\sigma)}$ (23) *(ver simulação anterior)* .

DELTA DE DIRAC – DESCRIÇÃO ALTERNATIVA (Shin & Hammond)

Expôs-se acima que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i2\pi\sigma t}dt = \delta(\sigma) \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\sigma t}dt = 2\pi\delta(\sigma) \ .$$

Essa propriedade pode ser justificada da seguinte forma. Tem-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i2\pi\sigma t}dt = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \left[\cos(2\pi\sigma t) \pm i\,\mathrm{sen}(2\pi\sigma t)\right]dt = \lim_{M\to\infty}\left[2\int_{0}^{M}\cos(2\pi\sigma t)dt\right],$$

pois cosseno é par e seno é ímpar. Ocorre que *(ver também simulação em Matlab)*

$$\lim_{M\to\infty}\left[2\int_{0}^{M}\cos(2\pi\sigma t)dt\right] = \lim_{M\to\infty}\left[2\left.\frac{\mathrm{sen}(2\pi\sigma t)}{2\pi\sigma}\right|_{0}^{M}\right] = \lim_{M\to\infty}\left[2M\frac{\mathrm{sen}(2\pi M\sigma)}{2\pi M\sigma}\right] = \delta(\sigma) \ .$$

Verifica-se que a integral da função entre colchetes acima é 1 (*Shin&Hammond*).

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÕES PERMANENTES

Certas funções importantes, de caráter permanente, como uma função constante ou uma função harmônica, não têm transformada de Fourier via funções comuns.

Porém, através da função delta de Dirac, definida no domínio da frequência, pode-se obter a **transformada de Fourier de funções permanentes**, periódicas ou não.

Seja, por exemplo, a função harmônica g(t), tal que

$$\boxed{g(t) = A\cos(\omega_0 t)} \quad (24)$$

A transformada de Fourier $\overline{G}(\omega)$, por definição, é dada por

$$\overline{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} A\cos(\omega_0\, t)e^{-i\omega t}dt = \frac{A}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right)e^{-i\omega t}dt$$

Ou seja, $\overline{G}(\omega) = \dfrac{A}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left[e^{-i(\omega-\omega_0)t} + e^{-i(\omega+\omega_0)t}\right]dt \quad (25)$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÕES PERMANENTES (cont.)

Ocorre que, da propriedade (c) da função delta de Dirac, tem-se que

$$2\pi\delta(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\sigma t} dt \quad (26)$$

Empregando (26) em (25), com $\sigma = \omega - \omega_0$ e $\sigma = \omega + \omega_0$, decorre que

$$\boxed{\bar{G}(\omega) = A\pi\left[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right]} \quad (27)$$

Similarmente, para

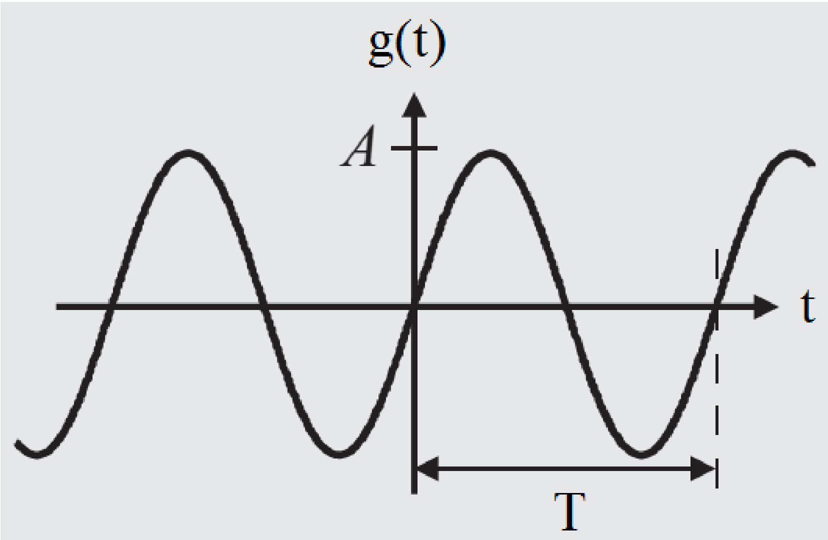
$$\boxed{g(t) = A\mathrm{sen}(\omega_0 t)} \quad (28)$$

tem-se que

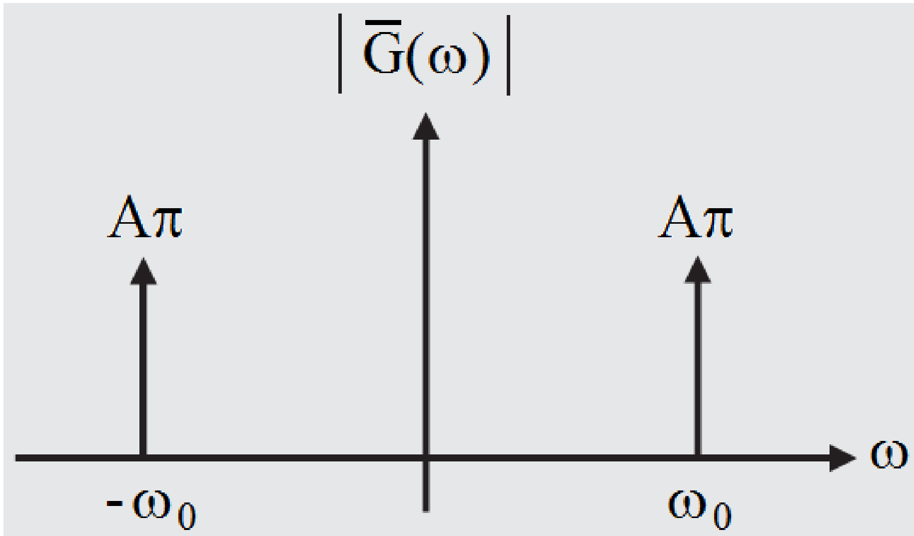
$$\boxed{\bar{G}(\omega) = -iA\pi\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right]} \quad (29)$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÕES PERMANENTES (cont.)

A função temporal $g(t) = A\text{sen}(\omega_0 t)$ e o espectro de amplitude correspondente são representados nas figuras abaixo, onde $\omega_0 = 2\pi/T$.



função seno



espectro de amplitude da função seno

Nota-se acima, no <u>espectro de amplitude</u>, que as intensidades das funções delta de Dirac são dadas em módulo, nos valores associados da variável independente. Pode-se mostrar que, no <u>espectro de fase</u>, tem-se $-\pi/2$, em ω_0, e $+\pi/2$, em $-\omega_0$.

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÕES DERIVADAS

Seja g(t) uma função contínua de t, tal que $g(t) \to 0$ quando $|t| \to \infty$. Então,

$$\boxed{\mathcal{F}\{\dot{g}(t)\} = i\omega\mathcal{F}\{g(t)\} = i\omega\overline{G}(\omega)} \quad (30)$$

$$\boxed{\mathcal{F}\{\ddot{g}(t)\} = -\omega^2\mathcal{F}\{g(t)\} = -\omega^2\overline{G}(\omega)} \quad (31)$$

Prova-se o exposto acima como se segue. A transformada de Fourier de $\dot{g}(t)$ é

$$\mathcal{F}\{\dot{g}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{g}(t)e^{-i\omega t}dt \qquad \text{(por definição)} .$$

Integrando por partes, obtém-se

$$\mathcal{F}\{\dot{g}(t)\} = g(t)e^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega)\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt \ .$$

TRANSFORMADA DE FOURIER DE FUNÇÕES DERIVADAS (cont.)

Como $g(t) \to 0$ quando $|t| \to \infty$, decorre a expressão (30), posto que

$$\mathscr{F}\{\dot{g}(t)\} = (i\omega)\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt = i\omega\mathscr{F}\{g(t)\}.$$

Pela aplicação do resultado acima, decorre a expressão (31), uma vez que

$$F\{\ddot{g}(t)\} = i\omega\mathscr{F}\{\dot{g}(t)\} = (i\omega)^2\mathscr{F}\{g(t)\} = -\omega^2\mathscr{F}\{g(t)\}$$

→ Também é necessário que $\dot{g}(t)$ e $\ddot{g}(t)$ sejam absolutamente integráveis !

As expressões acima são úteis na aplicação da transformada de Fourier em **equações de movimento de sistemas mecânicos**. Por exemplo, para um sistema linear com um grau de liberdade e amortecimento viscoso,

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \quad \to \quad m\bar{X}_A + c\bar{X}_V + k\bar{X} = \left(-\omega^2 m + i\omega c + k\right)\bar{X} = \bar{F}$$

PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE FOURIER (Shin & Hammond)

	compressão expansão	$\mathcal{F}\{g(at)\} = \overline{G}(\omega / a)/\lvert a \rvert$	$\mathcal{F}\{g(at)\} = \overline{G}(f / a)/\lvert a \rvert$	(a)
	inversão	$\mathcal{F}\{g(-t)\} = \overline{G}(-\omega)$	$\mathcal{F}\{g(-t)\} = \overline{G}(-f)$	(b)
	deslocamento no tempo	$\mathcal{F}\{g(t-t_0)\} = e^{-i\omega t_0}\overline{G}(\omega)$	$\mathcal{F}\{g(t-t_0)\} = e^{-i2\pi f t_0}\overline{G}(f)$	(c)
	deslocamento na frequência	$\mathcal{F}\left\{e^{i\omega_0 t} g(t)\right\} = \overline{G}(\omega-\omega_0)$	$\mathcal{F}\left\{e^{i2\pi f_0 t} g(t)\right\} = \overline{G}(f-f_0)$	(d)
	derivada	$\mathcal{F}\{\dot{g}(t)\} = i\omega\overline{G}(\omega)$	$\mathcal{F}\{\dot{g}(t)\} = i2\pi f\overline{G}(f)$	(e)
→	**convolução**	$\mathcal{F}\{h(t) * g(t)\} = \overline{H}(\omega)\overline{G}(\omega)$	$\mathcal{F}\{h(t) * g(t)\} = \overline{H}(f)\overline{G}(f)$	(f)
→	**multiplicação**	$\mathcal{F}\{g(t)\,w(t)\} = \overline{G}(\omega) * \overline{W}(\omega)$	$\mathcal{F}\{g(t)\,w(t)\} = \overline{G}(f) * \overline{W}(f)$	(g)

TRANSFORMADA DE FOURIER EM COMPRESSÃO / EXPANSÃO

Uma das propriedades da transformada de Fourier é que

$$\mathcal{F}\{g(at)\} = \frac{1}{|a|}\overline{G}\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad \text{de modo que} \quad \mathcal{F}\{g(-t)\} = \overline{G}(-\omega) = \overline{G}^*(\omega) \ ,$$

o que pode ser demonstrado da seguinte forma.

Para $a > 0$, faz-se $\tau = at$, de modo que $d\tau = adt$. Assim sendo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(at)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau}d\tau = \frac{1}{a}\overline{G}\left(\frac{\omega}{a}\right) .$$

Já para $a < 0$, faz-se $\tau = at$, de modo que $d\tau = adt$. Nesse caso, contudo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(at)e^{-i\omega t}dt = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} g(\tau)e^{-i\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau}d\tau = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i\left(\frac{\omega}{a}\right)\tau}d\tau = -\frac{1}{a}\overline{G}\left(\frac{\omega}{a}\right) .$$

PARES DE TRANSFORMADAS DE FOURIER (Shin & Hammond)

função temporal	**transformada de Fourier**	
x(t)	$\bar{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega})$	$\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{f})$
$\delta(t)$	1	1
1	$2\pi\delta(\omega)$	$\delta(f)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-i\omega t_0}$	$e^{-i2\pi f t_0}$
$e^{i\omega_0 t}$ ou $e^{-i2\pi f_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	$\delta(f-f_0)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{i\omega}$	$\dfrac{\delta(f)}{2}+\dfrac{1}{i2\pi f}$
$e^{-\alpha t}u(t)$	$1/(\alpha+i\omega)$	$1/(\alpha+i2\pi f)$
$\begin{cases} =A, & \lvert t\rvert<T \\ =0, & \lvert t\rvert>T \end{cases}$	$2AT\dfrac{\operatorname{sen}(\omega T)}{\omega T}$	$2AT\dfrac{\operatorname{sen}(2\pi f T)}{2\pi f T}$