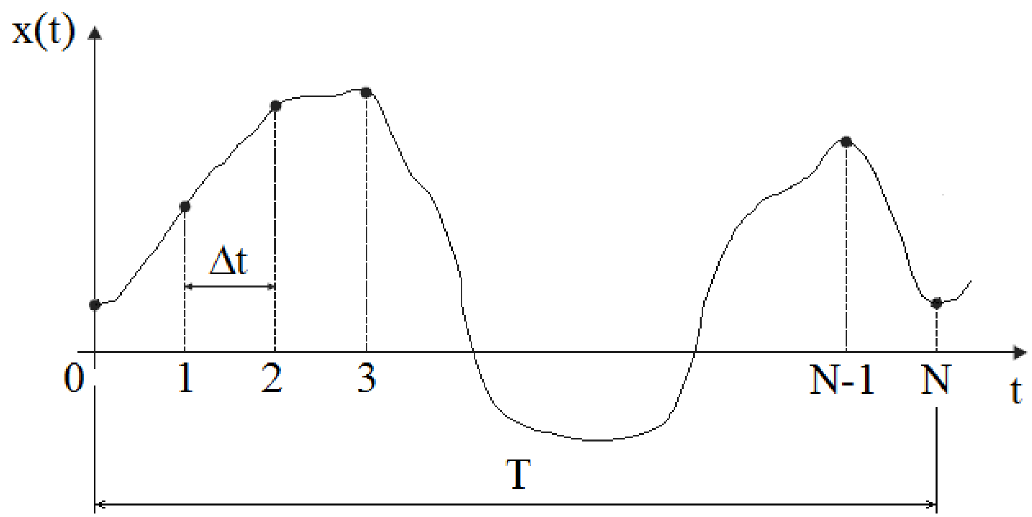
<u>ANÁLISE NUMÉRICA DE FOURIER – FUNÇÕES PERIÓDICAS</u>

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

No caso de funções periódicas levantadas experimentalmente e amostradas, como a função x(t), de período T, ilustrada abaixo, recorre-se à integração numérica, em computador, para obtenção de seus coeficientes de Fourier.



Função periódica x(t), de período T, sob amostragem (Espíndola, 1986)

Isso também vale para funções de difícil, ou impossível, integração analítica.

COEFICIENTES DE FOURIER (FORMA REAL)

Os coeficientes de Fourier de uma função periódica x(t) são obtidos por

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)dt \ ; \quad A_j = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(\omega_j t)dt \ ; \quad B_j = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\operatorname{sen}(\omega_j t)dt \quad (1)$$

onde, para $j = 1, 2, ..., \infty$, tem-se que

$$\omega_j = j\omega_1 \quad (2a) \quad , \text{sendo } \omega_1 = \frac{2\pi}{T} \quad (2b)\ .$$

Caso se defina $\omega_0 = 0$, o coeficiente A_0 pode ser obtido da expressão geral para os coeficientes A_j, de modo que $j = 0, 1, 2, ..., \infty$.

→ Nas expressões acima, quais as diferenças em relação ao exposto antes?

(Essas expressões, guardadas as distinções de notação, também estão em Shin&Hammond, 2008, p.32.)

COEFICIENTES DE FOURIER (FORMA REAL) (cont.)

Seja, então, o período T dividido em N intervalos. Decorre daí que

$$\Delta t = \frac{T}{N} \quad (3)$$

Os valores dos coeficientes $\underline{A_j}$ podem ser aproximados por um somatório finito, da seguinte forma:

$$A_j \approx \frac{2}{T}\sum_{k=0}^{N-1}\left\{x(k\,\Delta t)\cos\left[j\omega_1(k\Delta t)\right]\right\}\Delta t \quad (4) \qquad \left[\rightarrow A_j = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos(\omega_j t)dt\right]$$

com $j = 0, 1, 2, ..., \infty$ (vide observação feita para A_0) e $k = 0, 1, ..., N-1$.

Sendo $x_k = x(k\,\Delta t)$ e levando sucessivamente (2b) e (3) em (4), tem-se que

$$A_j \approx \frac{2}{T}\Delta t\sum_{k=0}^{N-1}\left\{x_k \cos\left[j\frac{2\pi}{T}(k\Delta t)\right]\right\} = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[x_k \cos\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)\right] \quad (5)$$

COEFICIENTES DE FOURIER (FORMA REAL) (cont.)

A expressão (5) permite aproximar todos os valores dos A_j para uma função periódica x(t) representada (ou mesmo conhecida) através de uma sequência de pontos, tal como ilustrado inicialmente.

Suponha-se, agora, que j = (N + P), sendo P um inteiro maior ou igual a 0. Neste caso, constata-se que

$$\cos\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)=\cos\left[(N+P)\frac{2\pi}{N}k\right]=\cos\left[k\frac{2\pi}{N}(N+P)\right]=$$

$$=\cos(k2\pi)\cos\left(k\frac{2\pi}{N}P\right)-\mathrm{sen}(k2\pi)\,\mathrm{sen}\left(k\frac{2\pi}{N}P\right)=\cos\left(P\frac{2\pi}{N}k\right) \quad (6)$$

Assim sendo, das relações (5) e (6), decorre que

$A_P = A_{N+P}$, de modo que $A_0 = A_N$, $A_1 = A_{N+1}$, $A_2 = A_{N+2}$, ...

COEFICIENTES DE FOURIER (FORMA REAL) (cont.)

Ou seja, os A_j, obtidos pela expressão (5), formam uma série periódica, que se repete a partir de A_N, como ilustrado tipicamente abaixo. *(→ Por quê?)*

Assim, só faz sentido calcular os coeficientes de A_0 a A_{N-1}, inclusive.

Representação dos coeficientes A_j ao longo da frequência (Espíndola, 1986)

→ Todo o desenvolvimento anterior também se aplica aos coeficientes B_j.

COEFICIENTES DE FOURIER (FORMA REAL) (cont.)

A representação dos B_j ao longo da frequência é ilustrada, de forma típica, na figura abaixo. Nota-se que $B_0 = 0$, como já visto.

Representação dos coeficientes B_j *ao longo da frequência (Espíndola, 1986)*

Portanto, o **cômputo numérico** dos **coeficientes da série de Fourier**, em **forma real**, para j = 0, 1,..., N-1, pode ser feito por

$$\boxed{A_j \approx \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)} \quad (7) \quad \text{e} \quad \boxed{B_j \approx \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \operatorname{sen}\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)} \quad (8).$$

COEFICIENTES DE FOURIER (FORMA COMPLEXA)

Em decorrência do exposto acima, os coeficientes $\underline{\bar{G}_j \text{ e } \bar{G}_j^*}$ da forma complexa da série de Fourier podem ser aproximadamente determinados por

$$\bar{G}_j = \frac{1}{2}(A_j - iB_j) \approx \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \left[\cos\left(j\frac{2\pi}{N}k\right) - i\,\mathrm{sen}\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)\right]\right\} \quad (9)$$

$$\bar{G}_j^* = \bar{G}_{-j} = \frac{1}{2}(A_j + iB_j) \approx \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k \left[\cos\left(j\frac{2\pi}{N}k\right) + i\,\mathrm{sen}\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)\right]\right\} \quad (10)$$

Ocorre que, como a função cosseno é par e a função seno é ímpar, ou seja,

$\cos(-x) = \cos(x)$ e $\mathrm{sen}(-x) = -\mathrm{sen}(x)$

basta utilizar apenas a expressão (9) para computar $\bar{G}_j$ e $\bar{G}_j^*$.

COEFICIENTES DE FOURIER (FORMA COMPLEXA) (cont.)

Assim sendo, todos os **coeficientes da série de Fourier**, em **forma complexa**, podem ser **aproximadamente computados** através de

$$\boxed{\bar{G}_j \approx \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)}} \quad (11), \quad \text{em que} \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots .$$

Ou seja, agora, o índice j assume tanto valores positivos quanto negativos.

Definindo $\bar{X}_j$ de modo tal que

$$\boxed{\bar{X}_j = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)}} \quad (12), \quad \text{decorre que} \quad \boxed{\bar{G}_j \approx \frac{\bar{X}_j}{N}} \quad (13)$$

A expressão (12) é comumente chamada de **transformada discreta de Fourier** (ou DFT, de *discrete Fourier transform*).

RECONSTITUIÇÃO DE VALORES DA FUNÇÃO TEMPORAL

Os valores discretos $\underline{x_k}$ podem ser reconstituídos, a partir dos valores $\underline{\bar{X}_j}$ correspondentes, pela **transformada inversa discreta de Fourier**, tal que

$$\boxed{x_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \bar{X}_j e^{i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)}} \qquad (14) \qquad \text{em que} \qquad k = 0, 1, 2, ..., N\text{-}1.$$

Para comprovar essa afirmação, substitui-se (12) em (14), obtendo-se

$$x_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left[\sum_{r=0}^{N-1} x_r . e^{-i\left(j\frac{2\pi}{N}r\right)}\right] e^{i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)} = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} x_r \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\left(j\frac{2\pi}{N}r\right)} e^{i\left(j\frac{2\pi}{N}k\right)} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} x_r \sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\left(j\frac{2\pi}{N}\right)(r-k)} \qquad (15)$$

RECONSTITUIÇÃO DE VALORES DA FUNÇÃO TEMPORAL (cont.)

Como é válida a condição de ortogonalidade

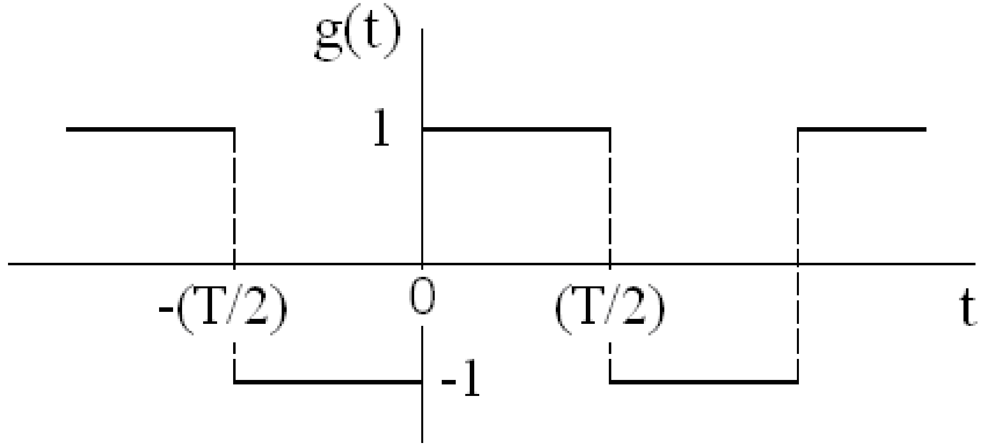
$$\sum_{j=0}^{N-1} e^{-i\left(j\frac{2\pi}{N}\right)(r-k)} = \begin{cases} N, & \text{se } r = k \\ 0, & \text{se } r \neq k \end{cases} \qquad (16),$$

constata-se que a expressão (15) reduz-se à identidade $\boxed{x_k = x_k}$, o que comprova a expressão da transformada inversa discreta de Fourier (ou IDFT, de *inverse discrete Fourier transform*).

As expressões expostas acima, que visam o cômputo numérico dos coeficientes de Fourier, são adequadas quando se trata de determinar um número relativamente baixo de coeficientes, face ao esforço computacional.

Se o número de coeficientes for elevado, usa-se um **algoritmo especial**, dito **transformada rápida de Fourier** (ou FFT, de *fast Fourier transform*).

EXEMPLO – ONDA QUADRADA



Expressões analíticas para os coeficientes da série de Fourier do sinal acima já foram determinadas anteriormente. Suponha-se, agora, que esse sinal tenha sido adquirido digitalmente, com amostragem uniforme, ao longo de um período, gerando uma sequência de 32 pontos, tal que

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como se comparam os espectros correspondentes aos coeficientes obtidos pelas vias analítica e numérica?