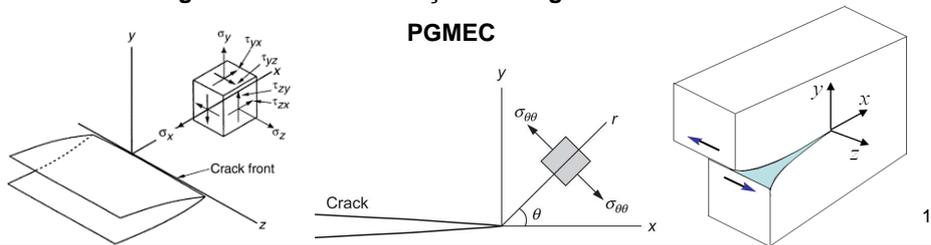


# 8. ANÁLISE TENSIONAL NA PONTA DA TRINCA

Prof. Dr. Julio Almeida

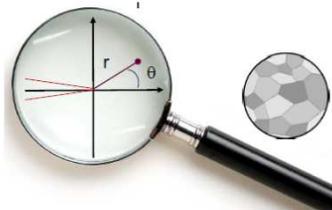
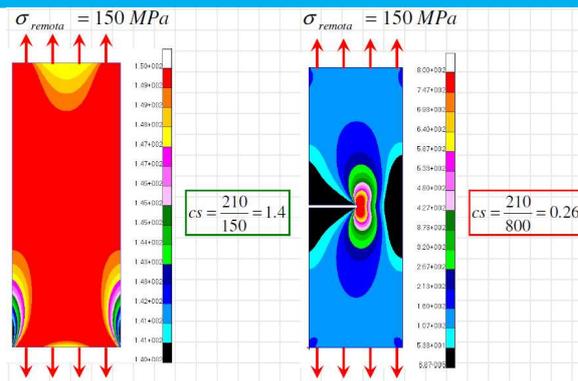
Universidade Federal do Paraná  
Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica

PGMEC



1

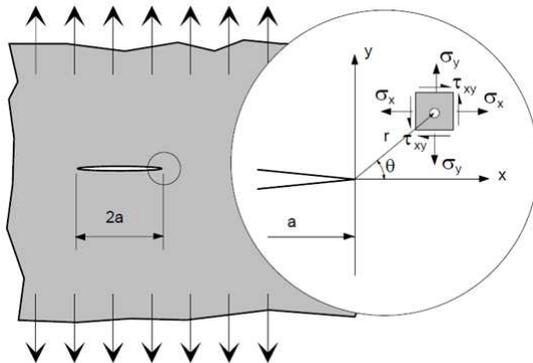
# ANÁLISE DE TENSÕES EM TRINCAS



2

## ANÁLISE DE TENSÕES EM TRINCAS

Nas proximidades de uma trinca, as tensões atuantes podem ser representadas na forma:



$$\sigma_{ij} = \left( \frac{k}{\sqrt{r}} \right) f_{ij}(\theta)$$

3

## ANÁLISE DE TENSÕES EM TRINCAS

- formulação matemática válida para materiais elásticos lineares isotrópicos;
- formulações e soluções publicadas por *Irwin*, *Westergaard* e *Williams*;
- convencionalmente substitui-se a constante “k” por um parâmetro chamado fator intensificador de tensões (K), na forma:

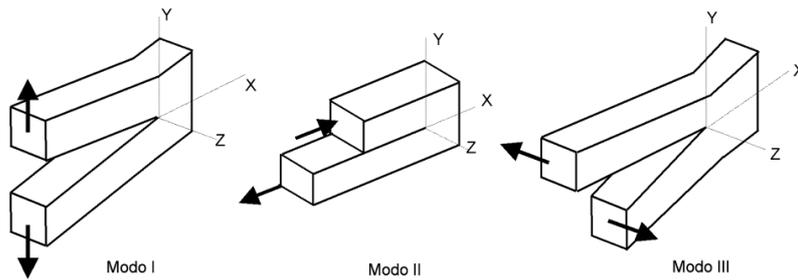
$$k \Rightarrow K, \text{ sendo } : K = k\sqrt{2\pi}$$

4

## FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÕES

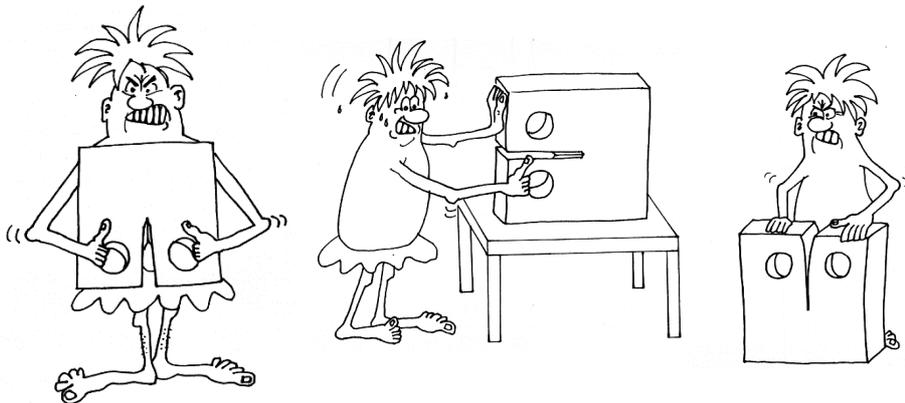
- o fator de intensidade de tensões é usualmente definido com um subscrito, o qual define o modo do carregamento sobre a trinca na forma:

$$K_I, K_{II}, K_{III}$$



5

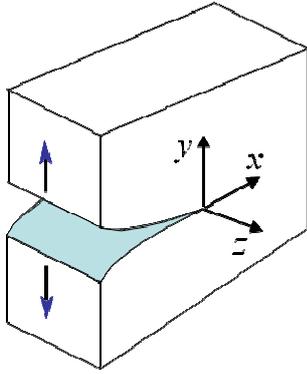
## MODOS DE ABERTURA DA TRINCA



- I . modo de abertura (“opening”)
- II . modo de deslizamento (“sliding”)
- III . modo de rasgamento (“tearing”)

6

## MODOS DE ABERTURA DA TRINCA

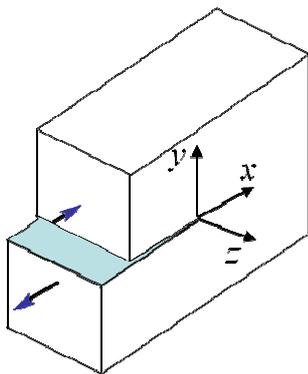


- I . modo de abertura (“opening”)
- II . modo de deslizamento (“sliding”)
- III . modo de rasgamento (“tearing”)

- o modo de abertura da trinca do tipo I (Modo I) é tecnicamente o mais importante;

7

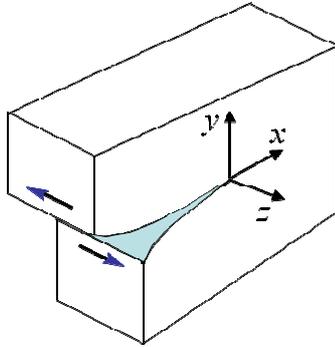
## MODOS DE ABERTURA DA TRINCA



- o modo de abertura da trinca do tipo II (Modo II), menos frequente, se produz quando existem trincas que formam ângulos de  $90^\circ$ ;

8

## MODOS DE ABERTURA DA TRINCA



- o modo de abertura da trinca do tipo III (Modo III), surge em barras com trincas submetidas a esforços de cisalhamento em torção.

9

## ANÁLISE DE TENSÕES EM TRINCAS

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{ij}^I = \left( \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}^I(\theta) \\ \sigma_{ij}^{II} = \left( \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}^{II}(\theta) \\ \sigma_{ij}^{III} = \left( \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}^{III}(\theta) \end{cases}$$

- as equações descritas para o cálculo da distribuição de tensões nas proximidades da trinca são válidas, porém, desde que  $r \ll a$ , fornecendo resultados aceitáveis sem comprometer os resultados finais para valores de "r" até 10% do tamanho da trinca ( $r \cong 0,1a$ ).

10

## EQUAÇÕES DE IRWIN (1951)

## Modo de abertura do tipo I:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} + \dots \\ 1 + \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} + \dots \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z = 0 \Rightarrow EPT$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \Rightarrow EPD$$

11

## EQUAÇÕES DE IRWIN (1951)

## Modo de abertura do tipo II:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) + \dots \\ \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \dots \\ \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2} \right) + \dots \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z = 0 \Rightarrow EPT$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \Rightarrow EPD$$

12

## EQUAÇÕES DE IRWIN (1951)

Modo de abertura do tipo III:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + \dots \\ \operatorname{cos} \frac{\theta}{2} + \dots \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

13

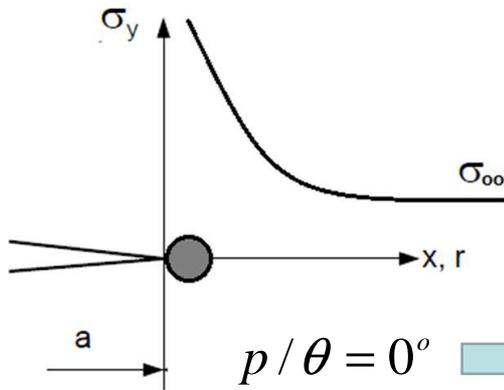
## EQUAÇÕES DE IRWIN (1951)

Pelo princípio da superposição da elasticidade linear, pode-se ainda considerar:

$$\sigma_{ij}^{TOTAL} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} + \sigma_{ij}^{III}$$

14

## PONTO SINGULAR DE TENSÃO



$mas\ p / r \cong 0 \Rightarrow \sigma = \sigma_\infty$

15

## PONTO SINGULAR DE TENSÃO

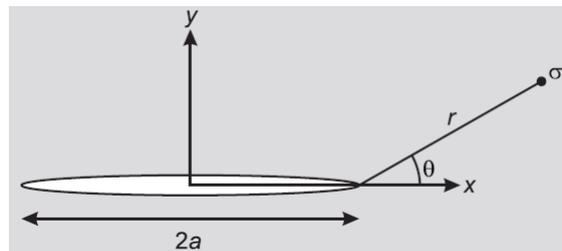
$\Rightarrow \sigma = \sigma_\infty$

- trata-se do paradoxo matemático da MFEL
- numa região próxima da frente da trinca, se supera o limite elástico do material, produzindo-se uma plastificação localizada

16

**EXEMPLO 01**

Calcule a distribuição da máxima tensão de cisalhamento nas proximidades de uma trinca carregada no modo I. O material é elástico com coeficiente de *Poisson* de 0,3.



17

**EFEITO DA GEOMETRIA DO SISTEMA**

- os estados de tensões até então apresentados são válidos para uma trinca de comprimento “2a” numa placa infinita;
- demais geometrias exigem, assim, modificações nas equações tendo em vista que as tensões devem se anular nas superfícies livres;

18

## EFEITO DA GEOMETRIA DO SISTEMA

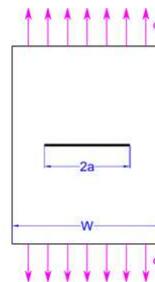
- o procedimento padrão corresponde a tomar a solução da placa infinita e multiplicá-la por uma equação algébrica que anule as tensões na superfície.

19

## FUNÇÕES POLINOMIAIS

- são do tipo:

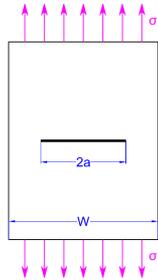
$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a}$$



- $Y$  = fator de forma - depende da geometria da placa, sendo um polinômio em  $f(a/W)$ .

20

**FUNÇÕES POLINOMIAIS - EXEMPLOS**

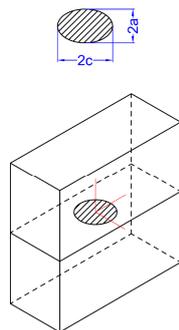


$$K_I = f\left(\frac{a}{W}\right)\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \sqrt{\sec\frac{\pi a}{2W}\left(1 - 0,025\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 0,06\left(\frac{a}{W}\right)^4\right)}$$

21

**FUNÇÕES POLINOMIAIS - EXEMPLOS**



$$K_I = f\left(\frac{a}{W}\right)\sigma\sqrt{\pi a}$$

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{1}{\phi}$$

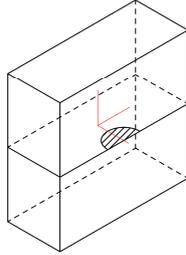
$a/c$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\phi$	1,0	1,02	1,05	1,10	1,15	1,21	1,28	1,35	1,42	1,49	1,57

22

**FUNÇÕES POLINOMIAIS - EXEMPLOS**



$$K_I = f\left(\frac{a}{W}\right)\sigma\sqrt{\pi a}$$



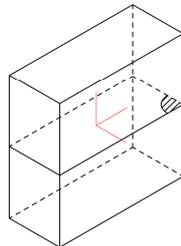
$$f\left(\frac{a}{W}\right) = 1,12 \frac{1}{\phi}$$

$a/c$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\phi$	1,0	1,02	1,05	1,10	1,15	1,21	1,28	1,35	1,42	1,49	1,57

**FUNÇÕES POLINOMIAIS - EXEMPLOS**



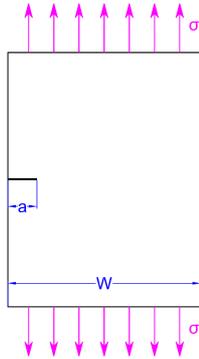
$$K_I = f\left(\frac{a}{W}\right)\sigma\sqrt{\pi a}$$



$$f\left(\frac{a}{W}\right) = 1,12^2 \frac{1}{\phi}$$

$a/c$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\phi$	1,0	1,02	1,05	1,10	1,15	1,21	1,28	1,35	1,42	1,49	1,57

## FUNÇÕES POLINOMIAIS - EXEMPLOS



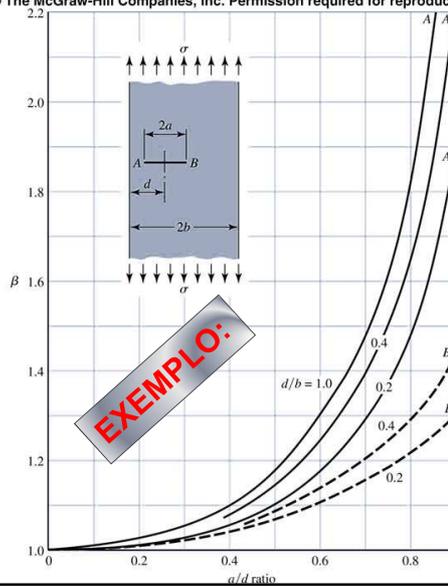
$$K_I = f\left(\frac{a}{W}\right) \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$f\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)^{1.5}} \left( 0,857 + 0,265 \left[ \left(\frac{a}{W}\right) + \left(1 - \frac{a}{W}\right)^6 \right] \right)$$

25

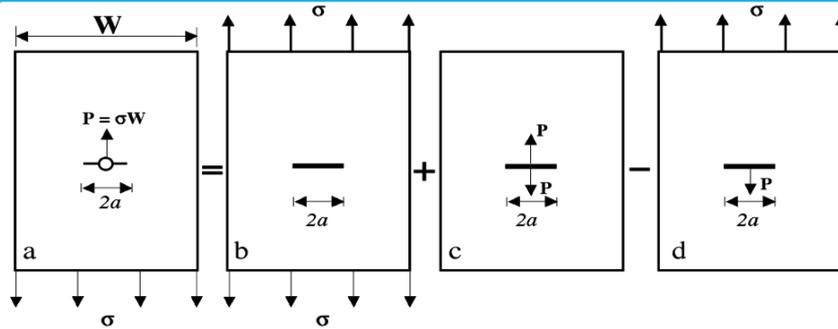
## FATOR DE FORMA - TABELADO

Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.



26

## SUPERPOSIÇÃO DO FATOR INTENSIFICADOR DE TENSÕES



$$K_{Ia} = K_{Ib} + K_{Ic} - K_{Id}$$

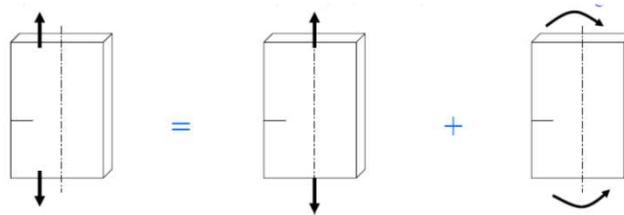


$$K_{Ia} = K_{Id}$$

$$K_{Ia} = \frac{1}{2}(K_{Ib} + K_{Ic})$$

27

## SUPERPOSIÇÃO DO FATOR INTENSIFICADOR DE TENSÕES - EXEMPLO



$$K_I^{TOTAL} = K_I^{axial} + K_I^{flexão}$$

$$K_I^{TOTAL} = K_I^A + K_I^B + K_I^C + \dots$$

$$K_I^{TOTAL} \neq K_I + K_{II} + K_{III}$$

28

## RELAÇÃO ENTRE G e K

.....

quando todos os 3 modos de carregamento estão presentes, a taxa de liberação de energia (por ser uma grandeza escalar) pode ser dada na forma:

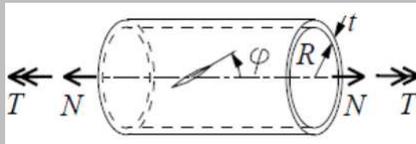
$$G = \frac{K_I^2}{E} + \frac{K_{II}^2}{E} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \Rightarrow EPT$$

$$G = \frac{K_I^2}{E}(1-\nu^2) + \frac{K_{II}^2}{E}(1-\nu^2) + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \Rightarrow EPD$$

29

## EXEMPLO 02

Um cilindro circular de parede delgada contém uma fissura. O plano desta fissura está inclinada num ângulo ( $\varphi$ ) com respeito ao eixo longitudinal do cilindro, conforme figura:



O cilindro é carregado por um binário T e por uma força de tração axial N.

30

**EXEMPLO 02 - continuação**

Determinar uma relação entre  $T$ ,  $N$  e  $\varphi$  de modo que a trinca seja carregada em modo I apenas, e em modo II apenas.

Assume-se que  $R \gg t$  de modo que a curvatura do cilindro pode ser negligenciada quando da determinação do fator de intensidade de tensão correspondente.

Dados:  $A = 2\pi R t$

$$\tau = \frac{-T}{2\pi R^2 t}$$

31

**TENACIDADE À FRATURA ( $K_C / K_{IC}$ )**

- pelas hipóteses consideradas, existe um parâmetro que governa o estado de tensões na ponta trinca –  $K_I$ ;

-  $K_I$  pode ser calculado para todas as geometrias e estados de carga;

- quando  $K_I$  alcança um valor crítico –  $K_C$  (EPT) ou  $K_{IC}$  (EPD), a fissura se torna instável e começa a se propagar;

32

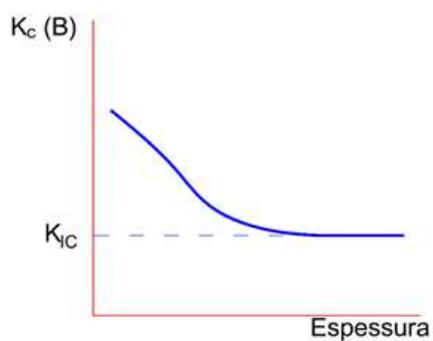
TENACIDADE À FRATURA ( $K_C / K_{IC}$ )

- $K_{IC}$ , característico de cada material, estado termomecânico e temperatura, pode ser medido a partir de ensaios normalizados;
- por análise dimensional, a tenacidade à fratura tem unidades (SI) de  $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$
- não confundir:  $K_C$ ,  $K_{IC}$ ,  $K_f$  e  $K_t$

33

TENACIDADE À FRATURA ( $K_C / K_{IC}$ )

- $K_C$  depende linearmente da espessura do material

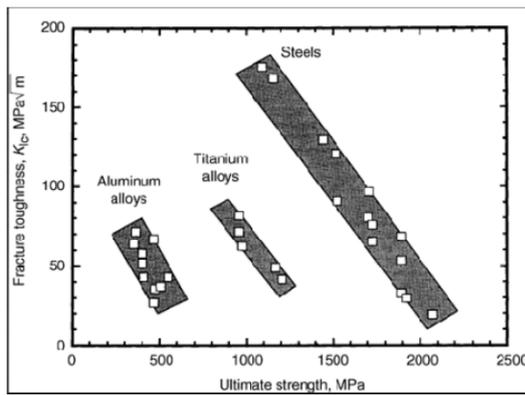
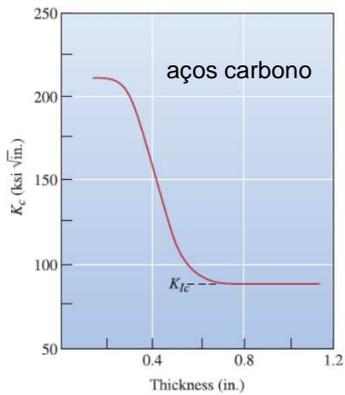


$$\frac{K_C(B)}{K_{IC}} = \sqrt{1 + 0,224 \left( \frac{B_{\min}}{B} \right)^2}$$

34

## TENACIDADE À FRATURA – VALORES

- $K_{IC}$  para metais: 20 a 200  $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$
- $K_{IC}$  para polímeros e cerâmicas: 1 a 5  $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$



35

## TENACIDADE À FRATURA - VALORES

Material	$G_c$ ( $\text{kJ}/\text{m}^2$ )	$K_{IC}$ ( $\text{MPa m}^{1/2}$ )
Ligas de alumínio	6 - 35	20 - 50
Aço carbono	100 - 300	140 - 250
Polietileno	6,0 - 7,0	1,0 - 2,0
Vidro	0,01	0,7 - 08,
Concreto armado	0,2 - 4,0	10 - 15
Ferro fundido	0,2 - 3,0	6,0 - 20

36

**EXEMPLO 03**

Corpos de prova usinados a partir de um monocristal de sílica com  $K_{Ic} = 1,15 \text{ MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$  foram ensaiados em flexão em 3 pontos, tendo-se obtido em média, uma tensão de ruptura de 35 MPa. Para um fator de forma de 1,12 estime o tamanho do defeito crítico.

37

**EXEMPLO 03 - continuação**

A seguir, esses corpos de prova fissurados são submetidos a um tratamento de polimento químico com ácido fluorídrico ocasionando uma redução de 50  $\mu\text{m}$  de material da superfície. Qual o ganho estimado em resistência nessas circunstâncias?

38

**EXEMPLO 04**

Um vaso de pressão esférico foi adequadamente projetado para a condição de cargas estáticas e dinâmicas. Supondo, porém, que o mesmo venha a apresentar uma trinca central no meio da sua espessura de parede, determine a melhor liga (material) entre as disponíveis a ser utilizada para a referida condição. Supor EPD.

39

**EXEMPLO 04 - continuação**

MATERIAL	$(K_{IC}/\sigma_{esc})^2$
Aço carbono 1040	43,11 mm
Alumínio 2024	16,3 mm
Aço temperado 4140	5,3 mm
Aço temperado 4340	3,8 mm
Alumínio 7075	2,4 mm

40

## BIBLIOGRAFIA DE REFERÊNCIA

**Almeida, J.C.** *Projeto Mecânico – Enfoque baseado na Mecânica da Fratura e Fadiga - 1ª Ed.*, Elsevier (2018).

**Arana, J. L. e González, J.J.**, *Mecánica de Fractura*, Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

**Anderson, T.L.**, *Fracture Mechanics – Fundamentals and Applications*, 3a Ed., Taylor & Francis, USA (2005).

**Schon, C.G.**, *Mecânica dos Materiais*, Univ. São Paulo, Dpto. de Engenharia Metalúrgica e de Materiais, São Paulo (2009).

**Shigley, J., Mischke, C.R., Budynas, R.G.**, *Projeto de Engenharia Mecânica*, 7a Ed, Bookman (2005).