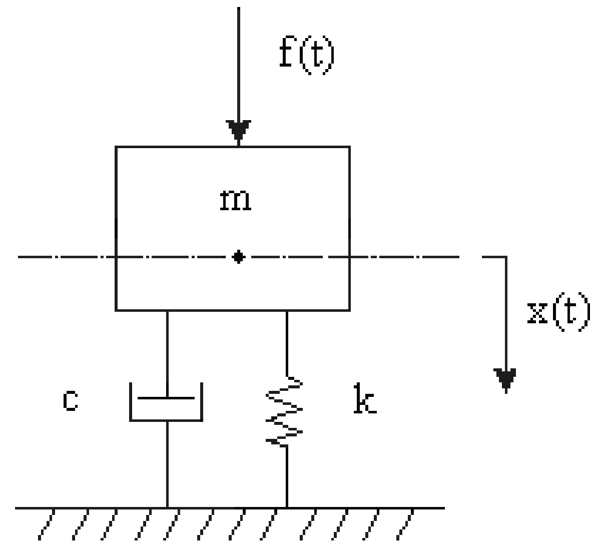
SISTEMAS COM 1 GDL SOB EXCITAÇÃO GENÉRICA

RESOLUÇÃO NUMÉRICA

A equação de movimento de um sistema linear com um grau de liberdade e amortecimento viscoso é



$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \qquad (1).$$

Dividindo todos os termos por m, obtém-se

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}f(t) \qquad (2).$$

Para fins de resolução numérica, essa equação, de segunda ordem, deve ser convertida num sistema com duas equações de primeira ordem.

Assim, ela poderá ser resolvida, por exemplo, com o auxílio do MATLAB, que possui rotinas específicas para tal, baseadas nos métodos de Runge-Kutta.

CONVERSÃO DA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Para conversão da equação de movimento, visando sua resolução pela via numérica, são definidas duas novas variáveis, quais sejam

$$u_1(t) = x(t) \quad (3) \quad \text{e} \quad u_2(t) = \dot{x}(t) \quad (4).$$

Decorre, de imediato, que

$$\dot{u}_1(t) = \dot{x}(t) = u_2(t) \quad (5) \quad \text{e} \quad \dot{u}_2(t) = \ddot{x}(t) \quad (6).$$

Levando as equações (3) a (6) em (2), que é

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}f(t) \quad (2).$$

tem-se, após rearranjo, que

$$\dot{u}_2(t) = -\frac{c}{m}u_2(t) - \frac{k}{m}u_1(t) + \frac{1}{m}f(t) \quad (7).$$

SISTEMA DE EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

As equações (5) e (7), quais sejam,

$$\dot{u}_1(t) = u_2(t) \qquad \text{e}$$

$$\dot{u}_2(t) = -\frac{c}{m} u_2(t) - \frac{k}{m} u_1(t) + \frac{1}{m} f(t) \ ,$$

constituem um **sistema linear de 2 equações** de primeira ordem, **acopladas**, que é **equivalente à equação de movimento original**, de segunda ordem.

Nessa representação, as **condições iniciais** correspondentes à equação de movimento original, a saber, $x(0)$ e $\dot{x}(0)$, são dadas, respectivamente, por

$$u_1(0) \quad \text{e} \quad u_2(0) \ .$$

REPRESENTAÇÃO MATRICIAL

O **sistema de equações** de movimento acima pode ser escrito **em forma matricial**, como uma única equação, qual seja,

$$\boxed{\left[\dot{u}(t)\right]=A\left[u(t)\right]+\left[v(t)\right]}\ (8)\ ,$$

onde

$$\boxed{\left[u(t)\right]=\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}}\ (9)\ ;\ \boxed{A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{bmatrix}}\ (10)\ ;\ \boxed{\left[v(t)\right]=\begin{bmatrix} 0 \\ (1/m)f(t) \end{bmatrix}}\ (11).$$

As **condições iniciais**, em forma matricial, são dadas por

$$\boxed{\left[u(0)\right]=\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{bmatrix}}\ (12)$$

ESPAÇO DE ESTADO

Na descrição em estudo, são empregadas as seguintes denominações:

u_1 e u_2 : **variáveis de estado**;

$\left[u(t)\right]$: **vetor de estado**;

A : **matriz de estado**.

Diz-se, dessa forma, que o sistema mecânico com um grau de liberdade está descrito no **espaço de estado**.

As variáveis u_1 e u_2 , que são, respectivamente, o **deslocamento** e a **velocidade** do sistema, apresentam o **estado do sistema**.

Assim posto, o problema de valor inicial (equação diferencial + condições iniciais) pode ser solucionado de forma numérica, via Runge-Kutta.

EXEMPLO 1 – SISTEMA COM 1 GDL SOB VÁRIAS CONDIÇÕES

Seja um sistema com um grau de liberdade, em que m = 100 kg, c = 50 kg/s e k = 2000 N/m. Determinar o estado do sistema para as seguintes condições:

(a) $x(0) = -0,01$ m ; $\dot{x}(0) = 0$ m/s ; f(t) = 0 N ; (vibração livre)

(b) $x(0) = 0$ m ; $\dot{x}(0) = 0$ m/s ; f(t) = 20 N ; (excit. constante)

(c) $x(0) = 0$ m ; $\dot{x}(0) = 0$ m/s ; f(t) = 150δ(t) N ; (excitação impulsiva)

(d) $x(0) = 0$ m ; $\dot{x}(0) = 0$ m/s ; f(t) = 150sen(3t) N ; (excitação harmônica)

(e) $x(0) = 0$ m ; $\dot{x}(0) = 0$ m/s ; f(t) = 150sen(3t) + 100sen(6t) N ;

(excitação periódica)

(f) $x(0) = 0$ m ; $\dot{x}(0) = 0$ m/s ; f(t) = 1500sen[$(\omega_n / 3)$t] N ; $k_3 = 300$ N/m^3 ;

(não linearidade cúbica, excitação harmônica)

EXEMPLO 1 – SISTEMA COM 1 GDL SOB VÁRIAS CONDIÇÕES (cont.)

(g) c = 100 kg/s ; $x(0) = 0,01$ m ; $\dot{x}(0) = 0,1$ m/s ; f(t) = 150sen(6t) N .

Fontes:

Inman, D. J., Engineering Vibration (3rd edition), Pearson/Prentice-Hall, 2007;

Rao, S., Vibrações Mecânicas (4ª. edição), Pearson/Prentice-Hall, 2008.