Autovalores e Autovetores

PROFA. SIMONE

2016/2

Autovalores e Autovetores

- Autovalores e autovetores são conceitos importantes em diferentes áreas como mecânica quântica, processamento de imagens, análise de vibrações, mecânica dos sólidos, entre outras.

- Em dinâmica de estruturas, na análise das vibrações que afetam um estrutura, os autovalores estão relacionados às frequências naturais de vibração e os autovetores aos modos de vibração (deslocamentos ou deformações que a estrutura sofre).

- Este tipo de estudo permite que sejam projetadas estruturas mais resistentes às vibrações, utilizando-se recursos de amortecimento para evitar que a estrutura entre em colapso.

Autovalores e autovetores

Seja **A** uma matriz real (ou complexa) $n \times n$. Um escalar é um **autovalor** de **A** se existe um vetor não-nulo **x**, tal que:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

Tal vetor é chamado de **autovetor** de A associado ao autovalor λ.

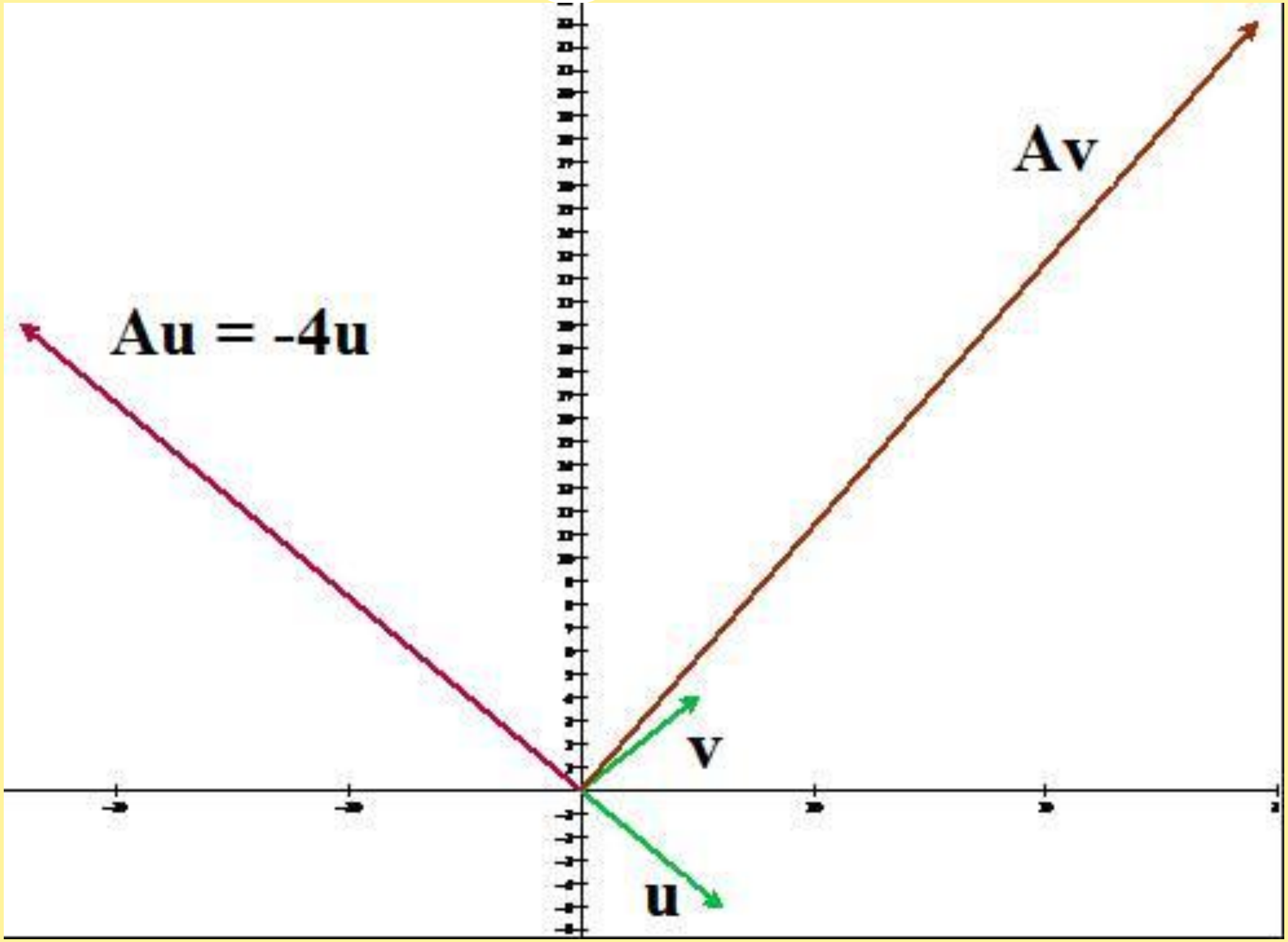
Exemplo 1

- Sejam $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

a) $\mathbf{Au} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} = -4\mathbf{u}$

b) $\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 33 \end{bmatrix} \neq \lambda\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

Exemplo 1.



Autovalores e Autovetores

- Na parte a) dizemos que λ = -4 é um **autovalor** de **A** e **u** é o **autovetor** associado.

- Observe, ainda, que todos os múltiplos de **u** são autovetores de **A**, associados ao autovalor -4, pois:

$$\mathbf{Au} = -4\mathbf{u}$$

$$\mathbf{A}(k\mathbf{u}) = -4(k\mathbf{u}) = (-4k)\mathbf{u}$$

Cálculo dos Autovalores e Autovetores

- Conforme a definição, dada uma matriz **A** $n \times n$, queremos determinar os escalares λ e todos os vetores **x** não nulos, tais que:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

$$\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{Ix} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- Note que a equação acima representa um sistema de equações lineares homogêneo, para o qual desejamos determinar todos os valores λ e todos os vetores **x** que são soluções não triviais de tal sistema.

Cálculo dos Autovalores e Autovetores

- Um sistema homogêneo possui solução única (trivial) se a matriz dos coeficientes tem determinante diferente de zero. Assim, as soluções não triviais são obtidas para os valores de λ que satisfazem a chamada **equação característica**:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Cálculo dos Autovalores e Autovetores

- Ao expandir o determinante na equação anterior, obtemos um polinômio de grau n, na variável λ:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

- Este polinômio é chamado **polinômio característico** de **A** e seus zeros são os autovalores da matriz.

- O conjunto de autovalores de uma matriz é chamado **espectro** de **A** e o maior autovalor (em termos absolutos) é dito **raio espectral**, denotado por $\rho(\mathbf{A})$.

Exemplo 2.

- a) Determinar os autovalores de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

Resolvemos a equação característica det(**A - λI**) **=** 0

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Rightarrow (5-\lambda)^2 - 9 = 0$$

$\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$ e $\boldsymbol{\lambda_2 = 8}$ são os autovalores de **A**

Exemplo 2.

- b) Determinar os autovetores de **A**

Para $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 5-2 & 3 \\ 3 & 5-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Escalonando-se a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A solução é representada por $E_2 = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dito autoespaço relativo ao autovalor $\lambda_1 = 2$

Exemplo 2.

- b) Determinar os autovetores de **A**

Para $\lambda_2 = 8$

$$\begin{bmatrix} 5-8 & 3 \\ 3 & 5-8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

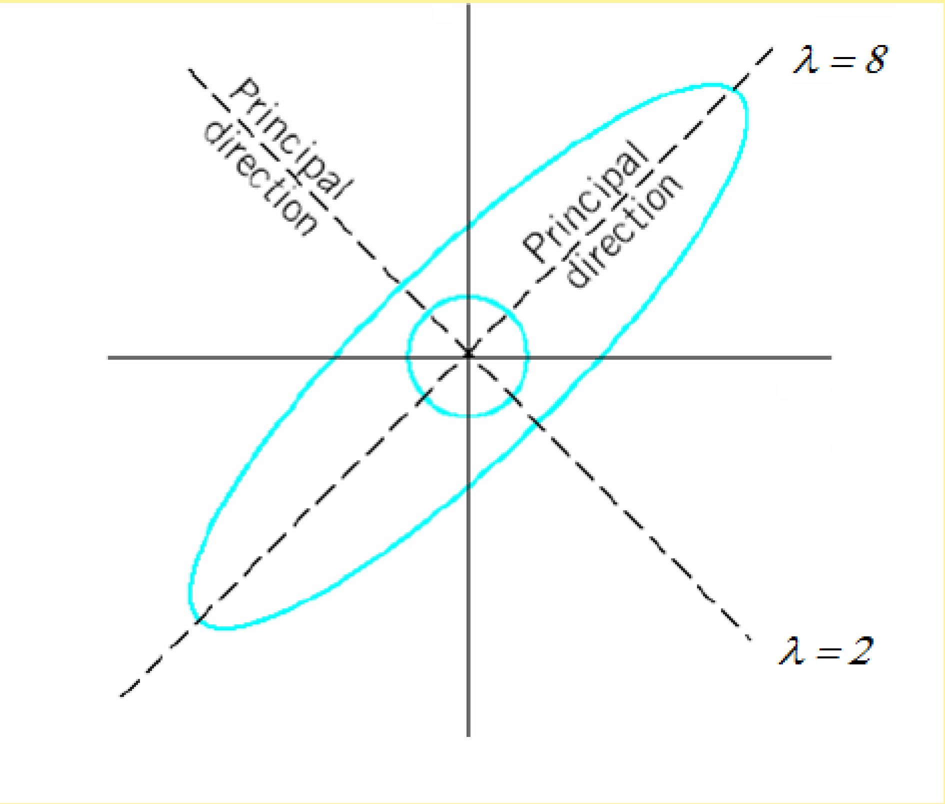
Escalonando-se a matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A solução é representada por $E_8 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, dito autoespaço relativo ao autovalor $\lambda_2 = 8$

Exemplo 2.

- Uma membrana elástica, limitada por uma circunferência de raio 1 é deformada de maneira de que o vetor **u** é transformado no vetor **v** = **Au**, onde **A** é a matriz dada no exercício.



Exercício

- Para cada matriz dada a seguir, determine os autovalores e autovetores, descrevendo os autoespaços correspondentes.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Respostas

$$\mathbf{A}: \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -3, E_4 = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, E_{-3} = t\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}: \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, E_1 = t\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_2 = t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}: \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, E_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_2 = t\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_3 = t\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}: \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, E_1 = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, E_2 = t\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$