Estudo da Reta

Matemática para Engenharia I

Profa. Simone

2016/2

Equações da reta

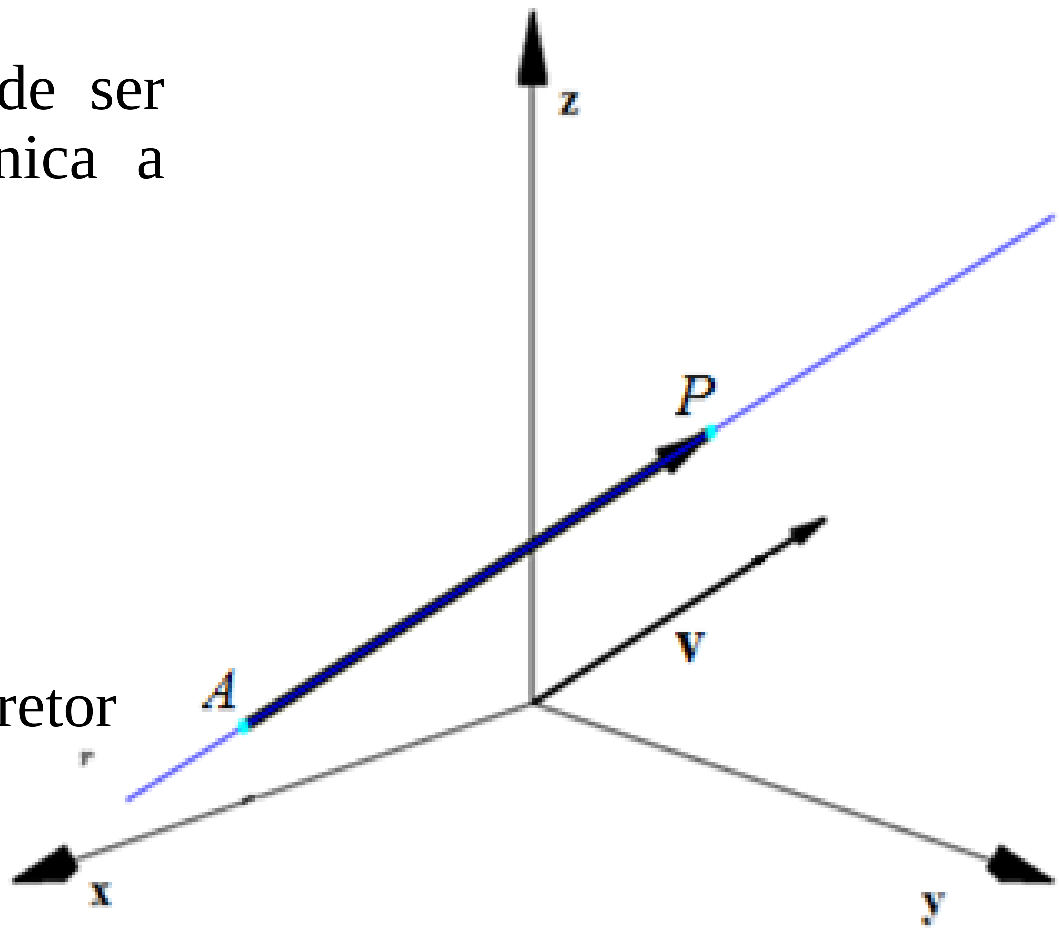
- Uma **reta** no espaço pode ser identificada de forma única a partir de um ponto na reta

$$A(x_0, y_0, z_0)$$

e de um vetor não-nulo

$$\vec{v} = (a, b, c)$$

paralelo à reta, dito vetor diretor



Equação vetorial da reta

Um ponto $P(x, y, z)$ pertence á reta r se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} \parallel \mathbf{v}$$

Isto é,

$$\overrightarrow{AP} = t\mathbf{v}$$

para algum $t \in \mathbb{R}$

Equação vetorial da reta

Um ponto $P\,(x,\ y, z)$ pertence á reta r se, e somente se,

$$\overrightarrow{AP} \,/\!/\, \mathbf{v}$$

Isto é,

$$\overrightarrow{AP} = t\mathbf{v}$$

$$P = A + t\mathbf{v}$$

para algum $t \in \mathbb{R}$

Equação vetorial da reta

- Em termos das coordenadas dos pontos A e P e do vetor **v**, temos:

$$r:(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c), -\infty < t < \infty$$

Equação vetorial da reta que passa pelo ponto $A(x_0, y_0, z_0)$ com direção dada pelo vetor **v** = (a, b, c)

A cada valor de t corresponde um ponto particular da reta. Reciprocamente, cada ponto da reta corresponde a um valor do parâmetro t. Assim, quando t varia no intervalo real $(-\infty, +\infty)$, a equação acima nos fornece as coordenadas de todos os pontos da reta.

Equações paramétricas da reta

- A equação vetorial da reta pode ser decomposta em um conjunto de equações escalares, designadas **equações paramétricas da reta**

$$r:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Exemplo 1.

a) Determine a equação vetorial e as equações paramétricas da reta *r*, que passa pelo ponto *A*(3, -1, 2) e tem direção dada pelo vetor **v** = (-3, -2, 1)

b) Determine as coordenadas do ponto que corresponde a $t = 3$

c) Verifique se o ponto (9, 3, 0) pertence à reta *r*

d) Verifique se o ponto (0, 3, 4) pertence á reta *r*

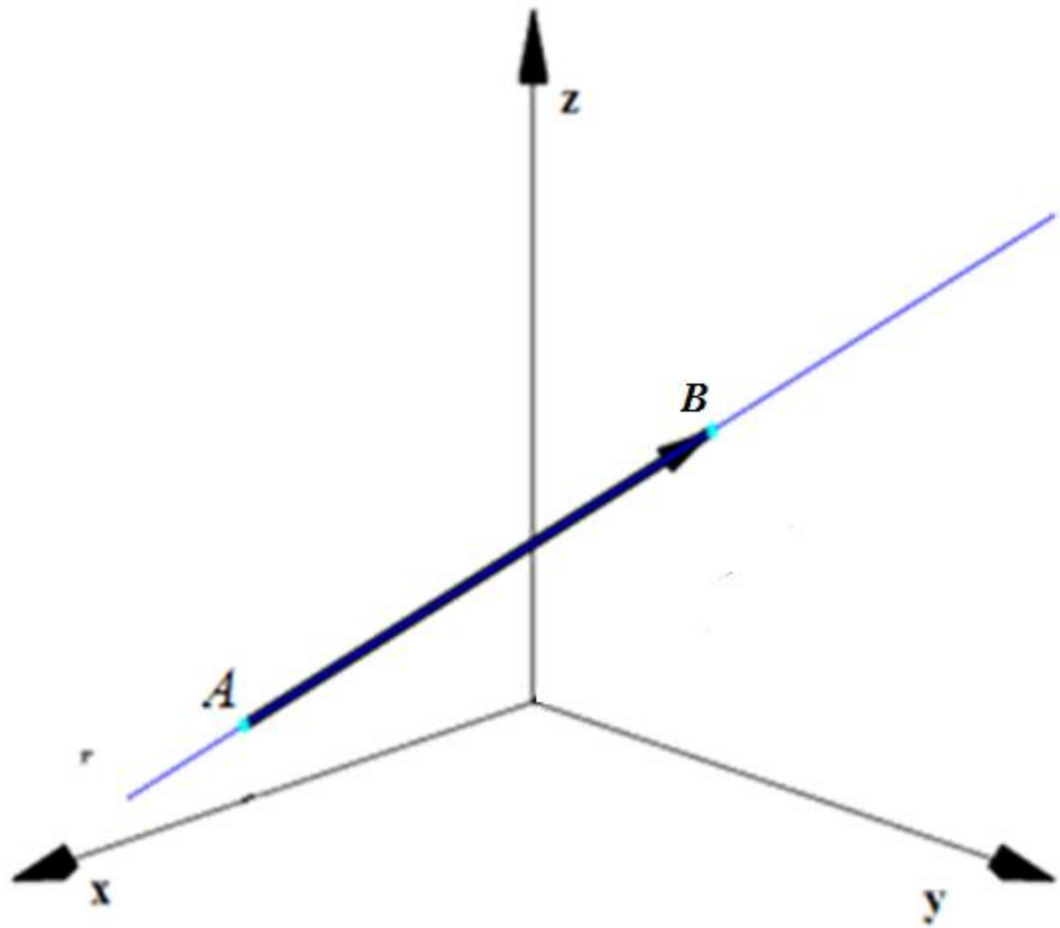
Obs.

- Para verificarmos se um dado ponto pertence a uma reta, substituímos suas coordenadas na equação da reta: se o valor do parâmetro for o mesmo nas três equações, o ponto pertence à reta, caso contrário, o ponto não pertence à reta.

- As equações de uma reta (vetorial, paramétricas,...) não são únicas, uma vez que são infinitas as escolhas para o ponto $A(x_0,\ y_0, z_0)$ e para o vetor diretor $\mathbf{v} = (a, b, c)$.

Reta definida por dois pontos

- A reta definida pelos pontos A e B é a reta que passa pelo ponto A (ou B) e tem a direção do vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$



Exemplo 2.

- Escreva equações paramétricas para a reta que passa pelos pontos $A(1, -2, 3)$ e $B(3, -1, -1)$.

Equações reduzidas da reta

- Isolando-se o parâmetro t em alguma das equações na primeira equação paramétrica e substituindo-se nas demais, obtemos as **equações reduzidas na variável *x***:

$$r:\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

- Isolando-se o parâmetro t na segunda e na terceira equação paramétrica pode-se obter as equações reduzidas nas variáveis y e z, respectivamente, através de procedimento análogo.

Exemplo 3.

- a) Escrever as equações vetorial, paramétricas e reduzidas da reta que passa pelo ponto $A(2, -4, -3)$ e tem a direção dada pelo vetor $\mathbf{v} = (1, 2, -3)$

- b) Escrever as equações paramétricas da reta que passa por B(1,-2,4) e é paralela ao eixo dos x;

- c) Escrever a equação vetorial da reta que passa por C(3, 2, 1) e é perpendicular ao plano xOz;

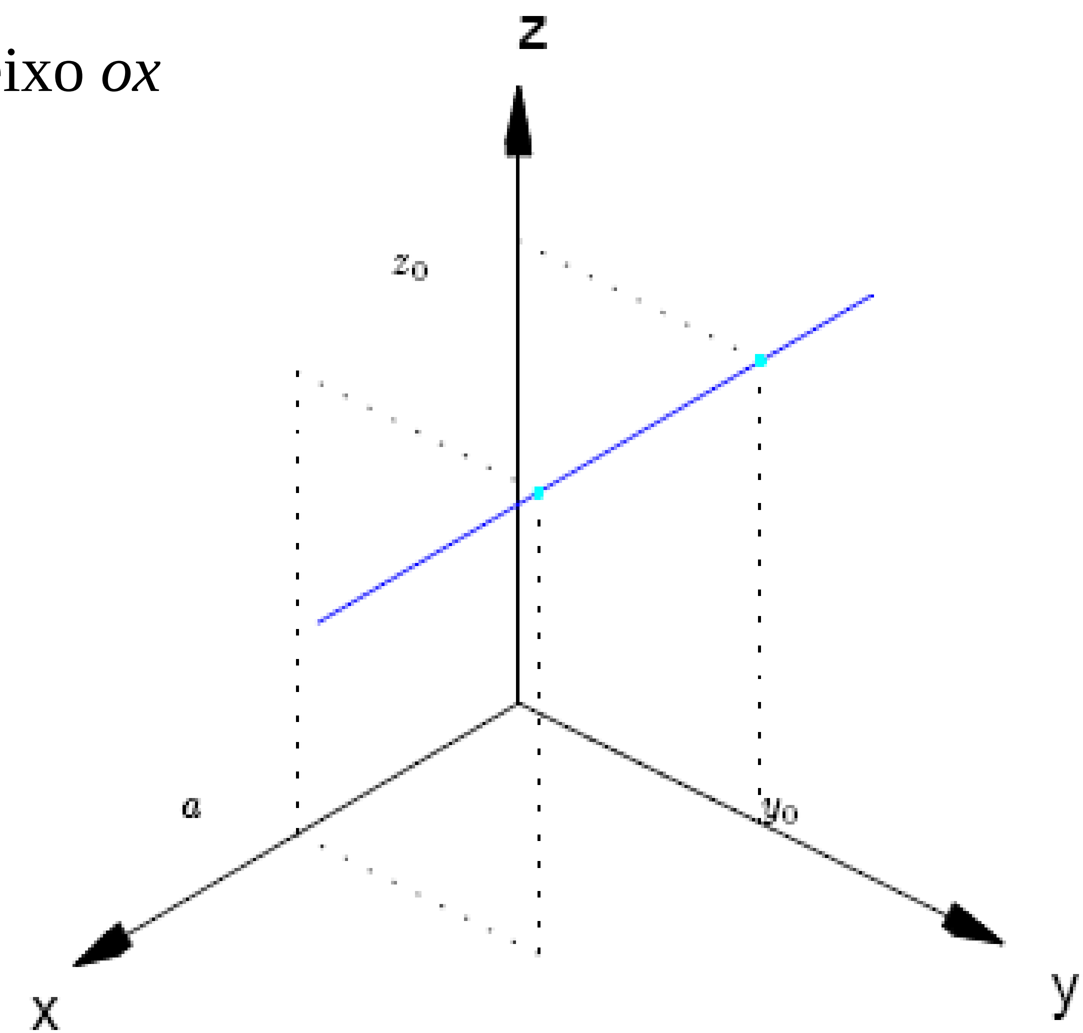
- d) Escrever uma equação para a reta que passa por D(2, 3, 4) e é ortogonal ao mesmo tempo aos eixos dos x e dos y.

Casos particulares das equações da reta

- Retas paralelas ao eixo *ox*

$$r:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = (a,0,0)$$

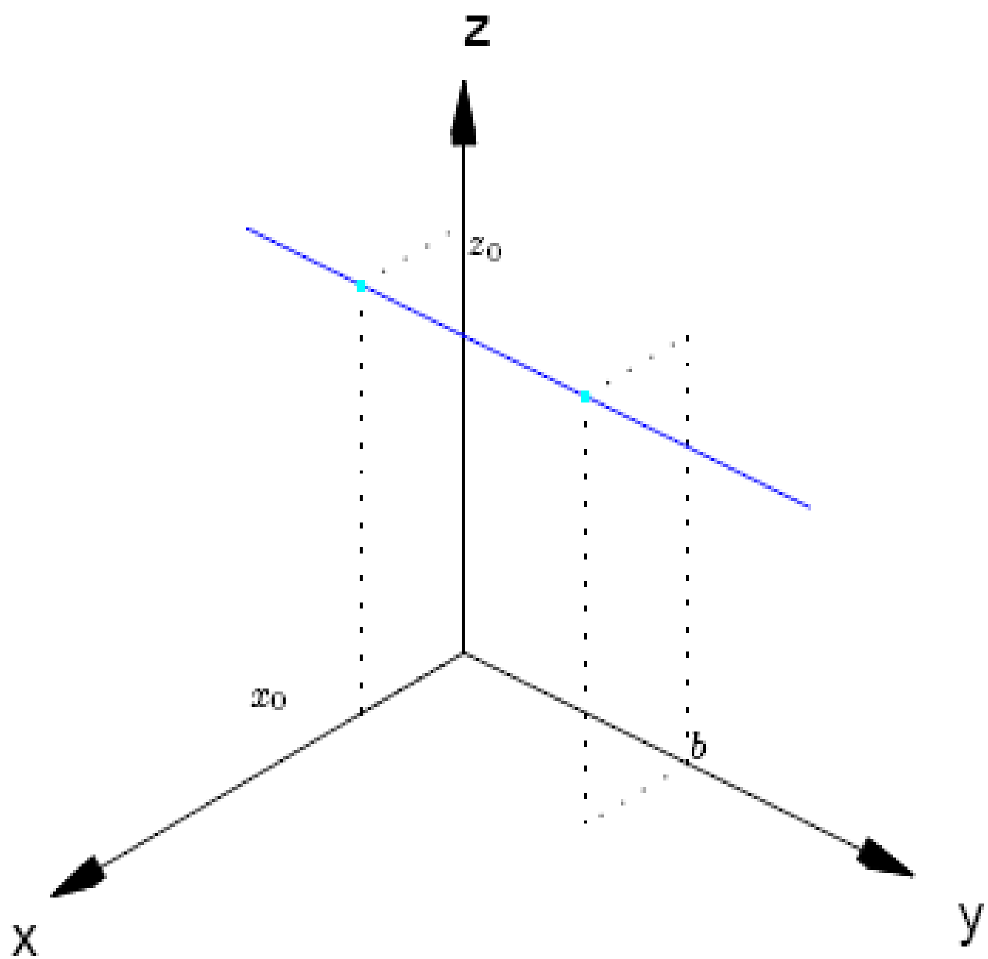


Casos particulares das equações da reta

- Retas paralelas ao eixo *oy*

$$r:\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = (0, b, 0)$$

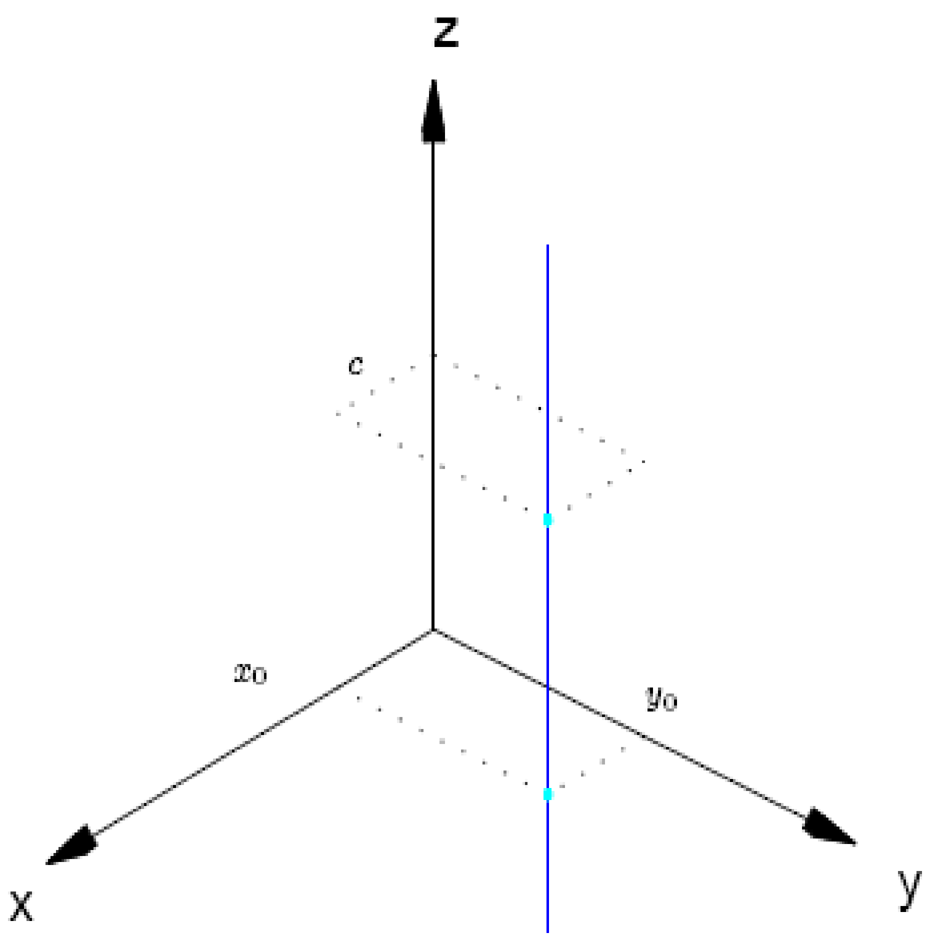


Casos particulares das equações da reta

- Retas paralelas ao eixo *oz*

$$r:\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = (0,0,c)$$

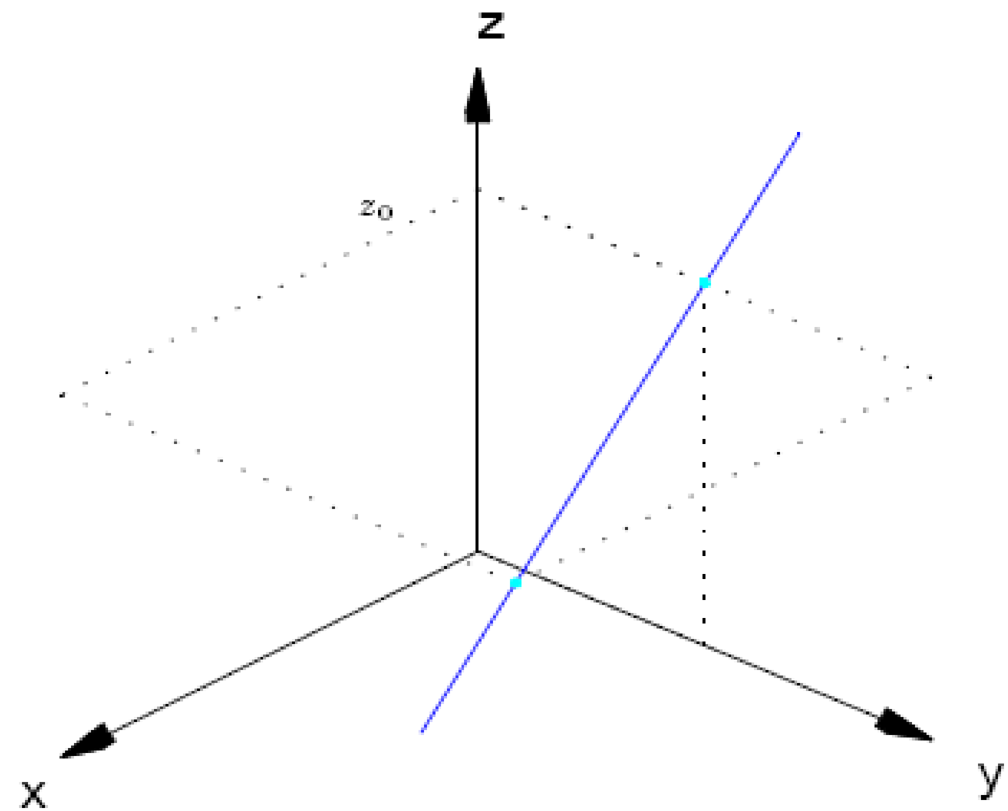


Casos particulares das equações da reta

- Retas paralelas ao plano *xy*

$$r:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = (a, b, 0)$$

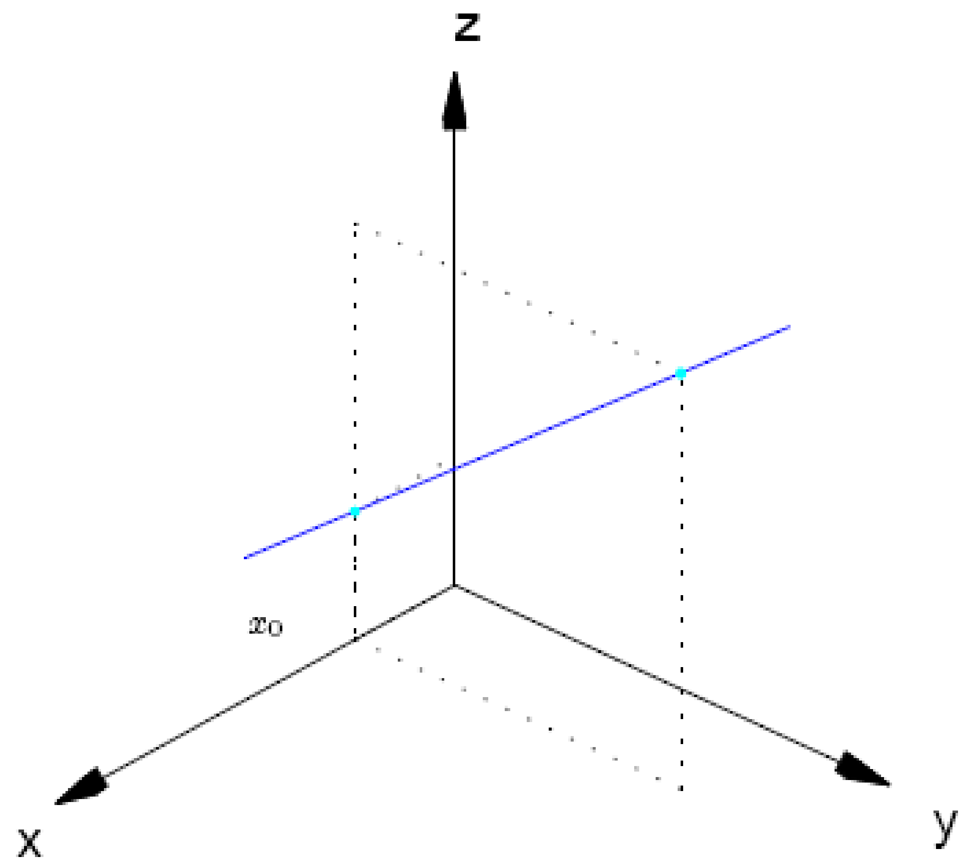


Casos particulares das equações da reta

- Retas paralelas ao plano *yz*

$$r:\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = (0, b, c)$$

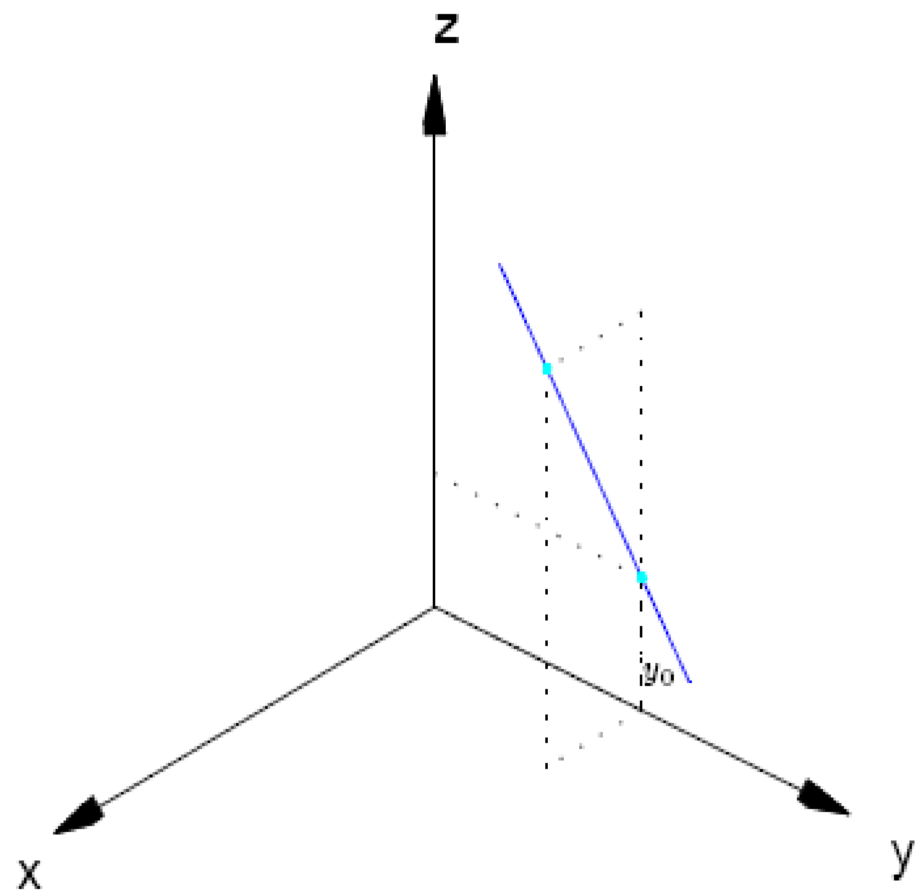


Casos particulares das equações da reta

- Retas paralelas ao plano *xz*

$$r:\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

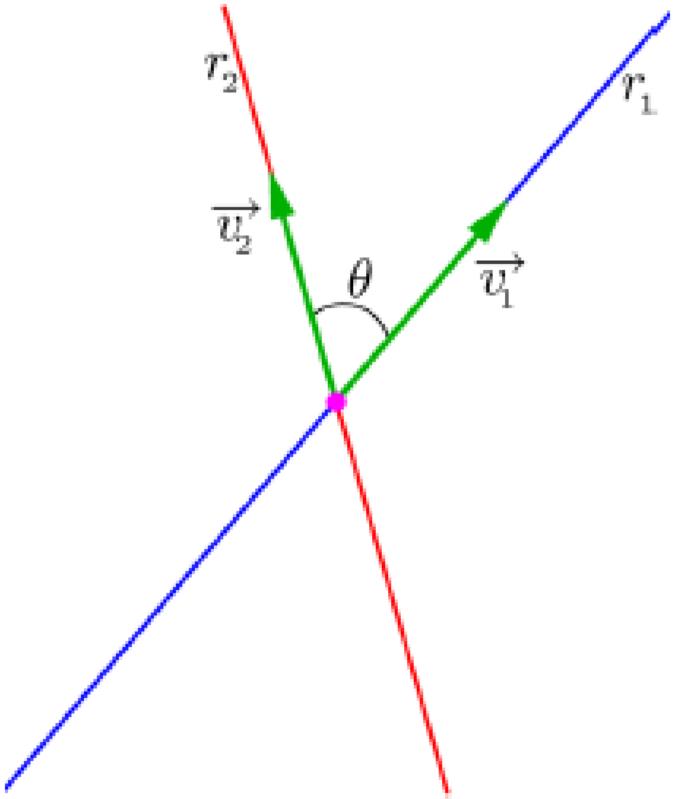
$$\mathbf{v} = (a, 0, c)$$



Ângulo de duas retas

- O ângulo de duas retas r_1 e r_2 é definido como o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2.

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{v}_1.\mathbf{v}_2|}{\|\mathbf{v}_1\|\|\mathbf{v}_2\|}, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$



Exemplo 4.

- Calcular o ângulo entre as retas dadas a seguir:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -t \\ z = -4 - 2t \end{cases}$$

Retas ortogonais e retas paralelas

- Dados $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ os respectivos vetores diretores de r_1 e r_2

$$r_1 \perp r_2 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 . \mathbf{v}_2 = 0 \quad \text{(ortogonais)}$$

$$r_1 \,//\, r_2 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2 \quad \text{(paralelas)}$$

- Duas retas ortogonais podem ser concorrentes ou não. Se forem concorrentes diz-se que são perpendiculares.

Interseção de retas

- Para obter o ponto de interseção de duas retas (distintas), resolve-se o sistema linear obtido igualando-se as componentes de suas respectivas equações paramétricas. Se o sistema apresentar uma única solução, a interseção existe; se não apresentar solução, não existe interseção.

Exemplo 4.

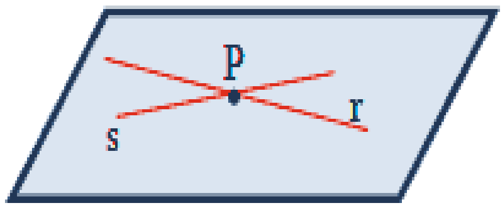
- Determine, se existir, a interseção dos pares de retas:

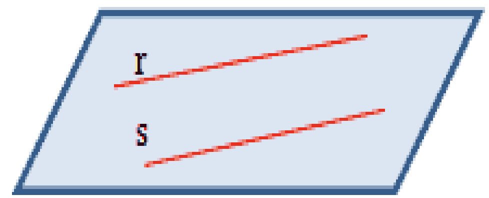
$$a)r_1:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \text{ e } r_2:\begin{cases} x = 3 + 2h \\ y = 4 + 6h \\ z = 4h \end{cases}$$

$$b)r_1:\begin{cases} x = 1 + t \\ y - 3 + 2t \\ z = t \end{cases} \text{ e } r_2:\begin{cases} x = 5 + h \\ y = 5 - h \\ z = 3 + 2h \end{cases}$$

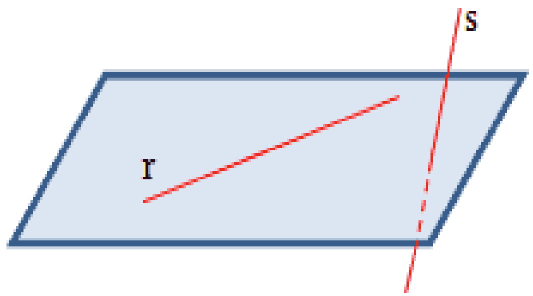
Posição relativa de duas retas

- Duas retas do espaço são coplanares quando ambas estão contidas em um mesmo plano. Neste caso, podem ser coincidentes, paralelas ou concorrentes.





- Quando não existe um plano que as contém, as retas são ditas reversas.



Posição relativa de duas retas

- Para determinar a posição relativa de duas retas no espaço deve-se comparar suas direções, dada pelos seus respectivos vetores diretores e verificar a existência de intersecção.

$$\mathbf{v}_1 = \alpha \mathbf{v}_2 \Rightarrow \begin{cases} \textit{paralelas} \text{ (sem interseção)} \\ \textit{coincidentes} \text{ (com interseção)} \end{cases}$$

$$\mathbf{v}_1 \neq \alpha \mathbf{v}_2 \Rightarrow \begin{cases} \textit{reversas} \text{ (sem interseção)} \\ \textit{concorrentes} \text{ (com interseção)} \end{cases}$$