2 Revisão

VERIFICAÇÃO DE CONCEITOS

1. Explique o significado de cada um dos limites a seguir e ilustre com um esboço.
   (a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
   (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
   (e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$
2. Descreva as várias situações para que um limite possa não existir. Ilustre-as com uma figura.
3. Enuncie cada uma das seguintes Leis do Limite.
   (a) Lei da Soma (b) Lei da Diferença
   (c) Lei do Múltiplo Constante (d) Lei do Produto
   (e) Lei do Quociente (f) Lei da Potência
   (g) Lei da Raiz
4. O que afirma o Teorema do Confronto?
5. (a) O que significa dizer que uma reta $x = a$ é uma assíntota vertical da curva $y = f(x)$? Trace as curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.
   (b) O que significa dizer que uma reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$? Trace as curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.
6. Quais das curvas a seguir têm assíntotas verticais? E horizontais?
   (a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$ (c) $y = \operatorname{tg} x$
   (d) $y = \operatorname{tg}^{-1} x$ (e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$
   (g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$
7. (a) Qual o significado de f ser contínua em a?
   (b) Qual o significado de f ser contínua em intervalos $(-\infty, \infty)$? Nesse caso, o que se pode dizer sobre o gráfico de f?
8. O que afirma o Teorema do Valor Intermediário?
9. Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.
10. Considere um objeto movendo-se ao longo de uma reta com a posição dada por $f(t)$ no instante t. Escreva uma expressão para a velocidade instantânea do objeto em $t = a$. Como pode ser interpretada essa velocidade em termos do gráfico de f?
11. Se $y = f(x)$ e x variar de x_1 a x_2, escreva uma expressão para o seguinte.
    (a) Taxa média de variação de y em relação a x no intervalo $[x_1, x_2]$.
    (b) Taxa instantânea de variação de y em relação a x em $x = x_1$.
12. Defina a derivada $f'(a)$. Discuta as duas maneiras de interpretar esse número.
13. (a) O que significa f ser diferenciável em a?
    (b) Que relação subsiste entre diferenciabilidade e continuidade de uma função?
    (c) Esboce o gráfico de uma função que é contínua, mas que não é diferenciável em $a = 2$.
14. Descreva as várias situações para que uma função não seja diferenciável. Ilustre-as com figuras.

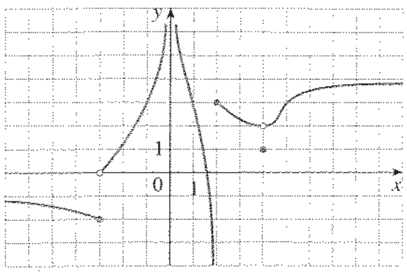
TESTES FALSO-VERDADEIRO

Determine se o que está estabelecido é falso ou verdadeiro. Se verdadeiro, explique por quê. Se falso, explique por que ou dê um contra-exemplo do que está estabelecido.

1. $\lim_{x \to 4}\left(\dfrac{2x}{x-4} - \dfrac{8}{x-4}\right) = \lim_{x \to 4} \dfrac{2x}{x-4} - \lim_{x \to 4} \dfrac{8}{x-4}$
2. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 6x - 7}{x^2 + 5x - 6} = \dfrac{\lim_{x \to 1}(x^2 + 6x - 7)}{\lim_{x \to 1}(x^2 + 5x - 6)}$
3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 3}{x^2 + 2x - 4} = \dfrac{\lim_{x \to 1}(x - 3)}{\lim_{x \to 1}(x^2 + 2x - 4)}$
4. Se $\lim_{x \to 5} f(x) = 2$ e $\lim_{x \to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to 5}[f(x)/g(x)]$ não existe.
5. Se $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$ e $\lim_{x \to 5} g(x) = 0$, então $\lim_{x \to 5}[f(x)/g(x)]$ não existe.
6. Se $\lim_{x \to 6} f(x)g(x)$ existe, então o limite deve ser $f(6)g(6)$.
7. Se p for um polinômio, então $\lim_{x \to b} p(x) = p(b)$.
8. Se $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ e $\lim_{x \to 0} g(x) = \infty$, então $\lim_{x \to 0}[f(x) - g(x)] = 0$.
9. Uma função pode ter duas assíntotas horizontais distintas.
10. Se f em domínio $[0, \infty]$ e não possui assíntota horizontal, então $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ ou $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$
11. Se a reta $x = 1$ for uma assíntota vertical de $y = f(x)$, então f não está definida em 1.
12. Se $f(1) > 0$ e $f(3) < 0$, então existe um número c entre 1 e 3 tal que $f(c) = 0$.
13. Se f for contínua em 5 e $f(5) = 2$ e $f(4) = 3$, então $\lim_{x \to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.
14. Se f for contínua em $[-1, 1]$ e $f(-1) = 4$ e $f(1) = 3$, então existe um número r tal que $|r| < 1$ e $f(r) = \pi$.
15. Seja f uma função tal que $\lim_{x \to 0} f(x) = 6$. Então existe um número δ tal que, se $0 < |x| < \delta$, então $|f(x) - 6| < 1$.
16. Se $f(x) > 1$ para todo x e $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe, então $\lim_{x \to 0} f(x) > 1$.
17. Se f for contínua em a, f é diferenciável em a.
18. Se $f'(r)$ existe, então $\lim_{x \to r} f(x) = f(r)$.

EXERCÍCIOS

1. É dado o gráfico de f.
   (a) Encontre cada limite, ou explique por que ele não existe.
   (i) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$
   (iii) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to 4} f(x)$
   (v) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$
   (vii) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (viii) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$
   (b) Estabeleça as equações das assíntotas horizontais.
   (c) Estabeleça as equações das assíntotas verticais.
   (d) Em que números f é descontínua? Explique.



2. Esboce um gráfico de um exemplo de função f que satisfaça as seguintes condições:
   $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -2$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$, $f(0) = -1$,
   $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$,
   $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 4$

3–22 □ Encontre o limite.

3. $\lim_{x \to 1} e^{x^3 - x}$

4. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

5. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

6. $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

7. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(h-1)^3 + 1}{h}$

8. $\lim_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 4}{t^3 - 8}$

9. $\lim_{r \to 9} \dfrac{\sqrt{r}}{(r-9)^4}$

10. $\lim_{v \to 4^+} \dfrac{4 - v}{|4 - v|}$

11. $\lim_{s \to 16} \dfrac{4 - \sqrt{s}}{s - 16}$

12. $\lim_{v \to 2} \dfrac{v^2 + 2v - 8}{v^4 - 16}$

13. $\lim_{x \to 8^-} \dfrac{|x - 8|}{x - 8}$

14. $\lim_{x \to 9^+} \left(\sqrt{x - 9} + [\![x + 1]\!]\right)$

15. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

16. $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x}}{x^2 - 2x}$

17. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1 + 2x - x^2}{1 - x + 2x^2}$

18. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{5x^3 - x^2 + 2}{2x^3 + x - 3}$

19. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

20. $\lim_{x \to 10^-} \ln(100 - x^2)$

21. $\lim_{x \to \infty} e^{-3x}$

22. $\lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg}(x^3 - x)$

23–24 □ Use os gráficos para descobrir as assíntotas das curvas. E então prove o que você descobriu.

23. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

24. $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}$

25. Se $2x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x^2$ para $0 < x < 3$, encontre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

26. Prove que $\lim_{x \to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

27–30 □ Prove cada uma das igualdades usando a definição precisa de limite.

27. $\lim_{x \to 5} (7x - 27) = 8$

28. $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

29. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x) = -2$

30. $\lim_{x \to 4^+} \dfrac{2}{\sqrt{x - 4}} = \infty$

31. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \\ 3 - x & \text{se } 0 \leqslant x < 3 \\ (x - 3)^2 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

   (a) Calcule cada limite, se ele existir.
   (i) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x \to 0} f(x)$
   (iv) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (v) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ (vi) $\lim_{x \to 3} f(x)$
   (b) Onde f é descontínua?
   (c) Esboce o gráfico de f.

32. Seja

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ 2 - x & \text{se } 2 < x \leqslant 3 \\ x - 4 & \text{se } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

   (a) Para cada um dos números 2, 3 e 4, descubra se g é contínua à esquerda, à direita ou contínua no número.
   (b) Esboce o gráfico de g.

33–34 □ Mostre que a função é contínua em seu domínio. Estabeleça o domínio.

33. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$

34. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2}$

35–36 □ Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação no intervalo dado.

35. $2x^3 + x^2 + 2 = 0$, $(-2, -1)$

36. $e^{-x^2} = x$, $(0, 1)$

37. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = 9 - 2x^2$ no ponto $(2, 1)$.

(b) Encontre uma equação dessa reta tangente.

38. Encontre as equações da reta tangente à curva

$$y = \frac{2}{1 - 3x}$$

nos pontos com a coordenada x, 0 e -1.

39. O deslocamento (em metros) de um objeto movendo-se ao longo de uma reta é dado por $s = 1 + 2t + t^2/4$, onde t é medido em segundos.

(a) Encontre a velocidade média nos seguintes períodos.

(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$

(iii) $[1, 1{,}5]$ (iv) $[1, 1{,}1]$

(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 1$.

40. De acordo com a Lei de Boyle, se a temperatura de um gás confinado for mantida constante, então o produto da pressão P com o volume V é uma constante. Suponha que, para um certo gás, $PV = 800$, onde P é medido em libras por polegada quadrada e V é medido em polegadas cúbicas.

(a) Encontre a taxa de variação média de P quando V aumenta de 200 pol³ para 250 pol³.

(b) Expresse V como uma função de P e mostre que a taxa de variação instantânea de V em relação a P é inversamente proporcional ao quadrado de P.

41. (a) Use a definição de derivada para encontrar $f'(2)$, onde $f(x) = x^3 - 2x$.

(b) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = x^3 - 2x$ no ponto $(2, 4)$.

(c) Ilustre a parte (b) fazendo o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

42. Encontre uma função f e um número a tais que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

43. O custo total de saldar uma dívida a uma taxa de juros de r% ao ano é $C = f(r)$.

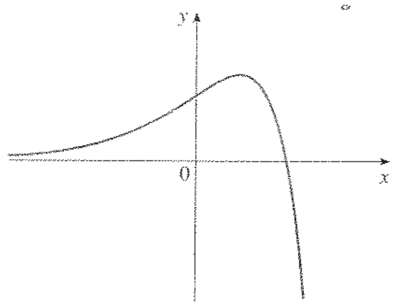
(a) Qual o significado da derivada $f'(r)$? Quais são suas unidades?

(b) O que significa a afirmativa $f'(10) = 1.200$?

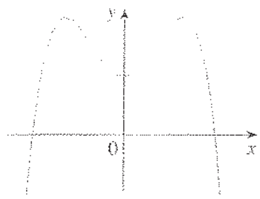
(c) $f'(r)$ é sempre positiva ou muda de sinal?

44–46 □ Trace ou copie o gráfico da função. Então esboce o gráfico de sua derivada.

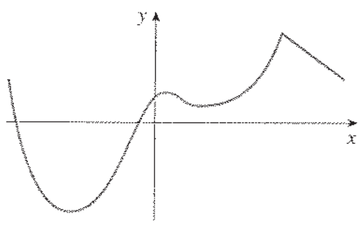
44.



45.



46.



47. (a) Se $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$.

(b) Encontre os domínios de f e f'.

(c) Faça os gráficos na mesma tela de f e f'. Compare os gráficos para ver se sua resposta da parte (a) é razoável.

48. (a) Encontre as assíntotas do gráfico de

$$f(x) = \frac{4 - x}{3 + x}$$

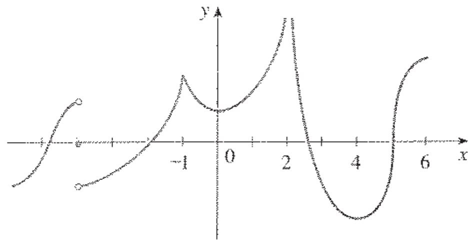
e use-as para esboçar o gráfico.

(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.

(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$.

(d) Use um recurso computacional para fazer o gráfico de f' e compare-o com o esboço da parte (b).

49. É dado o gráfico de f. Estabeleça, com explicações, os números nos quais f não é diferenciável.

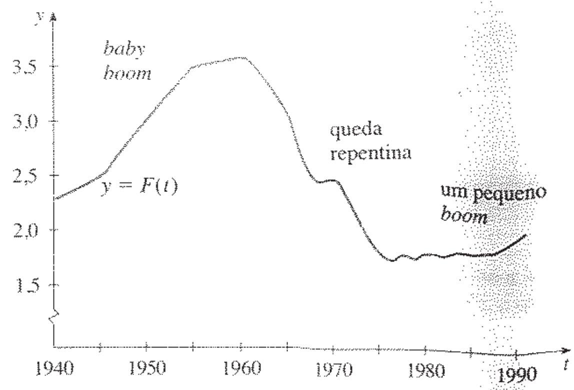


50. A *taxa de fertilidade total* no instante t é denotada por $F(t)$ e é uma estimativa do número médio de crianças nascidas de cada mulher (supondo que a taxa de nascimento corrente permaneça constante). O gráfico da taxa de fertilidade total nos Estados Unidos mostra as flutuações de 1940 a 1990.

(a) Estime os valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ e $F'(1987)$.

(b) Qual o significado dessas derivadas?

(c) Você pode sugerir as razões para os valores dessas derivadas?



51. Seja $B(t)$ o valor total de moeda norte-americana em circulação no instante t. A tabela fornece os valores dessa função de 1980 a 1998, ao fim de cada ano, em bilhões de dólares. Interprete e estime o valor de $B'(1990)$.

t	$B(t)$
1980	124,8
1985	182,0
1990	268,2
1995	401,5
1998	492,2

52. Faça o gráfico da curva $y = (x + 1)/(x - 1)$ e das retas tangentes à curva nos pontos $(2, 3)$ e $(-1, 0)$.

53. Suponha que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo x, onde $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Encontre $\lim_{x \to a} f(x)$.

54. Seja $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

(a) Para quais valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

(b) Em quais números f é descontínua?