Exercício 6.18

Coordenadas dos Nós

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 1.7 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot m \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .6 \end{pmatrix} \cdot m$$

$$C := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot m \qquad D := \begin{pmatrix} 1.125 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot m \qquad E := \begin{pmatrix} 1.125 \\ 0 \\ .6 \end{pmatrix} \cdot m$$

$nN := 5$ Número de nós

$mM := 3 \cdot nN - 6 = 9$ Número de membros ou elos

Definição da força

$$\lambda_F := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F := 850 \cdot N \qquad VF := F \cdot \lambda_F = \begin{pmatrix} 0 \\ -850 \\ 0 \end{pmatrix} N$$

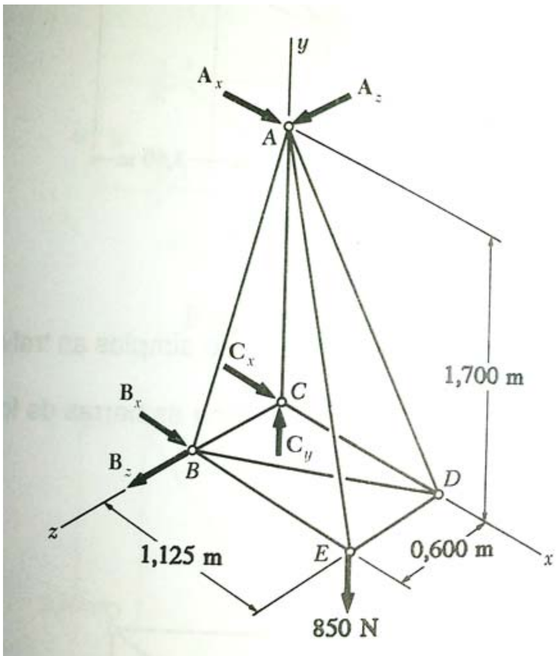

Figura P6.18

Definições vetoriais do elos da treliça

$$BA := A - B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.7 \\ -0.6 \end{pmatrix} m \qquad |BA| = 1.803\,m \qquad \lambda_{BA} := \frac{BA}{|BA|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.943 \\ -0.333 \end{pmatrix}$$

$$CB := B - C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix} m \qquad |CB| = 0.6\,m \qquad \lambda_{CB} := \frac{CB}{|CB|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$CA := A - C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.7 \\ 0 \end{pmatrix} m \qquad |CA| = 1.7\,m \qquad \lambda_{CA} := \frac{CA}{|CA|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$DA := A - D = \begin{pmatrix} -1.125 \\ 1.7 \\ 0 \end{pmatrix} m \qquad |DA| = 2.039\,m \qquad \lambda_{DA} := \frac{DA}{|DA|} = \begin{pmatrix} -0.552 \\ 0.834 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$BD := D - B = \begin{pmatrix} 1.125 \\ 0 \\ -0.6 \end{pmatrix} m \qquad |BD| = 1.275\,m \qquad \lambda_{BD} := \frac{BD}{|BD|} = \begin{pmatrix} 0.882 \\ 0 \\ -0.471 \end{pmatrix}$$

$$CD := D - C = \begin{pmatrix} 1.125 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m \qquad |CD| = 1.125\,m \qquad \lambda_{CD} := \frac{CD}{|CD|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AE := E - A = \begin{pmatrix} 1.125 \\ -1.7 \\ 0.6 \end{pmatrix} m \qquad |AE| = 2.125\,m \qquad \lambda_{AE} := \frac{AE}{|AE|} = \begin{pmatrix} 0.529 \\ -0.8 \\ 0.282 \end{pmatrix}$$

$$BE := E - B = \begin{pmatrix} 1.125 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m \qquad |BE| = 1.125\,m \qquad \lambda_{BE} := \frac{BE}{|BE|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$DE := E - D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix} m \qquad |DE| = 0.6\,m \qquad \lambda_{DE} := \frac{DE}{|DE|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vetores das componentes cartesianas das reações

$$\lambda_{Ax} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{Bx} := \lambda_{Ax} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{Cx} := \lambda_{Ax} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{Cy} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{Az} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{Bz} := \lambda_{Az} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Determinação dos esforços externos a treliça

$R_{Ax} + R_{Bx} + R_{Cx} = 0$ Somatório de forças na direção X

$R_{Cy} + F = 0$ $R_{Cy} := F = 850\,N$ Somatório de forças da direção Y

$R_{Bz} = -R_{Az}$ Somatório de forças na direção Z

$$\sum M_C = 0$$

$r_{CE} := E - C = \begin{pmatrix} 1.125 \\ 0 \\ 0.6 \end{pmatrix} m$ Raio de C para E apenas para o calculo do equilibrio externo da trelição, ou seja não é um membro da treliça

$$\left(CA \times \lambda_{Az}\right)\cdot R_{Az} + \left(CB \times \lambda_{Bx}\right)\cdot R_{Bx} + \left(CA \times \lambda_{Ax}\right)\cdot R_{Ax} + r_{CE} \times VF = 0$$

$$CA \times \lambda_{Az} = \begin{pmatrix} 1.7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m \qquad CB \times \lambda_{Bx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.6 \\ 0 \end{pmatrix} m \qquad CA \times \lambda_{Ax} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1.7 \end{pmatrix} m \qquad r_{CE} \times VF = \begin{pmatrix} 510 \\ 0 \\ -956.25 \end{pmatrix} N\cdot m$$

$$\begin{pmatrix} 1.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & -1.7 \end{pmatrix}\cdot m\cdot \begin{pmatrix} R_{Az} \\ R_{Bx} \\ R_{Ax} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -510 \\ 0 \\ 956.25 \end{pmatrix} N\cdot m$$

$$R_{Az} := \frac{-510N\cdot m}{1.7m} = -300\,N \qquad R_{Bz} := -R_{Az} = 300\,N$$

$$R_{Bx} := 0\cdot N$$

$$R_{Ax} := \frac{956.25N\cdot m}{-1.7m} = -562.5\,N \qquad R_{Cx} := -R_{Ax} - R_{Bx} = 562.5\,N$$

$R_A := R_{Ax}\cdot\lambda_{Ax} + R_{Az}\cdot\lambda_{Az} = \begin{pmatrix} -562.5 \\ 0 \\ -300 \end{pmatrix} N$ Reações em A

$R_B := R_{Bx}\cdot\lambda_{Bx} + R_{Bz}\cdot\lambda_{Bz} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} N$ Reações em B

$R_C := R_{Cx}\cdot\lambda_{Cx} + R_{Cy}\cdot\lambda_{Cy} = \begin{pmatrix} 562.5 \\ 850 \\ 0 \end{pmatrix} N$ Reações em C

Determinação das forças internas da treliça:

$$\sum F_E = 0 \qquad F_{BE}\cdot\lambda_{BE} + F_{AE}\cdot\lambda_{AE} + F_{DE}\cdot\lambda_{DE} + VF = 0$$ Somatório de forças no nó E

$$\lambda_{BE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{AE} = \begin{pmatrix} 0.529 \\ -0.8 \\ 0.282 \end{pmatrix} \quad \lambda_{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad VF = \begin{pmatrix} 0 \\ -850 \\ 0 \end{pmatrix} N$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{BE_1} & \lambda_{AE_1} & \lambda_{DE_1} \\ \lambda_{BE_2} & \lambda_{AE_2} & \lambda_{DE_2} \\ \lambda_{BE_3} & \lambda_{AE_3} & \lambda_{DE_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{BE} \\ F_{AE} \\ F_{DE} \end{pmatrix} = -VF \qquad \begin{pmatrix} \lambda_{BE_1} & \lambda_{AE_1} & \lambda_{DE_1} \\ \lambda_{BE_2} & \lambda_{AE_2} & \lambda_{DE_2} \\ \lambda_{BE_3} & \lambda_{AE_3} & \lambda_{DE_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.529 & 0 \\ 0 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0.282 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{BE} \\ F_{AE} \\ F_{DE} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda_{BE_1} & \lambda_{AE_1} & \lambda_{DE_1} \\ \lambda_{BE_2} & \lambda_{AE_2} & \lambda_{DE_2} \\ \lambda_{BE_3} & \lambda_{AE_3} & \lambda_{DE_3} \end{pmatrix}^{-1} \cdot -VF = \begin{pmatrix} 562.5 \\ -1.063 \times 10^3 \\ 300 \end{pmatrix} N$$ Módulos de F.BE, F.Ae e F.DE

Compressão porque o módulo positivo mostra que a direção do Vetor λ.BE e λ.DE empurrando o nó estavam corretos, mas a intensidade F.AE com resultado negativo mostra que o vetor λ.AE nã realidade puxa nó

$$VF_{BE} := F_{BE}\cdot\lambda_{BE} = \begin{pmatrix} 562.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} N$$ Compressão

$$VF_{AE} := F_{AE}\cdot\lambda_{AE} = \begin{pmatrix} -562.5 \\ 850 \\ -300 \end{pmatrix} N$$ Tração

$$VF_{DE} := F_{DE}\cdot\lambda_{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} N$$ Compressão

$$\sum F_A = 0 \qquad F_{DA}\cdot\lambda_{DA} + F_{CA}\cdot\lambda_{CA} + F_{BA}\cdot\lambda_{BA} + R_A - VF_{AE} = 0$$ Somatório de forças no nó A

$$\lambda_{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.943 \\ -0.333 \end{pmatrix} \quad \lambda_{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_{DA} = \begin{pmatrix} -0.552 \\ 0.834 \\ 0 \end{pmatrix} \quad VF_{AE} - R_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 850 \\ 0 \end{pmatrix} N$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{DA_1} & \lambda_{CA_1} & \lambda_{BA_1} \\ \lambda_{DA_2} & \lambda_{CA_2} & \lambda_{BA_2} \\ \lambda_{DA_3} & \lambda_{CA_3} & \lambda_{BA_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{DA} \\ F_{CA} \\ F_{BA} \end{pmatrix} = VF_{AE} - R_A \qquad \begin{pmatrix} \lambda_{DA_1} & \lambda_{CA_1} & \lambda_{BA_1} \\ \lambda_{DA_2} & \lambda_{CA_2} & \lambda_{BA_2} \\ \lambda_{DA_3} & \lambda_{CA_3} & \lambda_{BA_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.552 & 0 & 0 \\ 0.834 & 1 & 0.943 \\ 0 & 0 & -0.333 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{DA} \\ F_{CA} \\ F_{BA} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda_{DA_1} & \lambda_{CA_1} & \lambda_{BA_1} \\ \lambda_{DA_2} & \lambda_{CA_2} & \lambda_{BA_2} \\ \lambda_{DA_3} & \lambda_{CA_3} & \lambda_{BA_3} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left(VF_{AE} - R_A\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 850 \\ 0 \end{pmatrix} N$$ Módulos de F.DA, F.CA e F.BA

As barras F.DA e F.BA não tem carga, F.CA tem carga compressiva de acordo co o sentido de λ.CA empurranto o nó

$$VF_{DA} := F_{DA} \cdot \lambda_{DA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} N$$ Sem carga

$$VF_{CA} := F_{CA} \cdot \lambda_{CA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 850 \\ 0 \end{pmatrix} N$$ Compressão

$$VF_{BA} := F_{BA} \cdot \lambda_{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} N$$ Sem Carga

$$\sum F_D = 0 \qquad F_{CD} \cdot \lambda_{CD} + F_{BD} \cdot \lambda_{BD} - VF_{DE} = 0$$

$$\lambda_{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{BD} = \begin{pmatrix} 0.882 \\ 0 \\ -0.471 \end{pmatrix} \qquad VF_{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} N$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{CD_1} & \lambda_{BD_1} \\ \lambda_{CD_3} & \lambda_{BD_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{CD} \\ F_{BD} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} VF_{DE_1} \\ VF_{DE_3} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_{CD_1} & \lambda_{BD_1} \\ \lambda_{CD_3} & \lambda_{BD_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.882 \\ 0 & -0.471 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{CD} \\ F_{BD} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda_{CD_1} & \lambda_{BD_1} \\ \lambda_{CD_3} & \lambda_{BD_3} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} VF_{DE_1} \\ VF_{DE_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 562.5 \\ -637.5 \end{pmatrix} N$$ Módulos de F.CD e F.BD

A barras F.CD esta em compressão já que seu vetor λ.Cd empurra o nó D e F.BD esta em tração já que o vetor λ.BD está invertido, logo puxando o nó

$$VF_{CD} := F_{CD} \cdot \lambda_{CD} = \begin{pmatrix} 562.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} N$$ Compressão

$$VF_{BD} := F_{BD} \cdot \lambda_{BD} = \begin{pmatrix} -562.5 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} N$$ Tração

$$\sum F_C = 0 \qquad F_{CB} \cdot \lambda_{CB} - VF_{CA} - VF_{CD} + R_C = 0$$

$$\lambda_{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad VF_{CA} + VF_{CD} - R_C = \begin{pmatrix} 1.137 \times 10^{-13} \\ -2.274 \times 10^{-13} \\ 0 \end{pmatrix} N$$

$$F_{CB} := 0 \qquad VF_{CB} := F_{CB} \cdot \lambda_{CB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Módulo de F.CB sem carga

A barras F.CB está sem carga

Para verificar podemos Fazer o Somatório dos vetores no ponto B

$$VF_{BA} + VF_{CB} + VF_{BE} + VF_{BD} - R_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} N \qquad \text{OK}$$

Resultados:

Barras:

Sem carga:

$F_{BA} = 0\,N \qquad F_{DA} = 0\,N \qquad F_{CB} = 0$

Compressão:

$F_{CA} = 850\,N \qquad F_{BE} = 562.5\,N \qquad F_{DE} = 300\,N \qquad F_{CD} = 562.5\,N$

Tração:

$\left|F_{AE}\right| = 1.063 \times 10^3\,N \qquad \left|F_{BD}\right| = 637.5\,N$

Reações:

Empurrando:

$$R_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} N$$

$$R_C = \begin{pmatrix} 562.5 \\ 850 \\ 0 \end{pmatrix} N$$

Puxando

$$R_A = \begin{pmatrix} -562.5 \\ 0 \\ -300 \end{pmatrix} N$$