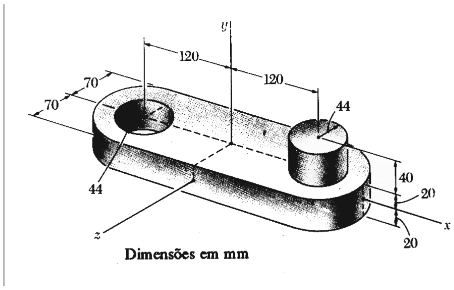
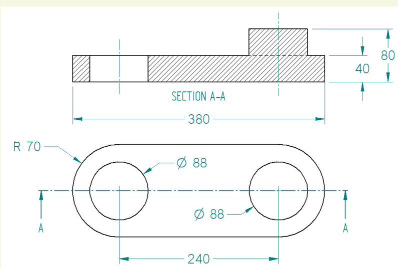
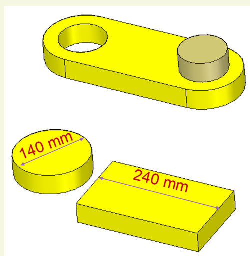
1. Determine o momento de inércia de uma peça de aço apresentada na figura, em relação aos eixos coordenados. O aço tem massa específica de 7.35 Mg/m$^3$.



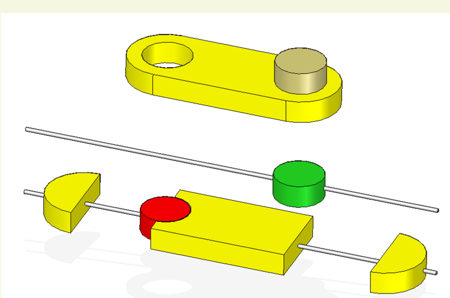

## Resolução



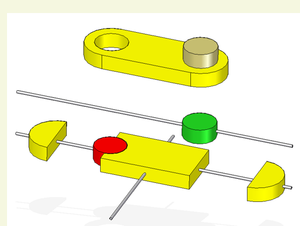

| componente | volume | massa |
|---|---|---|
| | mm$^3$ | kg |
| prisma ret. | $240 \cdot 140 \cdot 40 = 1.344 \times 10^6$ | 9.878 |
| cilindro$_1$ r=70 | $40\pi \left(\frac{140}{2}\right)^2 = 6.158 \times 10^5$ | 2.881 |
| | massa total | 9.465 |
| cilindro$_2$ r=44 | $40\pi \left(\frac{88}{2}\right)^2 = 2.433 \times 10^5$ | 1.788 |

| componente | $I_{\overline{x}}$ | $I_{\overline{y}}$ | $I_{\overline{z}}$ |
|---|---|---|---|
| | kg.mm$^2$ | kg.mm$^2$ | kg.mm$^2$ |
| prisma ret. | $\frac{9.878}{12}(140^2 + 40^2)$ | $\frac{9.878}{12}(240^2 + 140^2)$ | $\frac{9.878}{12}(240^2 + 40^2)$ |
| | $1.745 \times 10^4$ | $6.355 \times 10^4$ | $4.874 \times 10^4$ |
| cilindro$_1$ | $\frac{1}{4}2.881(70^2)$ | $\frac{1}{2}2.881(70^2)$ | $I_x$ |
| | $3.529 \times 10^3$ | $7.058 \times 10^4$ | $3.529 \times 10^3$ |
| cilindro$_2$ | $\frac{1}{4}2.881(44^2)$ | $\frac{1}{2}2.881(44^2)$ | $I_x$ |
| | $1.394 \times 10^3$ | $2.789 \times 10^4$ | $1.394 \times 10^3$ |



$$\begin{aligned} I_x &= I_{prisma} + I_{cil1} - I_{cil2} + I_{Steiner:cil2} \\ &= 1.745 \times 10^4 + 3.529 \times 10^3 - 1.394 \times 10^3 + 1.788 \cdot 40^2 \end{aligned}$$

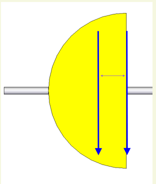
$$\boxed{I_x = 2.24 \times 10^4 \text{kg mm}^2}$$



Cálculo de $I_y$ da metade do cilindro 1 (raio=70 mm), $I_{\frac{1}{2}cil1}$, em relação ao diâmetro do cilindro original:

$$I_{\frac{1}{2}cil1} = \frac{1}{2} 7.058 \times 10^4 \text{kg mm}^2$$

## Resolução

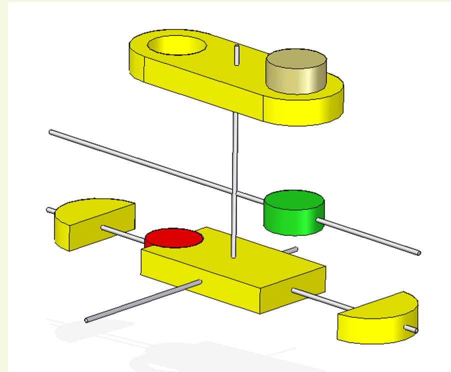


Determinando em relação ao centro de massa do semi cilindro:

$$I_{\frac{1}{2}cil1} = I_{\frac{1}{2}cil1,\overline{y}} + m\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2$$
$$I_{\frac{1}{2}cil1,\overline{y}} = 3.402 \times 10^4 \text{kg mm}^2$$

$$\begin{aligned} I_{Steiner:\frac{1}{2}cil1} &= I_{\frac{1}{2}cil1,\overline{y}} + \frac{2.881}{2}\left(\frac{4\cdot 70}{3\pi} + 120\right)^2 \\ &= 6.630 \times 10^4 \text{kg mm}^2 \\ I_{Steiner:cil2'} &= I_{cil2,\overline{y}} + m120^2 = 2.789 \times 10^4 + 1.788 \cdot 120^2 \\ &= 5.364 \times 10^4 \text{kg mm}^2 \\ I_{Steiner:cil2''} &= I_{cil2,\overline{y}} + m(40^2 + 120^2) \\ &= 2.789 \times 10^4 + 1.788 \cdot (40^2 + 120^2) \\ &= 5.650 \times 10^4 \text{kg mm}^2 \end{aligned}$$

$$I_y = I_{prisma} + 2I_{Steiner:\frac{1}{2}cil1} - I_{Steiner:cil2'} + I_{Steiner:cil2''}$$
$$\boxed{I_y = 1.99 \times 10^5 \text{kg mm}^2}$$



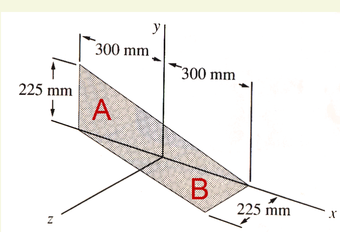
De maneira análoga ao eixo $z$:

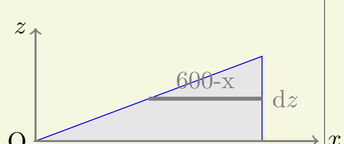
$$I_{\frac{1}{2}cil1} = \frac{1}{2}3.529 \times 10^4 \text{kg mm}^2$$
$$I_{\frac{1}{2}cil1,\overline{z}} = I_{\frac{1}{2}cil1} - \frac{2.881}{2}\left(\frac{4\cdot 70}{3\pi}\right)^2 = 1.637 \times 10^4$$
$$\begin{aligned} I_{Steiner:\frac{1}{2}cil1} &= I_{\frac{1}{2}cil1,\overline{z}} + \frac{2.881}{2}\left(\frac{4\cdot 70}{3\pi} + 120\right)^2 \\ &= 4.866 \times 10^4 \text{kg mm}^2 \end{aligned}$$

$$I_z = I_{prisma} + 2I_{Steiner:\frac{1}{2}cil1}$$
$$\boxed{I_z = 1.4 \times 10^5 \text{kg mm}^2}$$

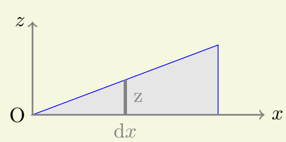
2. Uma lâmina de aço de 0.75 mm de espessura é usada para fazer uma peça apresentada na figura. Sendo a massa específica do aço 7.35 Mg/mm$^3$, determine os momentos de inércia da peça em relação a cada eixo coordenado.

## Resolução




$$I_{xx} = \int_M y^2 + z^2 dm = \overbrace{\int_M y^2 dm}^{A_x} + \overbrace{\int_M z^2 dm}^{B_x} = 2\int_M z^2 dm$$
$$I_{xx} = 2t\rho \int_0^{225} z^2(600 - x)\mathrm{d}z = 6.28 \times 10^3 \text{kg m}^2$$




$$I_{yy} = \int_M x^2 + z^2 dm = \overbrace{\int_M x^2 dm}^{A_y} + \overbrace{\int_M z^2 dm}^{B_y} = 2\int_M x^2 dm$$
$$I_{yy} = 2t\rho \int_0^{600} x^2 z \mathrm{d}x = 1.34 \times 10^5 \text{kg m}^2$$
$$I_{zz} = I_{yy}$$

3. Dado o frustrum cônico de densidade $8\text{Mg/m}^3$, e o hemisfério tem uma densidade de $4\text{Mg/m}^3$. Existe um furo cego de 60 mm de produndidade e 25 mm de raio no centro do frustrum como indicado nas figuras abaixo. Pede-se determinar, utilizando o Teorema de Pappus Guldinus:

   (a) o volume;

   (b) a área total;

   (c) o centro de massa;

   Área da superfície: $A = \theta \overline{r} L$

$A$ Área da revolução;

$\theta$ ângulo da revolução;

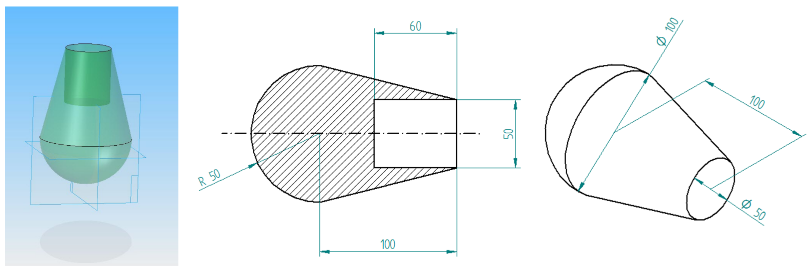
$\overline{r}$ distância perpendicular ao eixo de rev. ao centróide da curva;

Área da superfície: $V = \theta \overline{r} A$

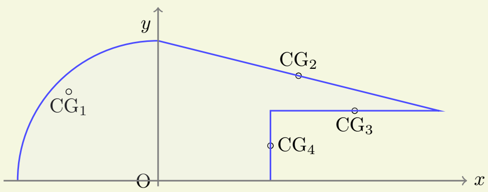
$V$ Volume da revolução;

$\theta$ ângulo da revolução;

$\overline{r}$ distância perpendicular ao eixo de rev. ao centróide da curva;




Resolução

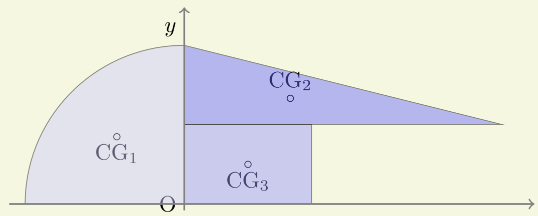



| | CG$_1$ | CG$_2$ | CG$_3$ | CG$_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $l$(mm) | 78.5 | 103.1 | 60 | 25 | $l_{tot} = 2.66 \times 10^2$ |
| $x$(mm) | -31.8 | 50 | 70 | 40 | $\overline{x} = 2.94 \times 10$ |
| $y$(mm) | 31.8 | 37.5 | 25 | 12.5 | $\overline{y} = 3.07 \times 10$ |

A área total:

$$A_{tot} = 2\pi \overline{y} \cdot l_{tot} = 2\pi 3.07 \times 10\ 2.66 \times 10^2 = 1.93 \times 10^3 \text{mm}^2$$

$$\boxed{A_{tot} = 5.13 \times 10^4 \text{mm}^2}$$




| | CG$_1$ | CG$_2$ | CG$_3$ | |
|---|---|---|---|---|
| $A(\text{mm}^2)$ | $1.96 \times 10^3$ | $1.25 \times 10^3$ | $1.0 \times 10^3$ | $A_{tot}$=4.21 $\times 10^3$ |
| $x(\times 10$ mm) | -2.12 | 3.33 | 2 | $\overline{x}$ =4.76$\times 10^{-1}$ |
| $y(\times 10$mm) | 2.12 | 3.33 | 1.25 | $\overline{y}$=2.01 |

O volume total:

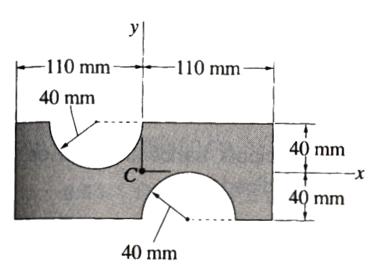
$$V = 2\pi 20.1 \cdot 4.21 \times 10^3$$

$$\boxed{V = 5.31 \times 10^5 \text{mm}^3}$$

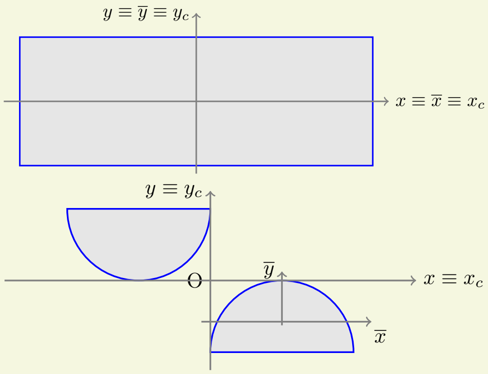
O centro de massa está no eixo de simetria (revolução) $\overline{y} = \overline{z} = 0$ Como o sólido é de revolução, homogêneo e uniforme, a posição $\overline{x}$ pode ser calculado em função dos centro geométricos das áreas que compõe a geratriz.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i A_i \rho_i}{\sum A_i \rho_i} = \frac{-2.12\, 1.96\, 8 \times 10^3 + 3.33\, 1.25\, 4 \times 10^3 + 2\, 1.0\, 4 \times 10^3}{2.47 \times 10^4} = -3.47679 \times 10^{-1} \rightsquigarrow \boxed{\overline{r} = (-3.5, 0, 0)\text{mm}}$$

4. Determine a orientação dos eixos principais baricêntricos e os correspondentes valores dos momentos e produto de inércia da superfície apresentada ao lado, utilizando o círulo de Mohr, e dados $I_{xx}$=6.16 $\times$ $10^6$ mm$^4$ e $I_{yy}$=60.9 $\times$ $10^6$ mm$^4$



Resolução

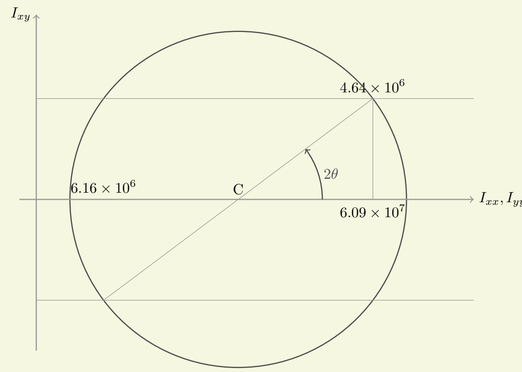



O produto de inércia da superfície é dada pela subtração dos produtos de inércia do retângulo pelo produto de inércia do arranjo de semicírculos, ambos calculados em relação ao eixo $x$ e $y$. Pela simetria, o produto de inércia de área do retângulo é nulo, portanto o produto de inércia da superfície é definido pelo produto de inércia do arranjo de semicírculos.

Para um dos semicírculos, o produto de inércia é calculado:

| $I_{\overline{xy}}$ | $I_{x_c y_c}$ | |
|---|---|---|
| 0 | $I_{\overline{xy}} + (y_c - \overline{y})(x_c - \overline{x})A$ | |
| 0 | $(-40)(1 - \dfrac{4}{3\pi})\dfrac{\pi 40^3}{2}$ | $= -2.32 \times 10^6 \text{mm}^4$ |

Portanto $I_{xy} = 0 - 2(-2.32 \times 10^6) = 4.64 \times 10^6 \text{mm}^4$



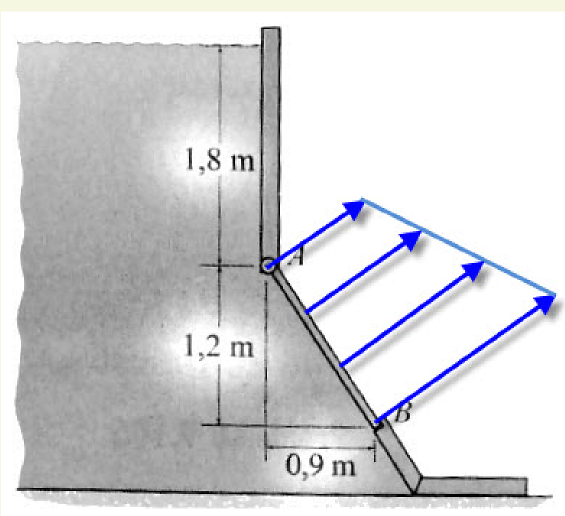

$$\tan 2\theta = \frac{-4.64 \times 10^6}{\frac{60.9-6.19}{2} \times 10^6} \rightsquigarrow \theta = 4.8°$$

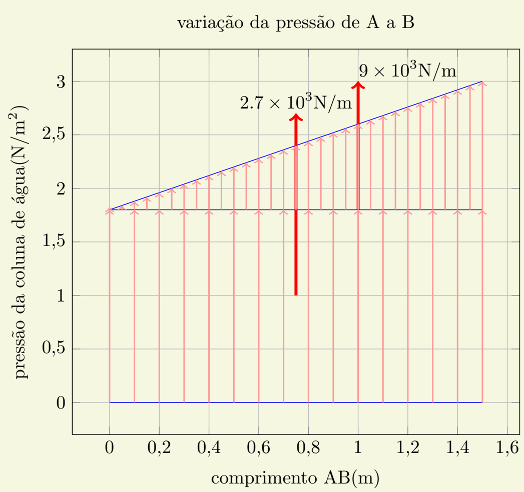
$$I_{uu} = C + R = \frac{60.9 + 6.19}{2} \times 10^6 + \sqrt{(-4.64)^2 + \left(\frac{60.9 - 6.19}{2}\right)^2} \times 10^6 = 6.13 \times 10^7 \text{mm}^4$$

$$I_{vv} = C - R = \frac{60.9 + 6.19}{2} \times 10^6 - \sqrt{(-4.64)^2 + \left(\frac{60.9 - 6.19}{2}\right)^2} \times 10^6 = 5.80 \times 10^6 \text{mm}^4$$

5. Determine a intensidade da força hidrostática atuando sobre a comporta AB, que tem uma largura de 2m. O peso específico da água é $\gamma$=10kN/m$^3$.

Resolução

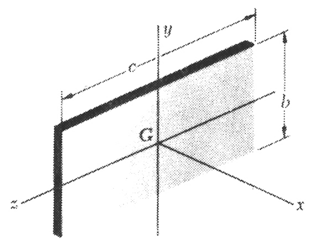
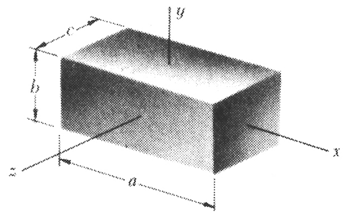
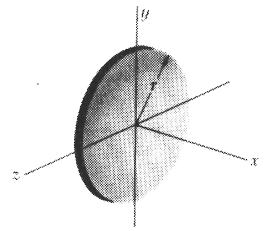
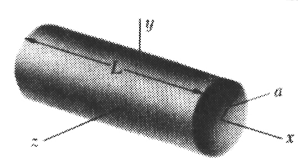


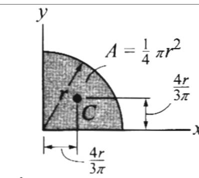




Pressão total : $P_t = (2.7 + 0.9) \times 10^4 = 3.6 \times 10^4$ N/m

A força hidrostática, $F_h$:

$F_h = P_t \cdot Area = (3.6 \times 10^4 \text{ N/m}) \cdot 2\text{m} = 7.2 \times 10^4$ N.

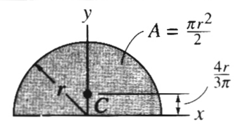
| | | |
|---|---|---|
| **Placa retangular fina** |   | $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$<br>$I_y = \frac{1}{12}mc^2$<br>$I_z = \frac{1}{12}mb^2$ |
| **Prisma retangular** |   | $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$<br>$I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$<br>$I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ |
| **Disco fino** |   | $I_x = \frac{1}{2}mr^2$<br>$I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$ |
| **Cilindro circular** |   | $I_x = \frac{1}{2}ma^2$<br>$I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$ |




$$I_x = \frac{1}{16}\pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$$

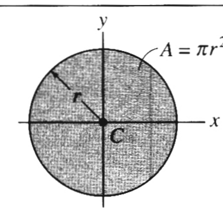
Área de quarto de círculo




$$I_x = \frac{1}{8}\pi r^4$$

$$I_x = \frac{1}{4}\pi r^4$$

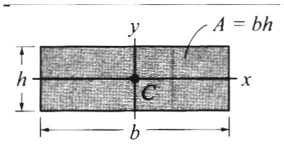
Área de semicírculo




$$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{4}\pi r^4$$

Área do círculo




$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12}hb^3$$

Área do retângulo