

TM 332 - Estática

Emílio Eiji Kavamura, MSc

Departamento de Engenharia Mecânica
UFPR

TM-332, 2012



TÓPICOS

Forças em Vigas

Forças internas nos elementos

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor

Exercícios - Parte 1

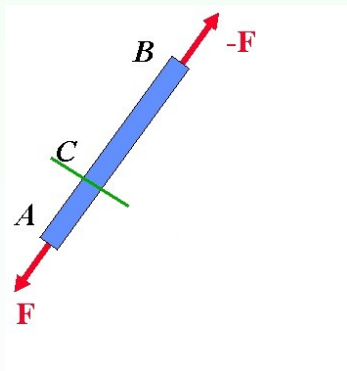
Relações entre Carga, Força cortante e Momento Fletor

Exercícios - Parte 2

Tarefa Mínima

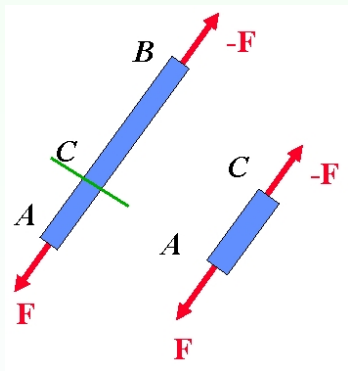


Forças internas nos elementos - forças paralelas e opostas



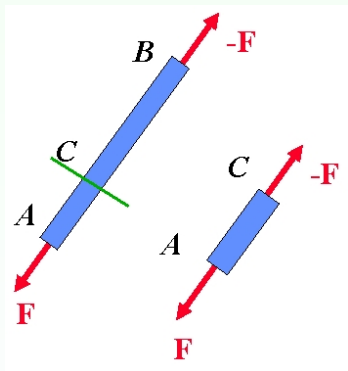
- ▶ Considere uma barra reta AB submetida a duas forças paralelas e opostas em A e B .
- ▶ Cortando o membro AB em C .
 - ▶ desenhando o diagrama de corpo livre da porção AC
 - ▶ as forças internas que existem no membro AB em C são equivalentes as forças axiais $-F$ igual e oposta à F .

Forças internas nos elementos - forças paralelas e opostas



- ▶ Considere uma barra reta AB submetida a duas forças paralelas e opostas em A e B .
- ▶ Cortando o membro AB em C .
 - ▶ desenhando o diagrama de corpo livre da porção AC
 - ▶ as forças internas que existem no membro AB em C são equivalentes as forças axiais $-F$ igual e oposta à F .

Forças internas nos elementos - forças paralelas e opostas



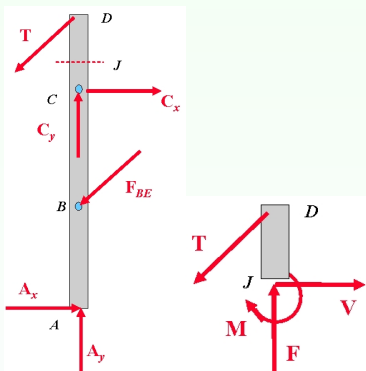
- ▶ Considere uma barra reta AB submetida a duas forças paralelas e opostas em A e B .
- ▶ Cortando o membro AB em C .
 - ▶ desenhando o diagrama de corpo livre da porção AC
 - ▶ as forças internas que existem no membro AB em C são equivalentes as forças axiais $-F$ igual e oposta à F .

Forças internas nos elementos - forças múltiplas

ATENÇÃO

Para um membro onde as forças não estão alinhadas com o eixo, as forças internas se reduzem a um sistema força-binário e não somente a um sistema simples de forças.

Forças internas nos elementos - forças múltiplas



- ▶ Considerando um membro com múltiplas forças em AD ;
- ▶ Cortando-o em J ;
- ▶ Desenhando o diagrama de corpo livre da porção JD ;

Conclui-se que as forças internas em J são equivalentes à um sistema força-binário consistindo de

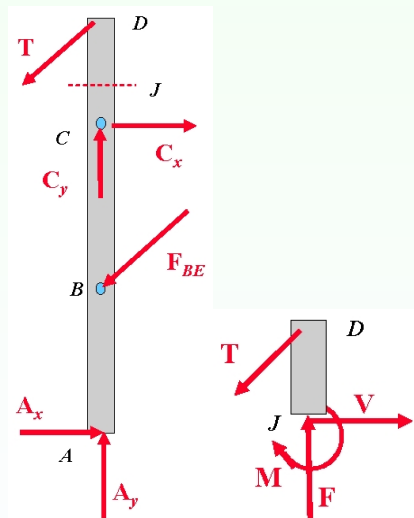
{

 uma força axial \mathbf{F} ,

 uma força cortante \mathbf{V} ,

 um momento fletor \mathbf{M} .

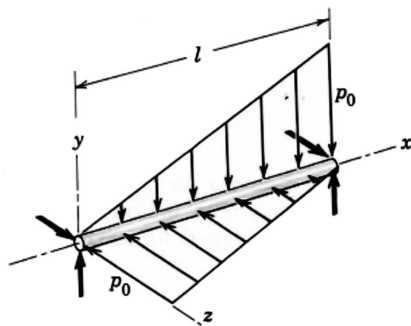
Forças internas no corte



No ponto J :

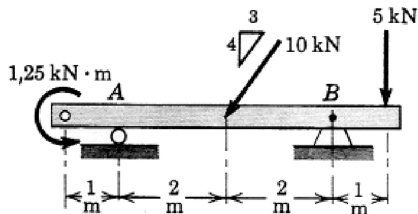
- ▶ A intensidade da força cortante mede o cisalhamento V ,
- ▶ o momento do binário é o momento fletor, M .

DEFINIÇÃO - VIGAS (na Mecânica - Eixos)



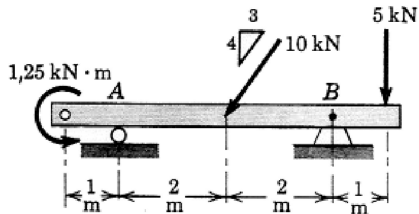
São, usualmente, barras longas prismáticas e retas, projetadas para suportar cargas aplicadas em vários pontos ao longo de seu comprimento.

DEFINIÇÃO - VIGAs (na Mecânica - Eixos)



- ▶ cargas perpendiculares ao eixo da viga causarão somente cisalhamento e flexão;
- ▶ cargas oblíquas com o eixo da viga, produzem também forças axiais.

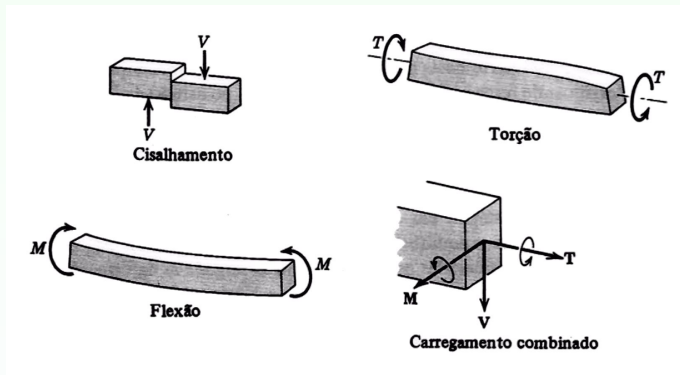
DEFINIÇÃO - VIGAS (na Mecânica - Eixos)



As cargas podem ser:

- ▶ concentradas em pontos específicos,
- ▶ distribuídas ao longo de todo o comprimento, ou
- ▶ apenas em uma porção da viga.

EFEITO DO CARREGAMENTO EM VIGAS



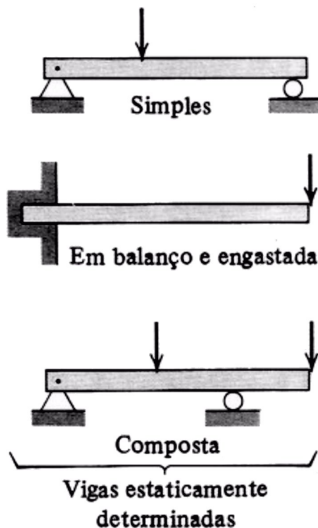
TIPOS DE APOIOS DE VIGAS



Uma viga pode ser suportada de diversas maneiras. Como estamos tratando de vigas estaticamente determinadas, a análise é feita nas vigas

- ▶ simplesmente apoiadas,
- ▶ vigas engastadas, e
- ▶ simplesmente apoiadas com balanço.

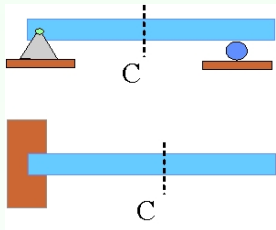
TIPOS DE APOIOS DE VIGAS



Uma viga pode ser suportada de diversas maneiras. Como estamos tratando de vigas estaticamente determinadas, a análise é feita nas vigas

- ▶ simplesmente apoiadas,
- ▶ vigas engastadas, e
- ▶ simplesmente apoiadas com balanço.

PROCEDIMENTO PARA DETERMINAÇÃO DAS FORÇAS INTERNAS



Supondo cargas perpendiculares ao eixo da viga ($\mathbf{N}=\mathbf{0}$).

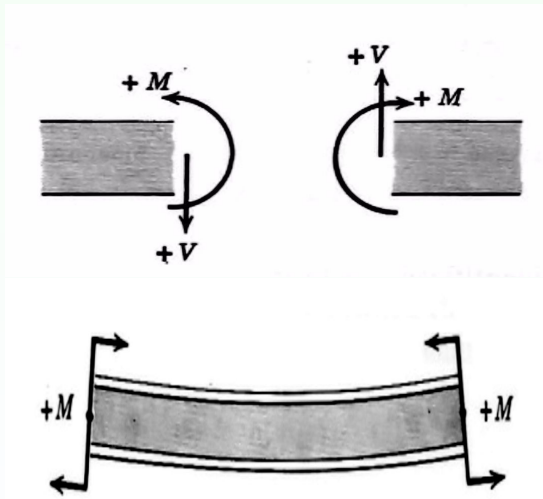
Para obter $\begin{cases} V \\ M \end{cases}$

respectivamente, esforço cortante e o momento fletor em um ponto C da viga:

1. determinamos as reações nos suportes considerando o DCL de toda a viga;
2. cortamos a viga em C ;
3. usamos o DCL de uma das duas porções para determinar V e M .

CONVENÇÃO DE SINAIS

A convenção de sinal para a força cortante positiva e para o momento são mostrados na figura.



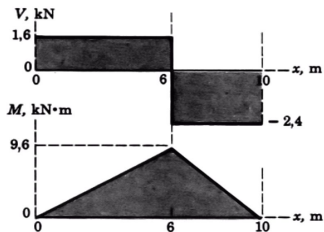
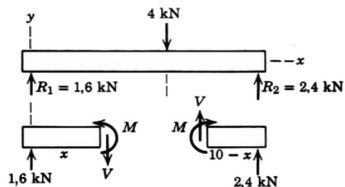
DIAGRAMAS DE FORÇAS INTERNAS

Uma vez que os valores de **V** e **M** são determinados para diversos pontos da viga, portanto é possível esboçar

- ▶ um *diagrama de força cortante* **V**(*x*) e
- ▶ um *diagrama de momento fletor* **M**(*x*)

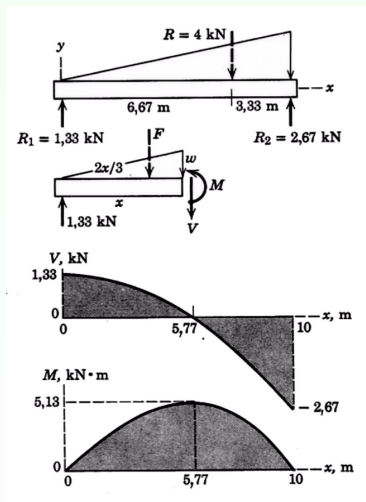
onde *x* é a posição ao longo do eixo da viga.

DIAGRAMAS DE FORÇAS INTERNAS



Exemplo de construção de diagrama de força cortante e momento fletor.

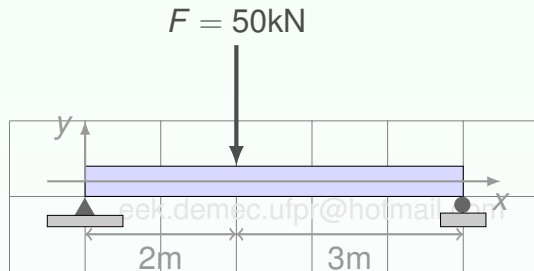
DIAGRAMAS DE FORÇAS INTERNAS



Exemplo de construção de diagrama de força cortante e momento fletor.

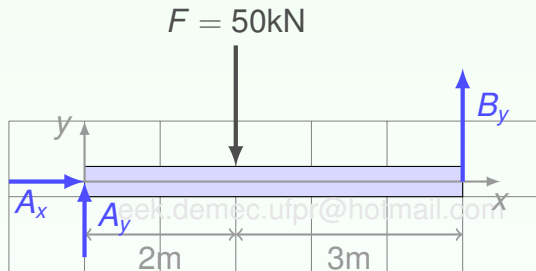
Exemplo de determinação dos diagramas V e M

Determinar os diagramas de esforços cortante e momento fletor para o elemento abaixo representado:



Exemplo de determinação dos diagramas V e M

I- Determinar as reações de apoio;



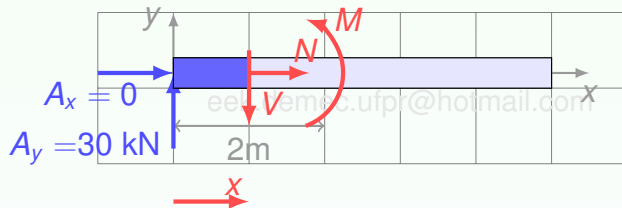
$$\sum F_x = 0 \rightsquigarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \rightsquigarrow -2 \cdot F + 5 \cdot B_y = 0 \rightsquigarrow \boxed{B_y = 20\text{kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightsquigarrow A_y + B_y - 50 = 0 \rightsquigarrow \boxed{A_y = 30\text{kN}}$$

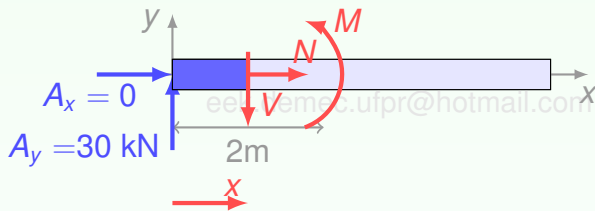
Exemplo de determinação dos diagramas V e M

II- Efetuar o corte;



Exemplo de determinação dos diagramas V e M

III- Estabelecer o equilíbrio.



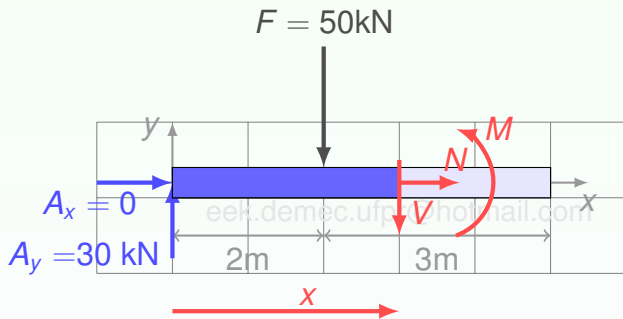
$$\sum F_x = 0 \rightsquigarrow A_x + N = 0 \rightsquigarrow \boxed{N = 0}$$

$$\sum M_x = 0 \rightsquigarrow -xA_y + M = 0 \rightsquigarrow M = xA_y \rightsquigarrow \boxed{M = 30x \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightsquigarrow -A_y + V = 0 \rightsquigarrow \boxed{V = 30 \text{ kN}}$$

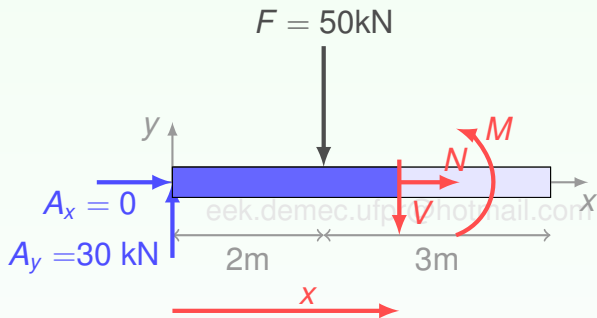
Exemplo de determinação dos diagramas V e M

III- Estabelecer o equilíbrio.



Exemplo de determinação dos diagramas V e M

III- Estabelecer o equilíbrio.



$$\sum F_x = 0 \rightsquigarrow A_x + N = 0 \rightsquigarrow \boxed{N = 0}$$

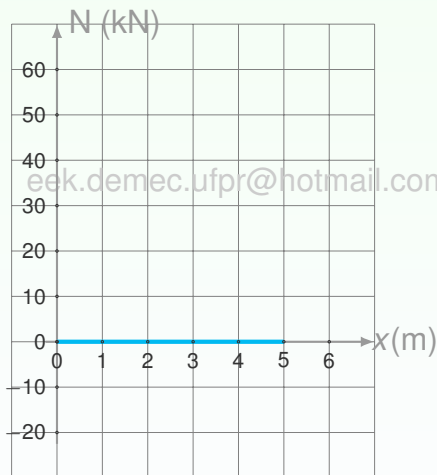
$$\sum M_x = 0 \rightsquigarrow -xA_y + (x - 2)50 + M = 0 \rightsquigarrow \boxed{M = 100 - 20x \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightsquigarrow -A_y + 50 + V = 0 \rightsquigarrow \boxed{V = -20 \text{ kN}}$$

Exemplo de determinação dos diagramas V e M

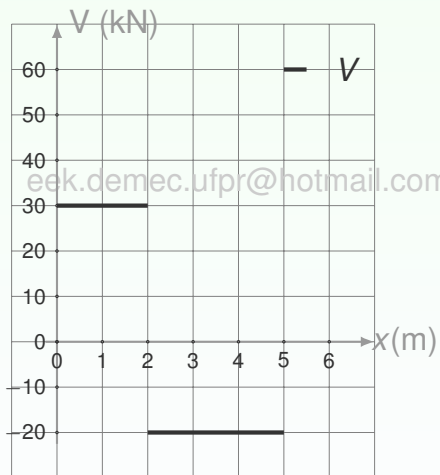
Trecho(m)	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 2$	N	0
	V	30
	M	$30x$
$3 \leq x \leq 5$	N	0
	V	-20
	M	$100 - 20x$

DIAGRAMAS N, V e M - Força concentrada



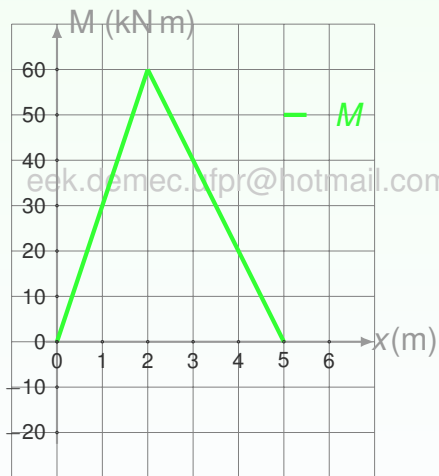
Trecho	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 2$	N	0
	V	30
	M	$30x$
$3 \leq x \leq 5$	N	0
	V	-20
	M	$100-20x$

DIAGRAMAS N, V e M - Força concentrada



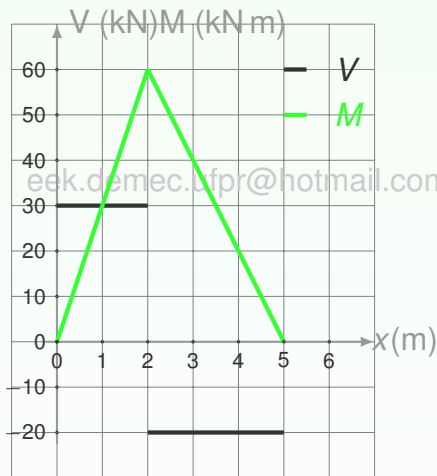
Trecho	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 2$	N	0
	V	30
	M	$30x$
$3 \leq x \leq 5$	N	0
	V	-20
	M	$100-20x$

DIAGRAMAS N, V e M - Força concentrada



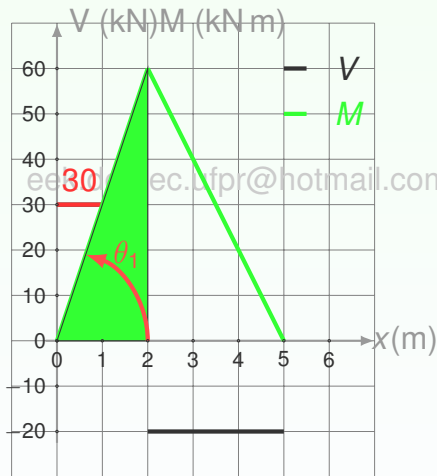
Trecho	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 2$	N	0
	V	30
	M	$30x$
$3 \leq x \leq 5$	N	0
	V	-20
	M	$100-20x$

DIAGRAMAS N, V e M - Força concentrada



Trecho	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 2$	V	30
	M	$30x$
$3 \leq x \leq 5$	V	-20
	M	$100 - 20x$

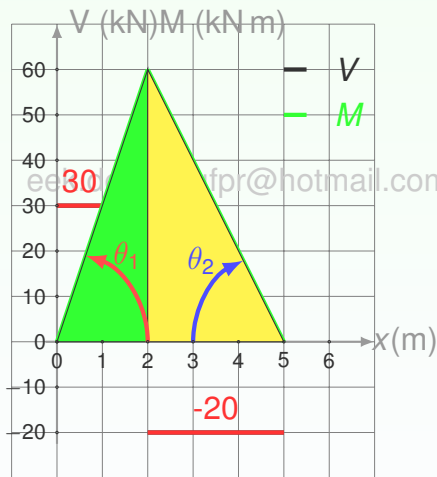
DIAGRAMAS N, V e M - Força concentrada



Trecho	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 2$	V	30
	M	$30x$
$3 \leq x \leq 5$	V	-20
	M	$100 - 20x$

$$\tan \theta_1 = \frac{60 - 0}{2 - 0} = 30$$

DIAGRAMAS N, V e M - Força concentrada

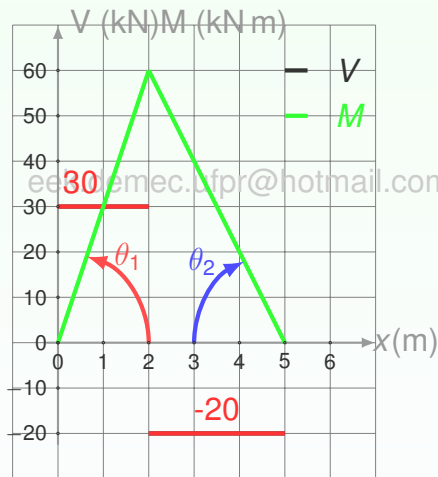


Trecho	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 2$	V	30
	M	$30x$
$3 \leq x \leq 5$	V	-20
	M	$100 - 20x$

$$\tan \theta_1 = \frac{60 - 0}{2 - 0} = 30$$

$$\tan \theta_2 = \frac{60 - 0}{2 - 5} = -20$$

DIAGRAMAS N, V e M - Força concentrada



Trecho	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 2$	V	30
	M	$30x$
$3 \leq x \leq 5$	V	-20
	M	$100 - 20x$

$$\tan \theta_1 = \frac{60 - 0}{2 - 0} = 30$$

$$\tan \theta_2 = \frac{60 - 0}{2 - 5} = -20$$

$$\tan \theta = \frac{dM}{dx}$$

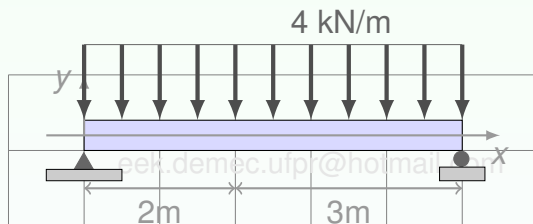
$$V = \frac{dM}{dx}$$



ANÁLISE PARA FORÇA CONCENTRADA

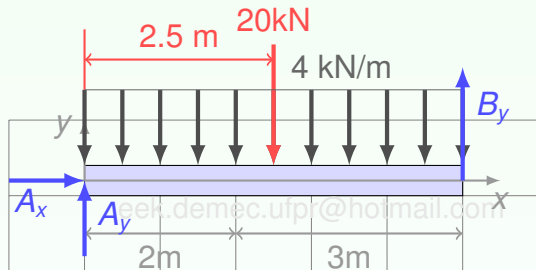
Diagramas N, V e M - carregamento uniforme

Determinar os diagramas de esforços cortante e momento fletor para o elemento abaixo representado:



Diagramas N, V e M - carregamento uniforme

I- Determinar as reações de apoio;



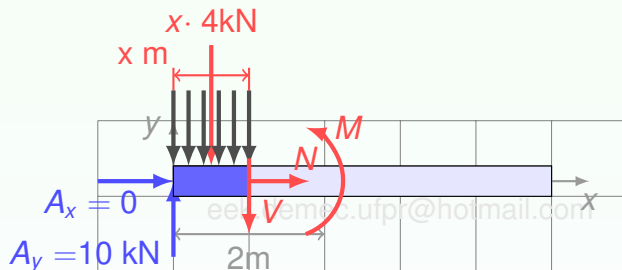
$$\sum F_x = 0 \rightsquigarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \rightsquigarrow -2.5 \cdot (4 \cdot 5) + 5 \cdot B_y = 0 \rightsquigarrow \boxed{B_y = 10 \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightsquigarrow A_y + B_y - 50 = 0 \rightsquigarrow \boxed{A_y = 10 \text{ kN}}$$

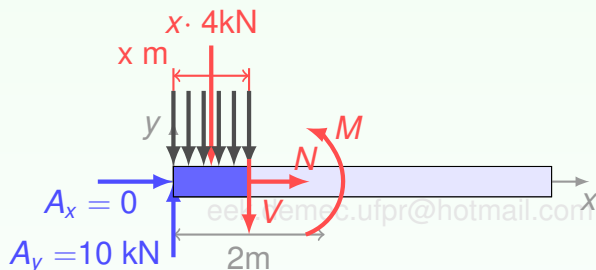
Diagramas N, V e M - carregamento uniforme

II- Efetuar o corte;



Diagramas N, V e M - carregamento uniforme

III- Estabelecer o equilíbrio.



$$\sum F_x = 0 \rightsquigarrow A_x + N = 0 \rightsquigarrow \boxed{N = 0}$$

$$\sum M_x = 0 \rightsquigarrow -xA_y + 4x \frac{x}{2} + M = 0 \rightsquigarrow \boxed{M = 10x - 2x^2 \text{ kNm}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightsquigarrow -A_y + 4 \cdot x + V = 0 \rightsquigarrow \boxed{V = -4x + 10 \text{ kN}}$$

Diagramas N, V e M - carregamento uniforme

Trecho(m)	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 5$	N	0
	V	$-4x+10$
	M	$-2x^2 + 10x$

Diagramas N, V e M - carregamento uniforme

Trecho(m)	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 5$	N	0
	V	$-4x+10$
	M	$-2x^2 + 10x$

$$\tan \theta_1 = \frac{dM}{dx} = V$$

Diagramas N, V e M - carregamento uniforme

Trecho(m)	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 5$	N	0
	V	$-4x+10$
	M	$-2x^2 + 10x$

$$\tan \theta_1 = \frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{dV}{dx} = -4 = -\omega$$

DIAGRAMAS N, V e M - carregamento uniforme

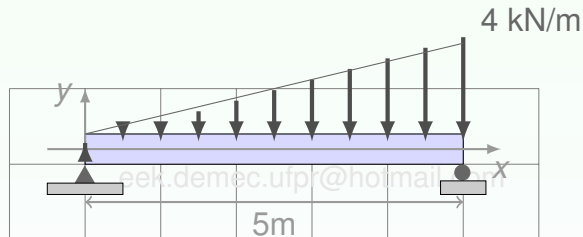
Trecho	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 5$	N	0
	V	$10 - 4x$
	M	$10x - 2x^2$

$$\tan \theta_1 = \frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{dV}{dx} = -4 = -w$$

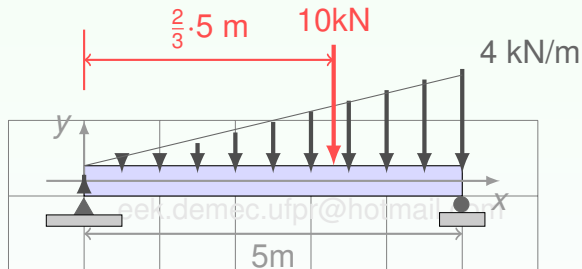
DIAGRAMAS N, V e M - carregamento linear

Determinar os diagramas de esforços cortante e momento fletor para o elemento abaixo representado:



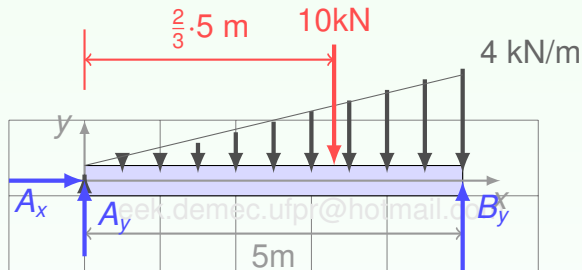
Exemplo de determinação dos diagramas V e M

Força equivalente do carregamento;



Exemplo de determinação dos diagramas V e M

I- Determinar as reações de apoio;



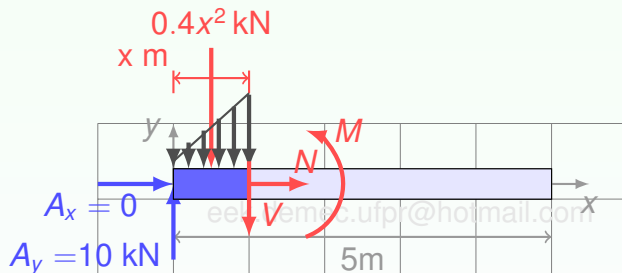
$$\sum F_x = 0 \rightsquigarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \rightsquigarrow -\frac{2}{3} \cdot \frac{(4 \cdot 5)}{2} + 5 \cdot B_y = 0 \rightsquigarrow \boxed{B_y = \frac{4}{3} \text{ kN}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightsquigarrow A_y + B_y - 10 = 0 \rightsquigarrow \boxed{A_y = \frac{26}{3} \text{ kN}}$$

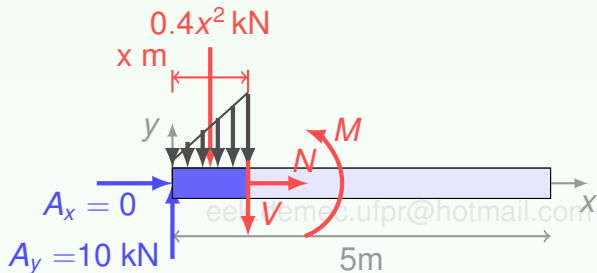
Exemplo de determinação dos diagramas V e M

II- Efetuar o corte;



Exemplo de determinação dos diagramas V e M

III- Estabelecer o equilíbrio.



$$\sum F_x = 0 \rightsquigarrow A_x + N = 0 \rightsquigarrow \boxed{N = 0}$$

$$\sum M_x = 0 \rightsquigarrow -xA_y + \frac{4}{10}x^2 \frac{x}{3} + M = 0 \rightsquigarrow \boxed{M = 10x - \frac{4}{30}x^3 \text{ kNm}}$$

$$\sum F_y = 0 \rightsquigarrow -A_y + \frac{4}{10}x^2 + V = 0 \rightsquigarrow \boxed{V = -\frac{4}{10}x^2 + 10 \text{ kN}}$$



Diagrama de N, V e M

Trecho(m)	Força/ Momento	Equação
$0 \leq x \leq 5$	N	0
	V	$10 - \frac{4}{10}x^2$
	M	$10x - \frac{4}{30}x^3$

$$\tan \theta_1 = \frac{dM}{dx} = V$$

$$\frac{dV}{dx} = -\omega$$

TÓPICOS

Forças em Vigas

Forças internas nos elementos

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor

Exercícios - Parte 1

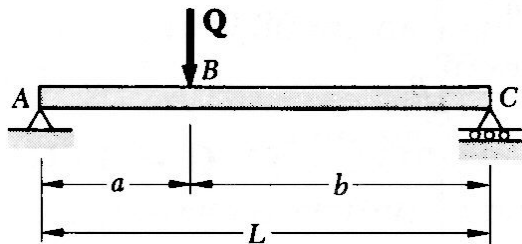
Relações entre Carga, Força cortante e Momento Fletor

Exercícios - Parte 2

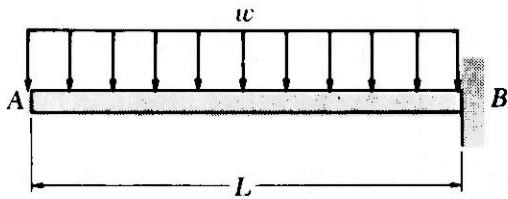
Tarefa Mínima



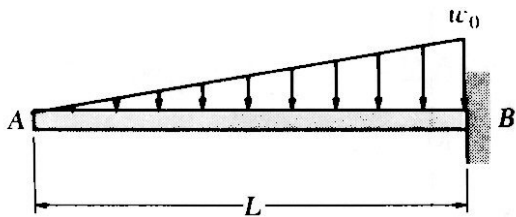
1) Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para as seguintes vigas.



1) Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para as seguintes vigas.



1) Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para as seguintes vigas.



TÓPICOS

Forças em Vigas

Forças internas nos elementos

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor

Exercícios - Parte 1

Relações entre Carga, Força cortante e Momento Fletor

Exercícios - Parte 2

Tarefa Mínima

A construção dos diagramas de força cortante, \mathbf{V} , e de momento Fletor, \mathbf{M} , ficam facilitados se forem utilizadas as seguintes relações:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dx} = -w \quad ; \quad \frac{d\mathbf{M}}{dx} = \mathbf{V}$$

Integrando estes termos:

$V_D - V_C = -(\text{area}^* \text{ sob a curva de carregamento entre } C \text{ and } D)$

$M_D - M_C = \text{area}^* \text{ sob a curva da força cortante entre } C \text{ and } D$

TÓPICOS

Forças em Vigas

Forças internas nos elementos

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor

Exercícios - Parte 1

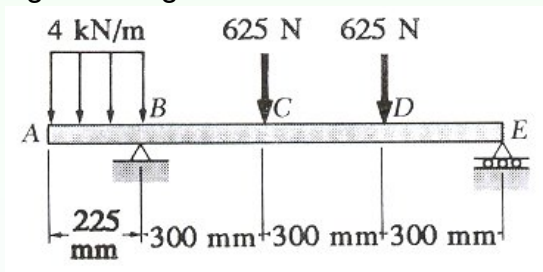
Relações entre Carga, Força cortante e Momento Fletor

Exercícios - Parte 2

Tarefa Mínima

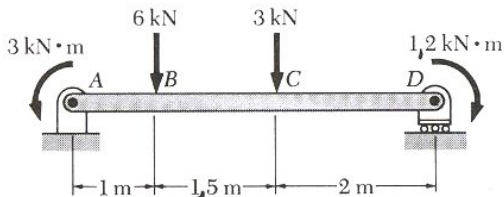


2) Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para as seguintes vigas.



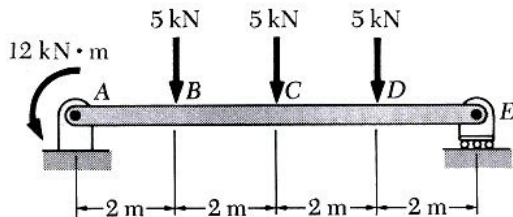
a)

2) Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para as seguintes vigas.



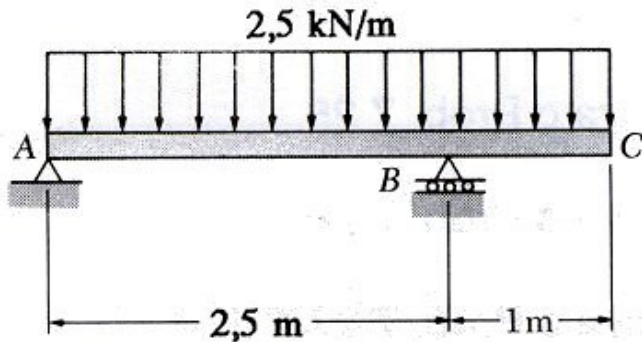
b)

2) Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para as seguintes vigas.



c)

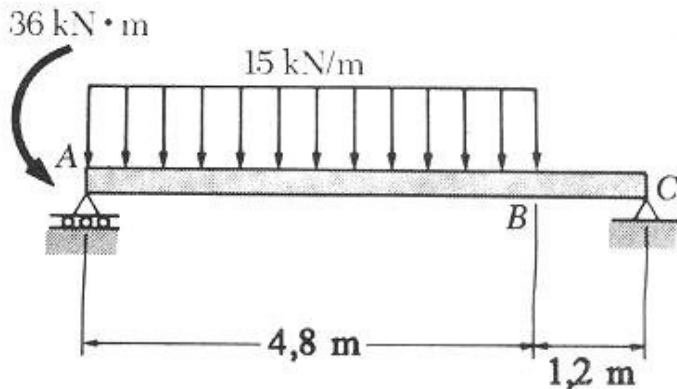
3) Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para as seguintes vigas.



a)

3) Trace os diagramas de força cortante e momento fletor para as seguintes vigas.

b)



TÓPICOS

Forças em Vigas

Forças internas nos elementos

Diagramas de Força Cortante e Momento Fletor

Exercícios - Parte 1

Relações entre Carga, Força cortante e Momento Fletor

Exercícios - Parte 2

Tarefa Mínima

Tarefa mínima

- ▶ Ler e entender os exercícios resolvidos 7.2, 7.3, 7.4, 7.5 e 7.6.
- ▶ Fazer os exercícios propostos:
 - ▶ 7.27;
 - ▶ 7.28;
 - ▶ 7.32;
 - ▶ 7.38;
 - ▶ 7.62;
 - ▶ 7.64;
 - ▶ 7.65;
 - ▶ 7.69;
 - ▶ 7.70.