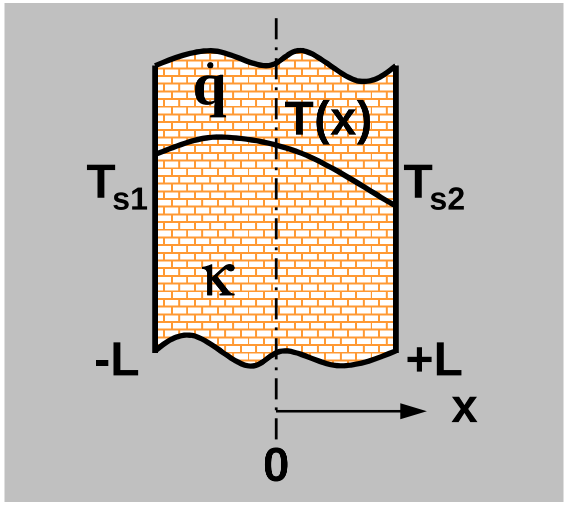
CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.3. Condução de calor com geração de energia térmica

3.3.1. Parede plana, sistema unidimensional, estacionário, com geração de calor uniforme e κ constante



Equação da condução de calor

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{\kappa} = 0$$

Integrando a 1ª vez

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{dT}{dx}\right)dx + \int \frac{\dot{q}}{\kappa}dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dx} + \frac{\dot{q}}{\kappa}x + C_1 = 0$$

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.3.1. Parede plana, sistema unidimensional, estacionário, com geração de calor uniforme e κ constante

Integrando a 2ª vez

$$\int \frac{dT}{dx}dx + \int \frac{\dot{q}}{\kappa}x\,dx + \int C_1 dx = 0$$

$$T + \frac{\dot{q}x^2}{2\kappa} + C_1 x + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = -\frac{\dot{q}x^2}{2\kappa} - C_1 x - C_2} \quad \text{(3.7)}$$

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.3.1. Parede plana, sistema unidimensional, estacionário, com geração de calor uniforme e κ constante

Aplicando as condições de contorno

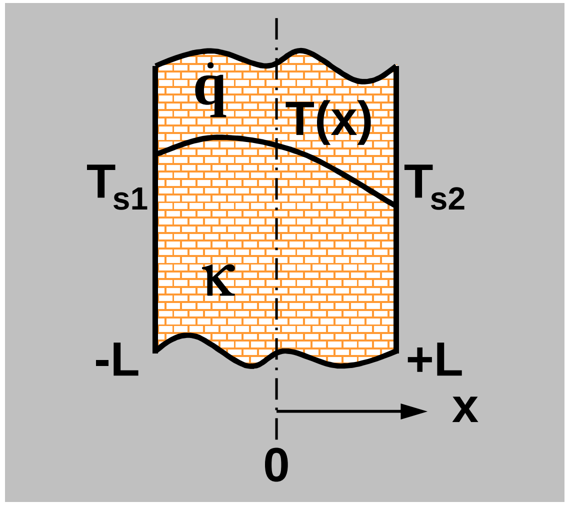
- em *x* = *-L*, $T = T_{s1}$

$$T_{s1} = -\frac{\dot{q}(-L)^2}{2\kappa} - C_1(-L) - C_2$$

$$C_2 = -\frac{\dot{q}L^2}{2\kappa} + C_1L - T_{s1} \qquad (3.8)$$

- em *x* = *+L*, $T = T_{s2}$

$$T_{s2} = -\frac{\dot{q}L^2}{2\kappa} - C_1L - C_2 \qquad (3.9)$$



CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.3.1. Parede plana, sistema unidimensional, estacionário, com geração de calor uniforme e κ constante

(3.8) em (3.9)

$$T_{s2} = -\cancel{\frac{\dot{q}L^2}{2\kappa}} - C_1 L + \cancel{\frac{\dot{q}L^2}{2\kappa}} - C_1 L + T_{s1}$$

$$T_{s2} = -2C_1 L + T_{s1}$$

$$C_1 = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{2L} \qquad (3.10)$$

3.3.1. Parede plana, sistema unidimensional, estacionário, com geração de calor uniforme e κ constante

(3.10) em (3.8)

$$C_2 = -\frac{\dot{q}L^2}{2\kappa} + C_1 L - T_{s1}$$

$$C_2 = -\frac{\dot{q}L^2}{2\kappa} + \frac{T_{s1} - T_{s2}}{2} - T_{s1}$$

$$C_2 = -\frac{\dot{q}L^2}{2\kappa} - \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2} \qquad (3.11)$$

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.3.1. Parede plana, sistema unidimensional, estacionário, com geração de calor uniforme e κ constante

(3.10) e (3.11) em (3.7)

$$T = -\frac{\dot{q}x^2}{2\kappa} - C_1 x - C_2$$

$$T = -\frac{\dot{q}x^2}{2\kappa} - \frac{T_{s1} - T_{s2}}{2L}x + \frac{\dot{q}L^2}{2\kappa} + \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2}$$

$$\boxed{T = \frac{\dot{q}L^2}{2\kappa}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{\left(T_{s2} - T_{s1}\right)}{2}\frac{x}{L} + \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2}} \qquad (3.12)$$

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.3.1. Parede plana, sistema unidimensional, estacionário, com geração de calor uniforme e κ constante

Substituindo (3.12) na lei de Fourier

$$q = -\kappa A \frac{dT}{dx}$$

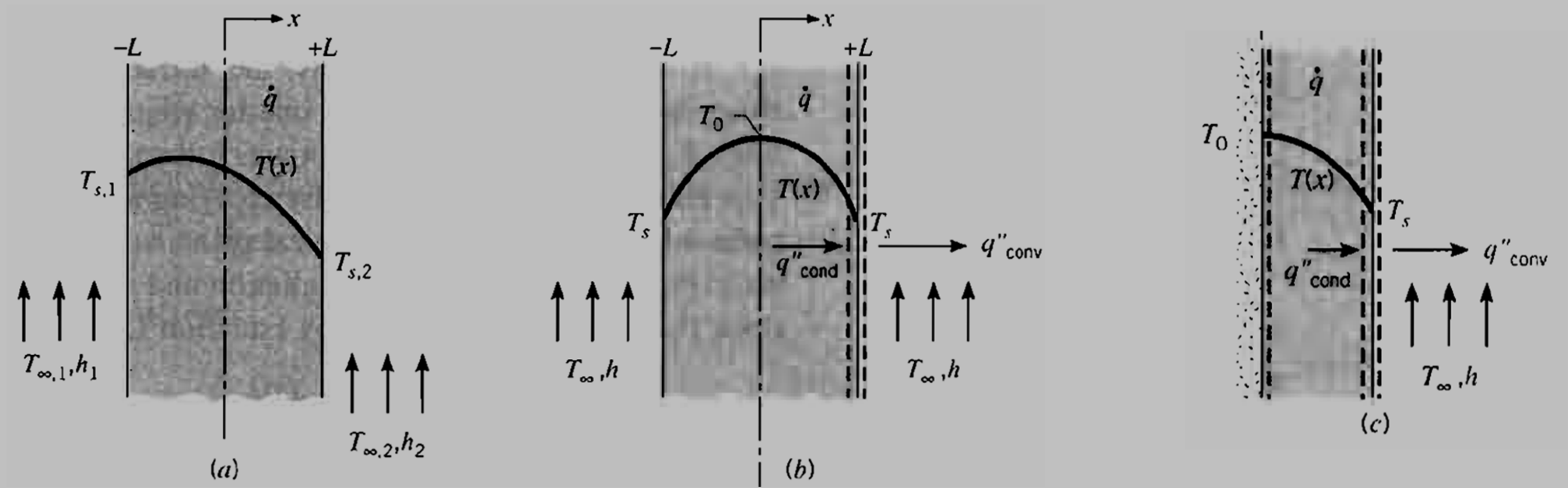
$$q = -\kappa A \frac{d}{dx}\left[\frac{\dot{q}L^2}{2\kappa}\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)+\frac{\left(T_{s2}-T_{s1}\right)}{2}\frac{x}{L}+\frac{T_{s1}+T_{s2}}{2}\right]$$

$$q = -\kappa A\left[\frac{-\dot{q}L^2 2x}{2\kappa L^2}+\frac{T_{s2}-T_{s1}}{2L}\right] = -\kappa A\left[\frac{-\dot{q}x}{\kappa}+\frac{T_{s2}-T_{s1}}{2L}\right]$$

$$q = Ax\dot{q} - \kappa A\frac{\left(T_{s2}-T_{s1}\right)}{2L} \qquad (3.13)$$

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.3.1. Parede plana, sistema unidimensional, estacionário, com geração de calor uniforme e κ constante



Condições de Contorno Assimétricas

Condições de Contorno Simétricas

Superfície adiabática

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.3.2. Parede cilíndrica, sistema unidimensional, estacionário, com geração de calor uniforme e κ constante

Fazendo um desenvolvimento análogo, resulta:

- **Distribuição de temperatura**

$$T(r) = T_{s2} + \frac{\dot{q}{r_2}^2}{4\kappa}\left(1 - \frac{r^2}{{r_2}^2}\right) - \left[\frac{\dot{q}{r_2}^2}{4\kappa}\left(1 - \frac{{r_1}^2}{{r_2}^2}\right) + (T_{s2} - T_{s1})\right]\frac{\ln(r_2/r)}{\ln(r_2/r_1)}$$

- **Taxa de transferência de calor**

$$q(r) = \dot{q}\pi L r^2 - \frac{2\pi L k}{\ln(r_2/r_1)}\left[\frac{\dot{q}{r_2}^2}{4\kappa}\left(1 - \frac{{r_1}^2}{{r_2}^2}\right) + (T_{s2} - T_{s1})\right]$$

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.3.3. Parede esférica, sistema unidimensional, estacionário, com geração de calor uniforme e κ constante

Fazendo um desenvolvimento análogo, resulta:

- **Distribuição de temperatura**

$$T(r) = T_{s2} + \frac{\dot{q} r_2^2}{6\kappa}\left(1 - \frac{r^2}{r_2^2}\right) - \left[\frac{\dot{q} r_2^2}{6\kappa}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + (T_{s2} - T_{s1})\right]\frac{1/r - 1/r_2}{1/r_1 - 1/r_2}$$

- **Taxa de transferência de calor**

$$q(r) = \frac{\dot{q} 4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi\kappa\left[\frac{\dot{q} r_2^2}{6\kappa}\left(1 - \frac{r_1^2}{r_2^2}\right) + (T_{s2} - T_{s1})\right]}{(1/r_1) - (1/r_2)}$$

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.4. Transferência de Calor em Superfícies Estendidas

- **Aplicação principal:**

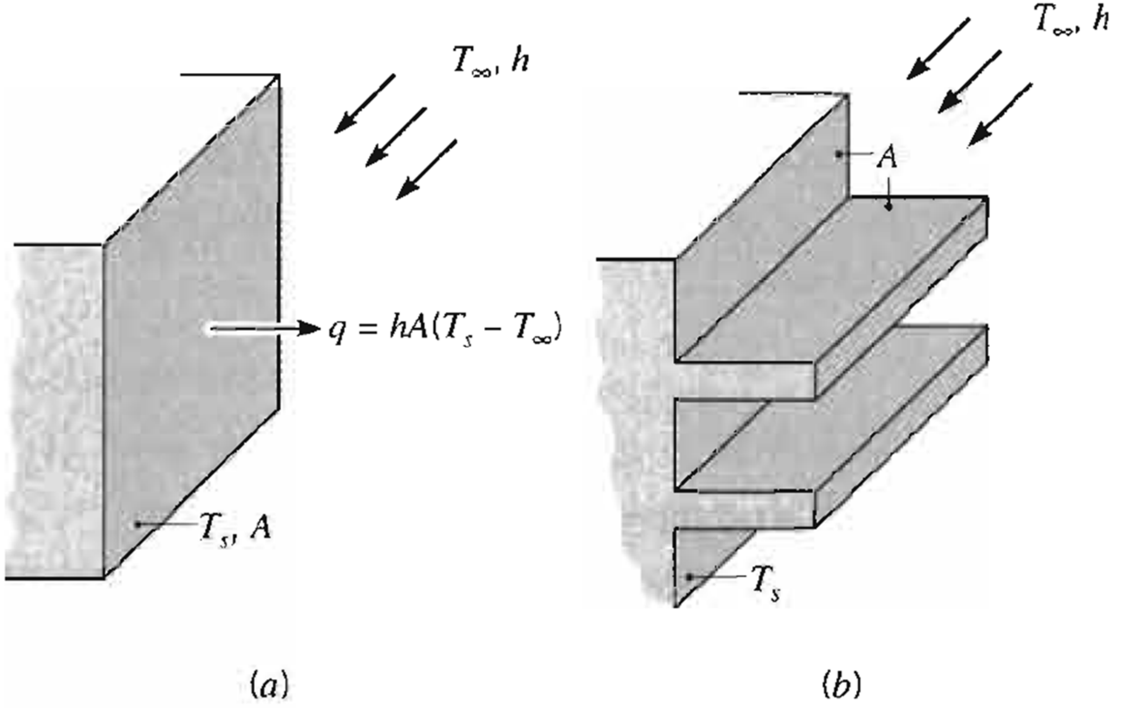
Aumentar a taxa de transferência de calor entre um sólido e um fluido adjacente através do aumento da área da superfície onde ocorre a convecção.

- **Exemplos de aplicação**

  - Cabeçotes de motocicletas
  - Condensadores e evaporadores
  - Radiador de carro
  - Dissipador de calor de processador de computador
  - ....

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.4. Transferência de Calor em Superfícies Estendidas

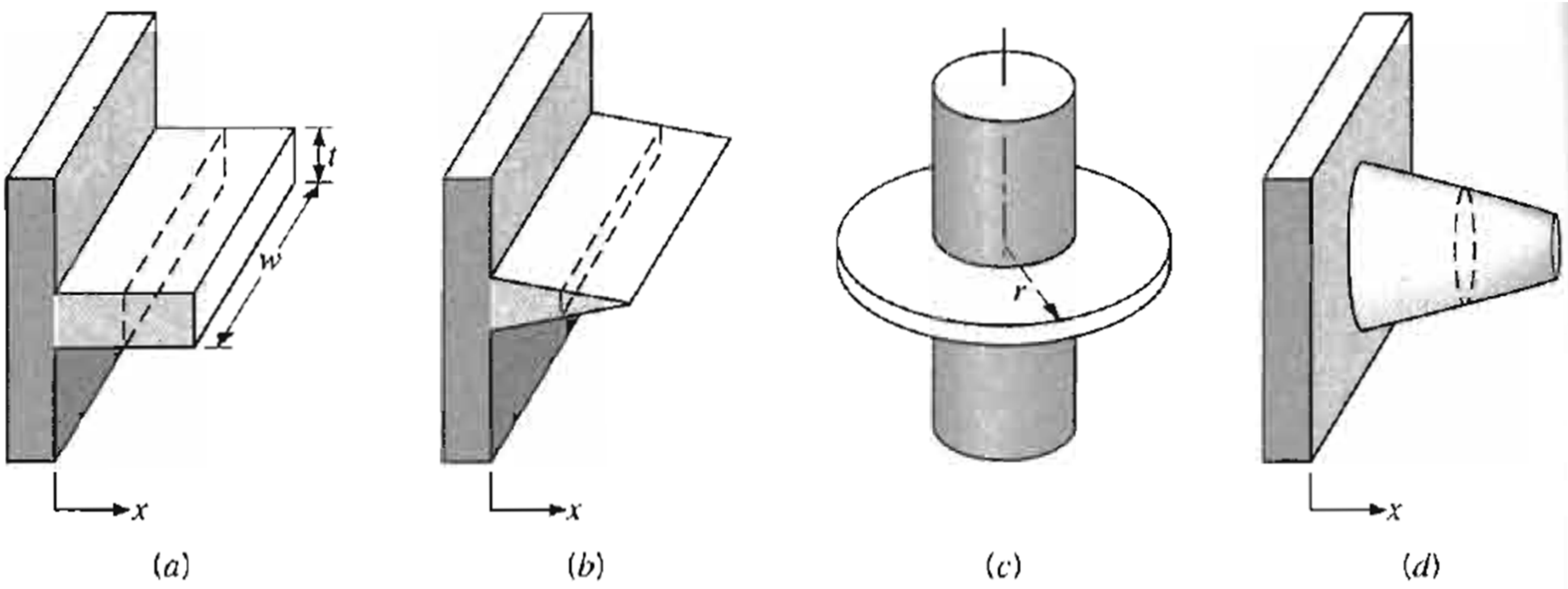


Uso de aletas para melhorar a transferência de calor em uma parede plana

(a) Superfície sem aletas **(b) Superfície aletada**

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

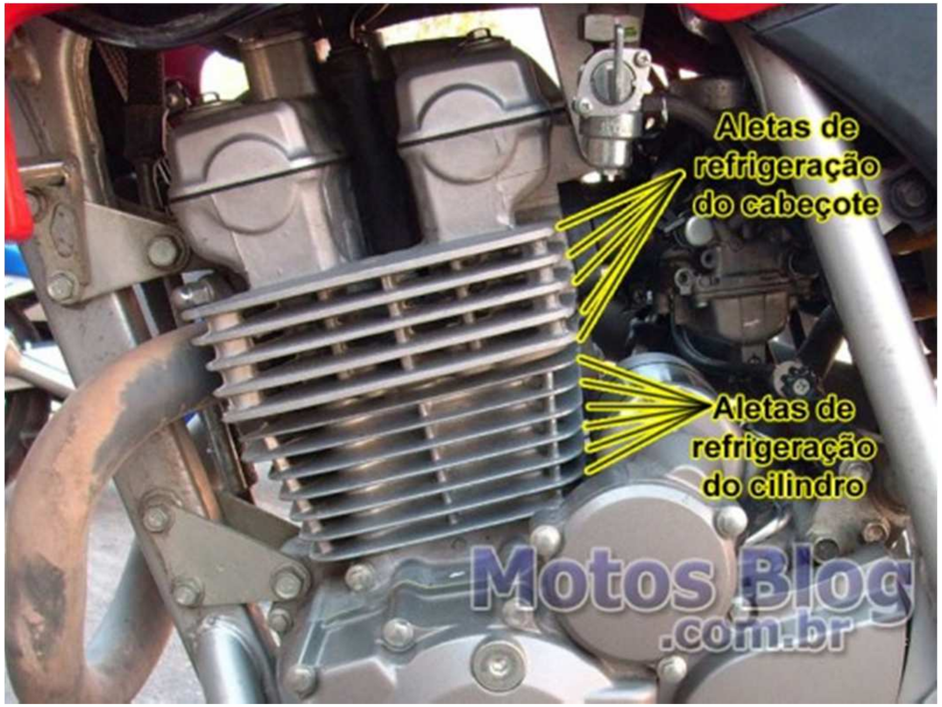
3.4. Transferência de Calor em Superfícies Estendidas

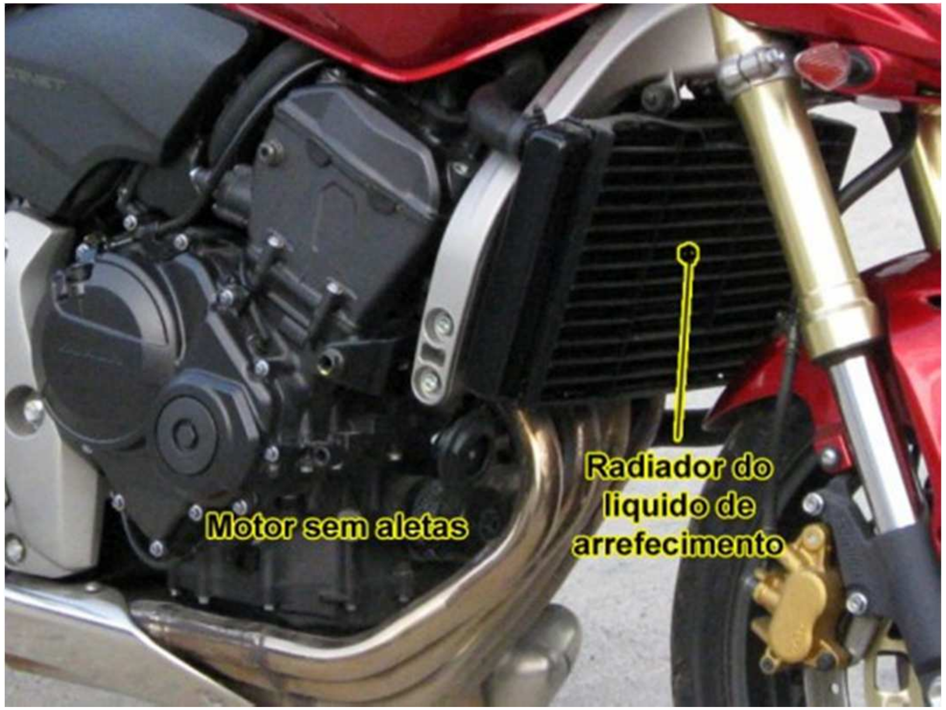


(a) Aleta plana com seção transversal uniforme
(b) Aleta plana com seção transversal não-uniforme
(c) Aleta anular
(d) Aleta piniforme

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

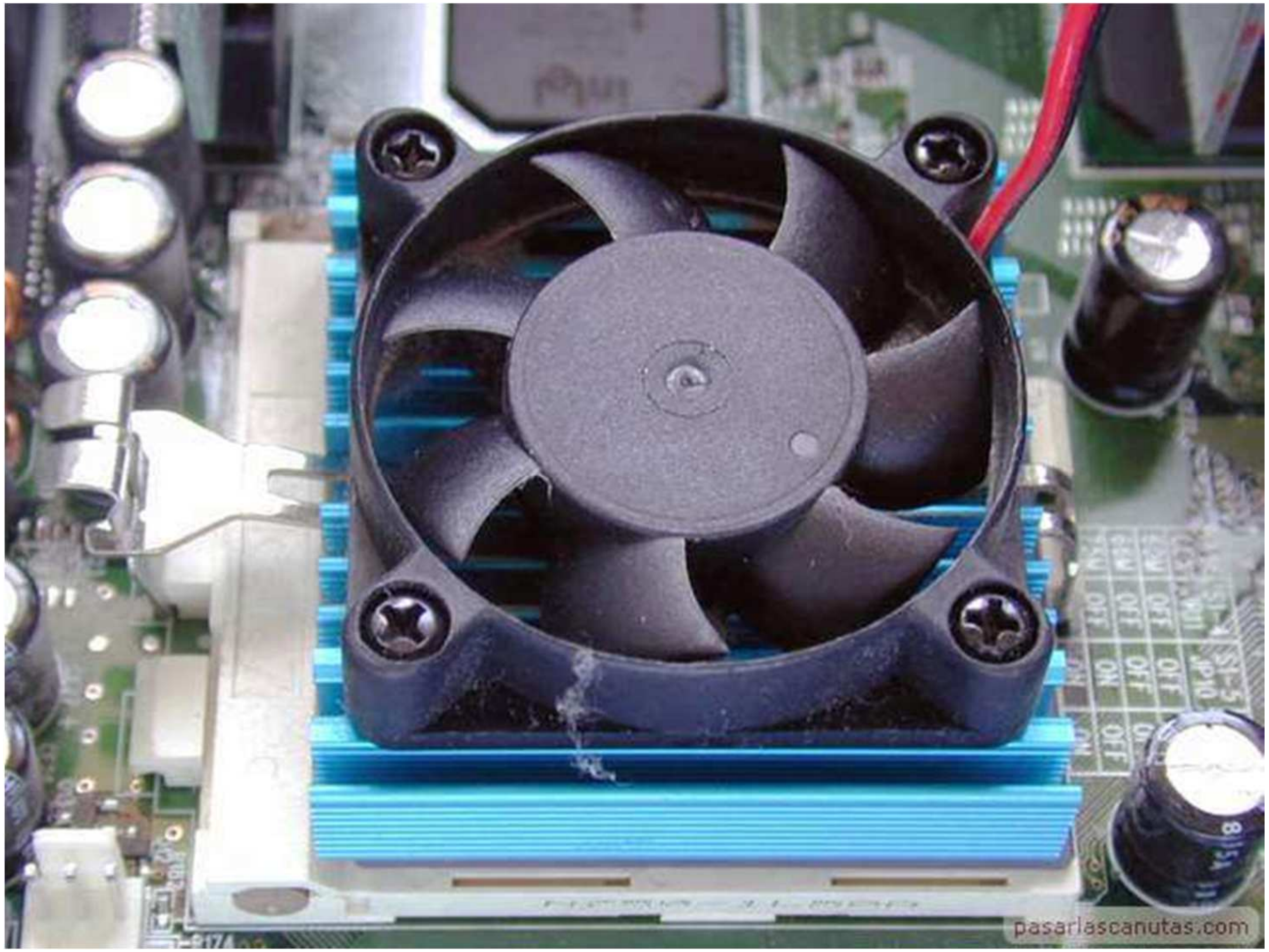
3.4. Transferência de Calor em Superfícies Estendidas





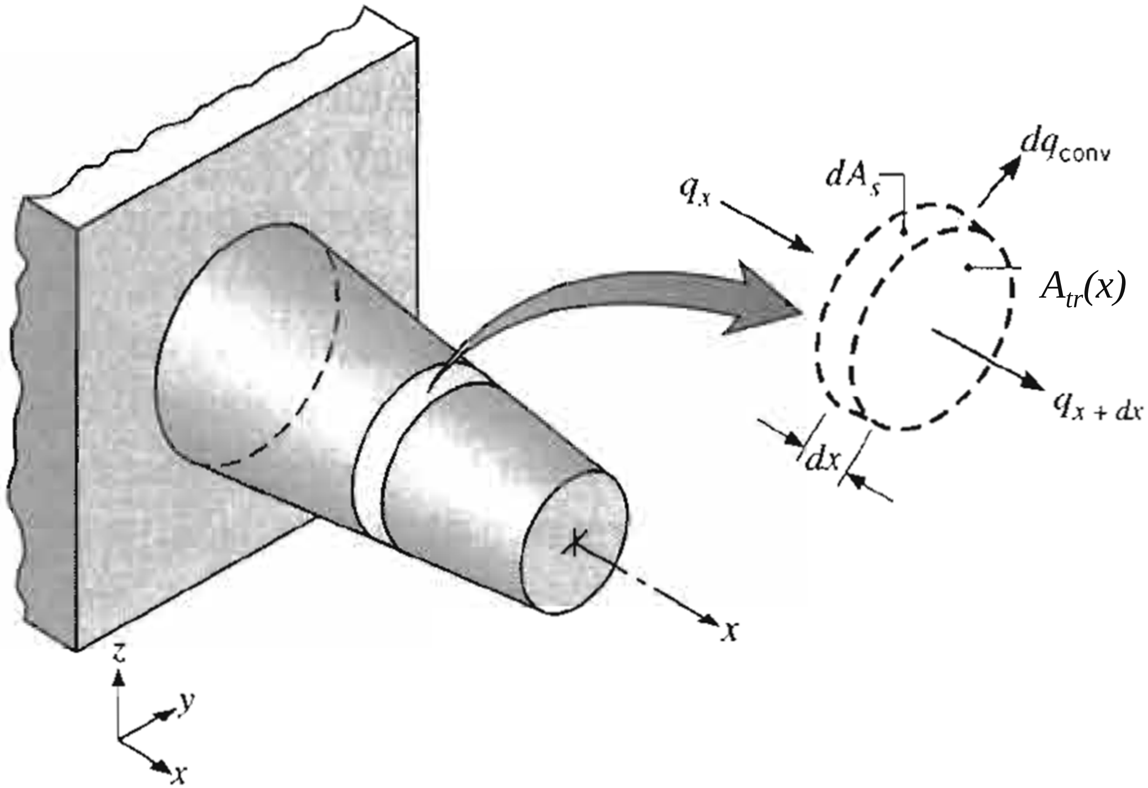
CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.4. Transferência de Calor em Superfícies Estendidas



CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.4.1. Análise Geral

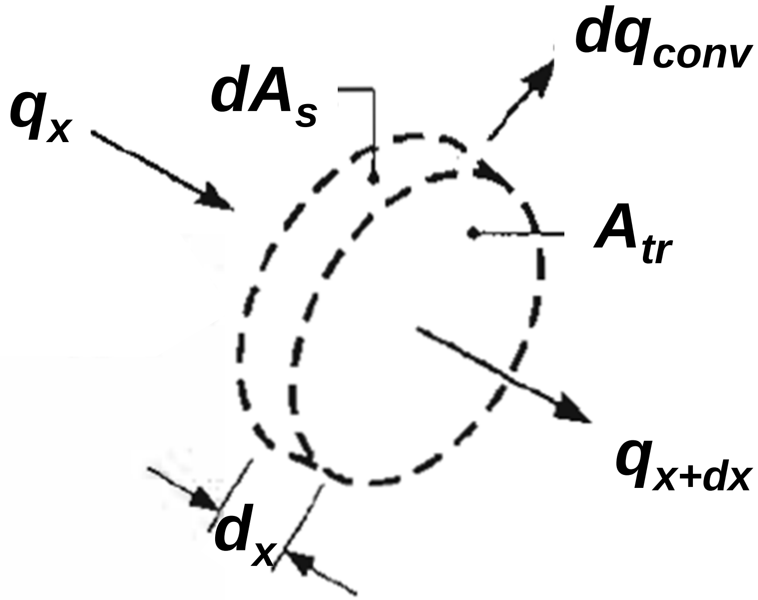


Aplicando a lei da conservação de energia

$$\dot{E}_{acu} = \dot{E}_{ent} - \dot{E}_{sai} + \dot{E}_{g}$$

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.4.1. Análise Geral



$$\cancelto{0}{\dot{E}_{acu}} = \dot{E}_{ent} - \dot{E}_{sai} + \cancelto{0}{\dot{E}_g}$$

$$\dot{E}_{ent} = \dot{E}_{sai}$$

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv}$$

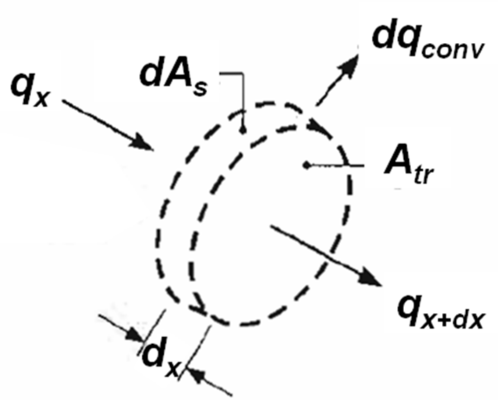
mas $$q_{x+dx} = q_x + \frac{d}{dx}(q_x)dx$$

$$\cancel{q_x} = \cancel{q_x} + \frac{d}{dx}(q_x)dx + dq_{conv}$$

$$\frac{d}{dx}(q_x)dx + dq_{conv} = 0$$

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.4.1. Análise Geral



$$\frac{d}{dx}(q_x)dx + dq_{conv} = 0$$

mas $\quad q_x = -\kappa A_{tr}\dfrac{dT}{dx} \qquad$ e $\qquad dq_{conv} = h\,dA_s(T - T_\infty)$

logo

$$\frac{d}{dx}\left(-\kappa A_{tr}\frac{dT}{dx}\right)dx + h\,dA_s(T - T_\infty) = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(-\kappa A_{tr}\frac{dT}{dx}\right) + h\frac{dA_s}{dx}(T - T_\infty) = 0}$$

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.4.1. Análise Geral

$$\frac{d}{dx}\left(-\kappa A_{tr}\frac{dT}{dx}\right)+h\frac{dA_s}{dx}(T-T_\infty)=0$$

para κ constante

$$\frac{d}{dx}\left(A_{tr}\frac{dT}{dx}\right)-\frac{h}{\kappa}\frac{dA_s}{dx}(T-T_\infty)=0$$

ou ainda

$$\frac{dA_{tr}}{dx}\frac{dT}{dx}+A_{tr}\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{h}{\kappa}\frac{dA_s}{dx}(T-T_\infty)=0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{1}{A_{tr}}\frac{dA_{tr}}{dx}\frac{dT}{dx}-\frac{h}{\kappa A_{tr}}\frac{dA_s}{dx}(T-T_\infty)=0$$

3.4.2. Aletas com área de seção transversal uniforme

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{1}{A_{tr}}\frac{dA_{tr}}{dx}\frac{dT}{dx}-\frac{h}{\kappa A_{tr}}\frac{dA_s}{dx}(T-T_\infty)=0$$

Considerando a área de seção transversal uniforme, resulta:

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{h}{\kappa A_{tr}}\frac{dA_s}{dx}(T-T_\infty)=0$$

mas $A_s = P.x$ onde P é o perímetro, logo

$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{hP}{\kappa A_{tr}}(T-T_\infty)=0}$$

3.4.2. Aletas com área de seção transversal uniforme

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{\kappa A_{tr}}(T - T_\infty) = 0$$

Simplificando a equação pela definição de θ

$$\theta = T(x) - T_\infty$$

Substituindo

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{hP}{\kappa A_{tr}}\theta = 0$$ ou $$\boxed{\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0}$$

onde $$m^2 = \frac{hP}{\kappa A_{tr}}$$

3.4.2. Aletas com área de seção transversal uniforme

A solução da equação tem a forma:

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

Para se determinar as constantes C_1 e C_2 é necessário especificar as condições de contorno

- Condução de contorno na base da aleta
  - Temperatura especificada
- Condição de contorno no topo da aleta
  - Perda de calor por convecção
  - Perda desprezível de calor
  - Temperatura especificada
  - Aleta longa $T \rightarrow T_\infty$ e $\theta_L \rightarrow 0$

CAPÍTULO 3 – CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL DE CALOR EM REGIME ESTACIONÁRIO

3.4.2.1. Temperatura especificada na base da aleta e perda de calor por convecção no topo

- **Distribuição de Temperatura**

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L-x) + (h/m\kappa)\,\mathrm{senh}\, m(L-x)}{\cosh mL + (h/m\kappa)\,\mathrm{senh}\, mL}$$

- **Calor Transferido**

$$q_a = \sqrt{h P \kappa A_{tr}}\;\theta_b \,\frac{\mathrm{senh}\, mL + (h/m\kappa)\cosh mL}{\cosh mL + (h/m\kappa)\,\mathrm{senh}\, mL}$$

onde $$m = \sqrt{\frac{h P}{\kappa A_{tr}}}$$

3.4.2.2. Temperatura especificada na base da aleta e perda de calor desprezível no topo

- **Distribuição de Temperatura**

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh m(L - x)}{\cosh mL}$$

- **Calor Transferido**

$$q_a = \sqrt{h\,P\,\kappa\,A_{tr}}\;\theta_b \tanh mL$$

onde $$m = \sqrt{\frac{h\,P}{\kappa\,A_{tr}}}$$

3.4.2.3. Temperatura especificada na base da aleta e temperatura especificada no topo

- **Distribuição de Temperatura**

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{(\theta_L / \theta_b)\,\mathrm{senh}\,mx + \mathrm{senh}\,m(L-x)}{\mathrm{senh}\,mL}$$

- **Calor Transferido**

$$q_a = \sqrt{h\,P\,\kappa\,A_{tr}}\;\theta_b\,\frac{\cosh mL + \theta_L / \theta_b}{\mathrm{senh}\,mL}$$

onde $$m = \sqrt{\frac{h\,P}{\kappa\,A_{tr}}}$$

3.4.2.4. Temperatura especificada na base da aleta e aleta muito longa

- **Distribuição de Temperatura**

$$\frac{\theta}{\theta_b} = e^{-m x}$$

- **Calor Transferido**

$$q_a = \sqrt{h P \kappa A_{tr}}\ \theta_b$$

onde $$m = \sqrt{\frac{h P}{\kappa A_{tr}}}$$