Escoamentos Compressíveis

Aula 02

Forma integral das equações de conservação para escoamentos invíscidos

2.1 Introdução

- Princípios básicos das equações de conservação:
  - A massa não pode ser criada ou destruída.
  - A taxa de variação do momentum de um corpo é igual à força resultante exercida sobre o mesmo (Segunda Lei de Newton).
  - A energia não pode ser criada ou destruída, ela pode apenas mudar de forma (Primeira Lei da Termodinâmica).

2.1 Introdução

- Abordagem por volumes de controle:
  - Obtenção direta das equações de conservação na forma integral.

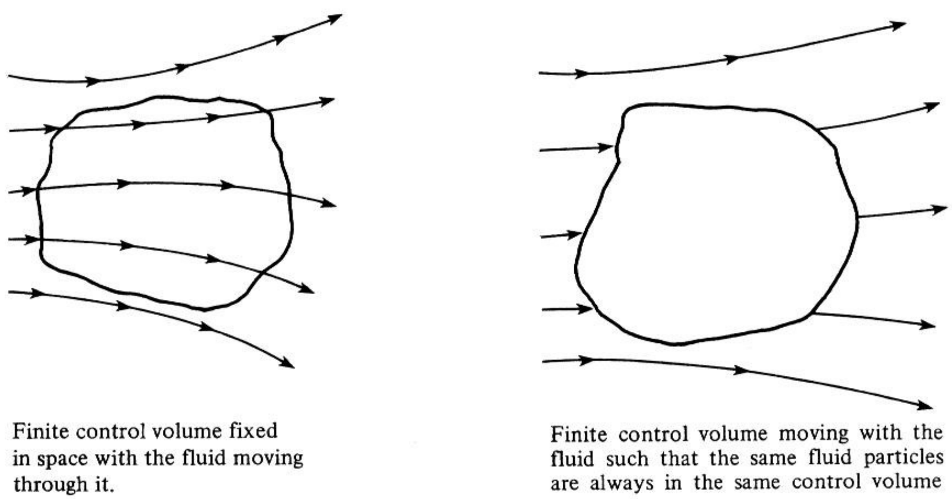
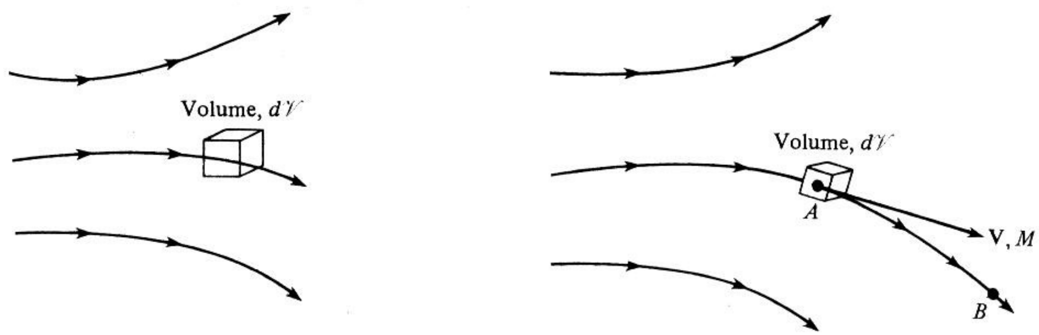


Figure 2.2 | Finite control volume approach.

2.1 Introdução

- Abordagem por elementos infinitesimais de fluido:
  - Obtenção direta das equações de conservação na forma diferencial.



Infinitesimal fluid element fixed in space with the fluid moving through it

Infinitesimal fluid element moving along a streamline with the velocity **V** equal to the flow velocity at each point

Figure 2.3 | Infinitesimal fluid element approach.

2.1 Introdução

- Abordagem molecular:
  - Abordagem microscópica na qual as leis fundamentais da natureza são aplicadas diretamente às moléculas, com uma média estatística adequada. Isto conduz à equação de Boltzmann para a teoria cinética, da qual as equações de conservação na forma diferencial podem ser extraídas.

2.2 Equação da conservação da massa (eq. da continuidade)

- Princípio físico: a massa não pode ser criada ou destruída.

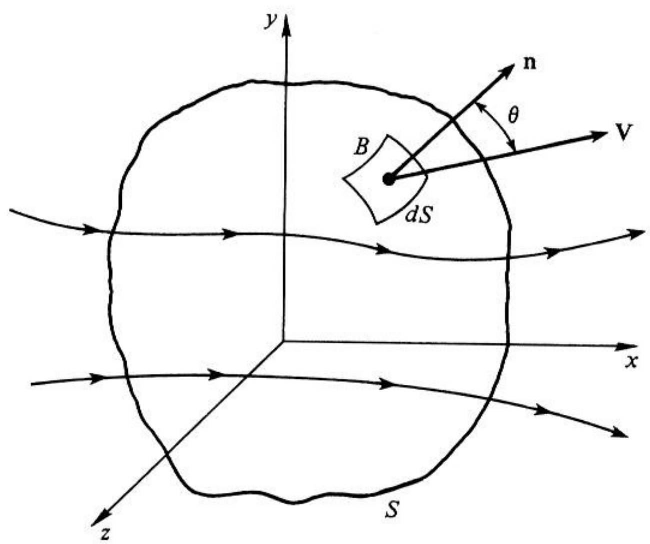


Figure 2.4 | Fixed control volume for derivation of the governing equations.

2.2 Equação da conservação da massa (eq. da continuidade)

- Fluxo de massa através de dS:

$$\dot{m} = \rho \cdot (V \cdot \cos\theta) \cdot dS = \rho \cdot V_n \cdot dS = \rho \cdot \langle \vec{V}, d\vec{S} \rangle$$

- Fluxo de massa que entra no volume:

$$-\oiint_S \rho \langle \vec{V}, d\vec{S} \rangle$$

2.2 Equação da conservação da massa (eq. da continuidade)

- Massa de um volume infinitesimal:

$$\oiiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot d\mathcal{V}$$

- Taxa de variação da massa com o tempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot d\mathcal{V}$$

2.2 Equação da conservação da massa (eq. da continuidade)

- Empregando-se o princípio fundamental:

$$-\oiint_S \rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot d\mathcal{V}$$

- Validade: todos os escoamentos (viscosos ou invíscidos, compressíveis ou incompressíveis)

2.3 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Princípio físico: a taxa de variação da quantidade de movimento de um corpo é igual à força resultante que atua sobre o mesmo.

- Forma vetorial:

$$\frac{d}{dt}\left(m \cdot \vec{V}\right) = \vec{F}$$

2.3 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Para massa constante:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

- Tipos de forças atuantes sobre um volume de controle:
  - Forças de corpo.
  - Forças de superfície.

2.3 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Forças de corpo:

$$\text{forças de corpo (total)} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot \vec{f} \cdot d\mathcal{V}$$

- Forças de superfície:
  - Para um fluido invíscido, tem-se

$$\text{força superficial (total)} = -\oiint_{S} p \cdot d\vec{S}$$

2.3 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Força resultante sobre o volume:

$$\vec{F} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot \vec{f} \cdot d\mathcal{V} - \oint\!\!\oint_{S} p \cdot d\vec{S}$$

- Fluxo de momentum associado ao fluxo mássico para o volume de controle:

$$A_1 = \oint\!\!\oint_{S} \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right) \cdot \vec{V}$$

2.3 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Fluxo de momentum devido a flutuações transientes:

$$A_2 = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot \vec{V} \cdot d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial\left(\rho \cdot \vec{V}\right)}{\partial t} d\mathcal{V}$$

- Taxa instantânea total de variação do momentum:

$$\frac{d}{dt}\left(m \cdot \vec{V}\right) = A_1 + A_2 = \oiint_{S} \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right) \cdot \vec{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial\left(\rho \cdot \vec{V}\right)}{\partial t} d\mathcal{V}$$

2.3 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Escoamento invíscido:

$$\oiint_S \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right) \cdot \vec{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial\left(\rho \cdot \vec{V}\right)}{\partial t} d\mathcal{V} = \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot \vec{f} \cdot d\mathcal{V} - \oiint_S p \cdot d\vec{S}$$

- Escoamento viscoso:

$$\oiint_S \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right) \cdot \vec{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial\left(\rho \cdot \vec{V}\right)}{\partial t} d\mathcal{V} = \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot \vec{f} \cdot d\mathcal{V} - \oiint_S p \cdot d\vec{S} + \vec{F}_{visc}$$

2.4 Equação da conservação da energia

- Princípio físico: a energia não pode ser criada ou destruída; ela apenas muda de forma.

- Taxa de calor transferida para o (ou a partir do) fluido:

$$B_1 = \oiiint_{\mathcal{V}} \dot{q} \cdot \rho \cdot d\mathcal{V}$$

2.4 Equação da conservação da energia

- Taxa de trabalho efetuado em um corpo em movimento:

$$-\iint_{S} \left\langle p \cdot d\vec{S}, \vec{V} \right\rangle$$

- Taxa de trabalho efetuado por forças de corpo:

$$\oiiint_{\mathcal{V}} \left\langle \rho \cdot \vec{f} \cdot d\mathcal{V}, \vec{V} \right\rangle$$

2.4 Equação da conservação da energia

- Taxa de trabalho efetuado sobre o fluido dentro do volume de controle:

$$B_2 = -\oiint_S \left\langle p \cdot d\vec{S}, \vec{V} \right\rangle + \iiint_{\mathcal{V}} \left\langle \rho \cdot \vec{f} \cdot d\mathcal{V}, \vec{V} \right\rangle$$

- Taxa líquida de escoamento de energia através da superfície:

$$\iint_S \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right)\left(e + \frac{V^2}{2}\right)$$

2.4 Equação da conservação da energia

- Taxa temporal de variação de energia dentro do volume de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) d\mathcal{V}$$

- Taxa de variação da energia devido ao escoamento através do volume:

$$B_3 = \frac{\partial}{\partial t}\oiiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2}\right) d\mathcal{V} + \iint_S \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right)\left(e + \frac{V^2}{2}\right)$$

2.4 Equação da conservação da energia

- Da Primeira Lei da Termodinâmica:

$$B_1 + B_2 = B_3$$

ou seja,

$$\oiiint_{\mathcal{V}} \dot{q} \cdot \rho \cdot d\mathcal{V} - \oiint_{S} \left\langle p \cdot d\vec{S}, \vec{V} \right\rangle + \oiiint_{\mathcal{V}} \left\langle \rho \cdot \vec{f} \cdot d\mathcal{V}, \vec{V} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} + \iint_{S} \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle \right) \left(e + \frac{V^2}{2} \right)$$

2.4 Equação da conservação da energia

- Na equação anterior não estão incluídos os seguintes fenômenos:
  - Taxa de trabalho efetuado sobre o fluido pela rotação de um eixo: $\dot{W}_{shaft}$
  - Taxa de trabalho efetuado por tensões viscosas: $\dot{W}_{viscous}$
  - Calor trocado pela superfície do volume de controle por condução e/ou difusão. Associado aos efeitos de radiação, tais efeitos são denotados por $\dot{Q}$

2.4 Equação da conservação da energia

- Equação completa:

$$\dot{Q} + \dot{W}_{shaft} + \dot{W}_{viscous} - \oiint_{S} \left\langle p \cdot d\vec{S}, \vec{V} \right\rangle + \oiiint_{\mathcal{V}} \left\langle \rho \cdot \vec{f} \cdot d\mathcal{V}, \vec{V} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot \left(e + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} + \iint_{S} \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle \right) \left(e + \frac{V^2}{2} \right)$$

2.5 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- Princípios empregados:
  - A força exercida sobre um corpo pelo escoamento de fluido sobre ou através do corpo é devido apenas à distribuição de pressão e à distribuição de tensões cisalhantes sobre a totalidade da superfície exposta do corpo.
  - A forma integral da equação do momentum.

2.5 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- A distribuição de pressões é seguramente o fator determinante no empuxo.

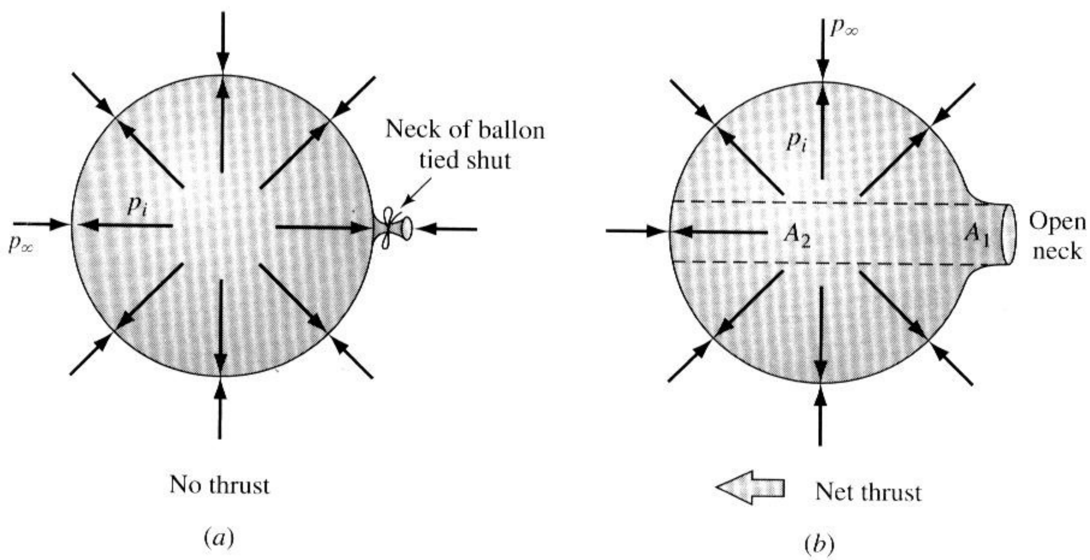


Figure 2.6 | Illustration of thrust on a balloon.

2.5 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

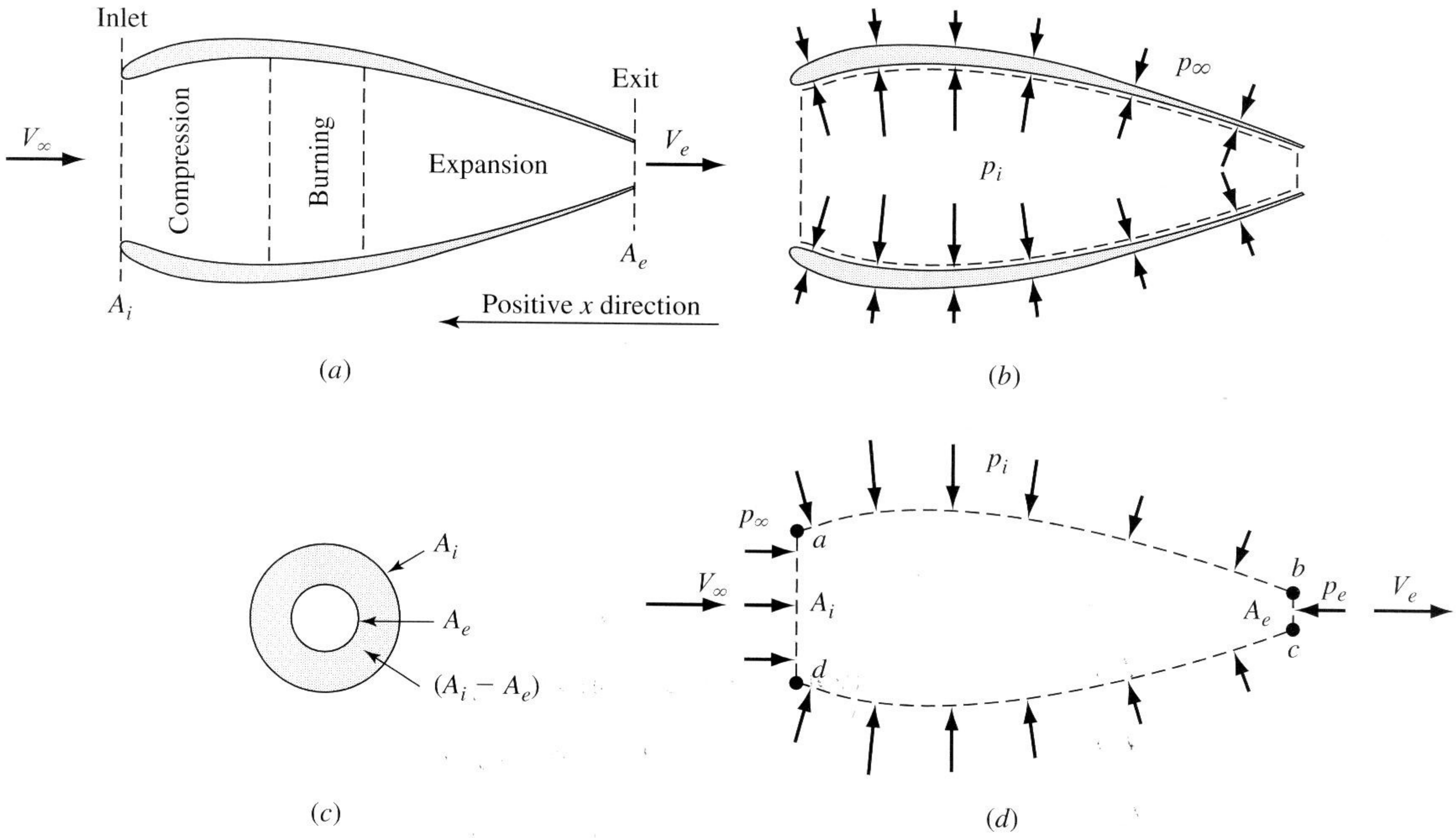


Figure 2.7 | Sketches for the development of the thrust equation.

2.5 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- Força resultante sobre o dispositivo devido à distribuição de pressões:

$$\vec{F} = -\oiint_S p \cdot d\vec{S}$$

- Empuxo escalar na direção axial (x):

$$T = -\int (p_i \cdot dS)_x - \int (p_\infty \cdot dS)_x$$

2.5 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- Considerando-se a pressão ambiente como constante:

$$\int (p_\infty \cdot dS)_x = p_\infty \int (dS)_x = p_\infty (A_e - A_i)$$

deste modo:

$$T = -\int (p_i \cdot dS)_x + p_\infty (A_i - A_e)$$

Força sobre a superfície sólida devido ao gás

2.5 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- Equação do momentum para regime permanente, sem forças de corpo:

$$\oiint_S \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right) \cdot \vec{V} = -\oiint_S p \cdot d\vec{S}$$

- Componente axial:

$$\oiint_S \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right) \cdot V_x = -\oiint_S \left(p \cdot d\vec{S}\right)_x$$

2.5 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- Utilizando o volume de controle $abcda$, lado esquerdo da equação:
  - Contornos superior e inferior:

$$\int_{ab} \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right) \cdot V_x = \int_{cd} \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right) \cdot V_x = 0$$

  - Na entrada:

$$\int_{ad} \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right) \cdot V_x = \left(-p_\infty \cdot V_\infty \cdot A_i\right)\left(-V_\infty\right) = \dot{m}_i \cdot V_\infty$$

2.5 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

– Na saída:

$$\int_{bc} \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right) \cdot V_x = \left(p_\infty \cdot V_e \cdot A_e\right)\left(-V_e\right) = -\dot{m}_e \cdot V_e$$

– Soma dos termos:

$$\int \left(\rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle\right) \cdot V_x = \dot{m}_i \cdot V_\infty - \dot{m}_e \cdot V$$

2.5 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

Assim:

$$\dot{m}_i \cdot V_\infty - \dot{m}_e \cdot V = -\int (p \cdot dS)_x$$

- Para o lado direito da equação acima, empregando o volume $abcda$, tem-se:

$$\int_{ad} (p \cdot dS)_x = p_\infty \cdot A_i$$

$$\int_{bc} (p \cdot dS)_x = -p_e \cdot A_e$$

2.5 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

– Ao longo dos contornos ab e cd, tem-se:

$$\int_{ab} (p \cdot dS)_x + \int_{cd} (p \cdot dS)_x = \int_{abcd} (p \cdot dS)_x$$

– Tem-se deste modo,

$$\dot{m}_i \cdot V_\infty - \dot{m}_e \cdot V = -p_\infty \cdot A_i + p_e \cdot A_e - \int_{abcd} (p_i \cdot dS)_x$$

Força sobre o gás devido à superfície sólida

2.5 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- Por fim, tem-se:

$$T = \dot{m}_e \cdot V_e - \dot{m}_i \cdot V_\infty + p_e \cdot A_e - p_\infty \cdot A_i + p_\infty \cdot \left(A_i - A_e\right)$$

ou seja,

$$T = \dot{m}_e \cdot V_e - \dot{m}_i \cdot V_\infty + p_e \cdot A_e - A_e \cdot \left(p_e - p_\infty\right)$$