# Escoamentos Compressíveis

## Aula 06

Forma diferencial das equações de conservação para escoamentos invíscidos

# 6.1 Introdução

- A análise de problemas na dinâmica de fluidos requer três passos iniciais:
  - Determinação de um modelo para o fluido.
  - Aplicação dos princípios básicos da física para esse modelo de modo a obter equações matemáticas apropriadas embasadas nesses princípios.
  - Uso das equações resultantes para resolver um problema específico de interesse.

# 6.1 Introdução

- As equações de conservação na forma integral conduzem a equações algébricas que descrevem as propriedades em diferentes seções transversais do escoamento.
- Tal formulação, contudo, não é prática para o estudo de efeitos complexos, como no caso dos escoamentos transientes e bi e tridimensionais.

# 6.1 Introdução

- Identidades vetoriais úteis:

$$\oiint_S \left\langle \mathbf{A}, d\vec{S} \right\rangle = \oiiint_V \langle \nabla, \mathbf{A} \rangle dV$$

$$\oiint_S \Phi \cdot d\vec{S} = \oiiint_V \left( \nabla \Phi \right) dV$$

onde $\mathbf{A}$ e $\Phi$ são funções vetorial e escalar, respectivamente, do tempo e do espaço, e $V$ é o volume de controle cuja superfície de controle é $S$.

# 6.2 Equações diferenciais na forma conservativa

- Equação da continuidade:
  - A partir da forma integral:

$$-\oiint_{S} \rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot d\mathcal{V}$$

  - Aplicando-se a primeira identidade vetorial e após algumas manipulações obtém-se:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\langle \nabla, \rho \cdot \vec{V} \right\rangle = 0}$$

# 6.2 Equações diferenciais na forma conservativa

- Equação do momentum:
  - Forma integral:

$$\oiint_S \left(\rho \cdot \langle \vec{V}, d\vec{S} \rangle\right) \cdot \vec{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho \cdot \vec{V})}{\partial t} d\mathcal{V} = \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot \vec{f} \cdot d\mathcal{V} - \oiint_S p \cdot d\vec{S}$$

  - Aplicando-se a segunda identidade vetorial e utilizando-se, por conveniência, um sistema cartesiano de coordenadas, obtém-se:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \langle \nabla, \rho \cdot u \cdot \vec{V} \rangle = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot f_x}$$

# 6.2 Equações diferenciais na forma conservativa

- Equação do momentum:
  - As demais componentes são:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\left\langle\nabla,\rho\cdot v\cdot\vec{V}\right\rangle=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho\cdot f_y}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\left\langle\nabla,\rho\cdot w\cdot\vec{V}\right\rangle=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho\cdot f_z}$$

# 6.2 Equações diferenciais na forma conservativa

- Equação da energia:
  - Forma integral:

$$\oiiint_{\mathcal{V}} \dot{q} \cdot \rho \cdot d\mathcal{V} - \oiint_{S} \left\langle p \cdot d\vec{S}, \vec{V} \right\rangle + \oiiint_{\mathcal{V}} \left\langle \rho \cdot \vec{f} \cdot d\mathcal{V}, \vec{V} \right\rangle =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \cdot \left( e + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} + \iint_{S} \left( \rho \cdot \left\langle \vec{V}, d\vec{S} \right\rangle \right) \left( e + \frac{V^2}{2} \right)$$

  - Empregando-se a primeira identidade vetorial, obtém-se:

# 6.2 Equações diferenciais na forma conservativa

- Equação da energia:

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\cdot\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\left\langle\nabla,\left[\rho\cdot\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\cdot\vec{V}\right]\right\rangle=\\-\left\langle\nabla,p\cdot\vec{V}\right\rangle+\rho\cdot\dot{q}+\rho\cdot\left\langle\vec{f},\vec{V}\right\rangle\end{gathered}}$$

# 6.3 Derivada substantiva

- Considere um elemento de fluido que se move no espaço cartesiano em dois instantes de tempo diferentes.

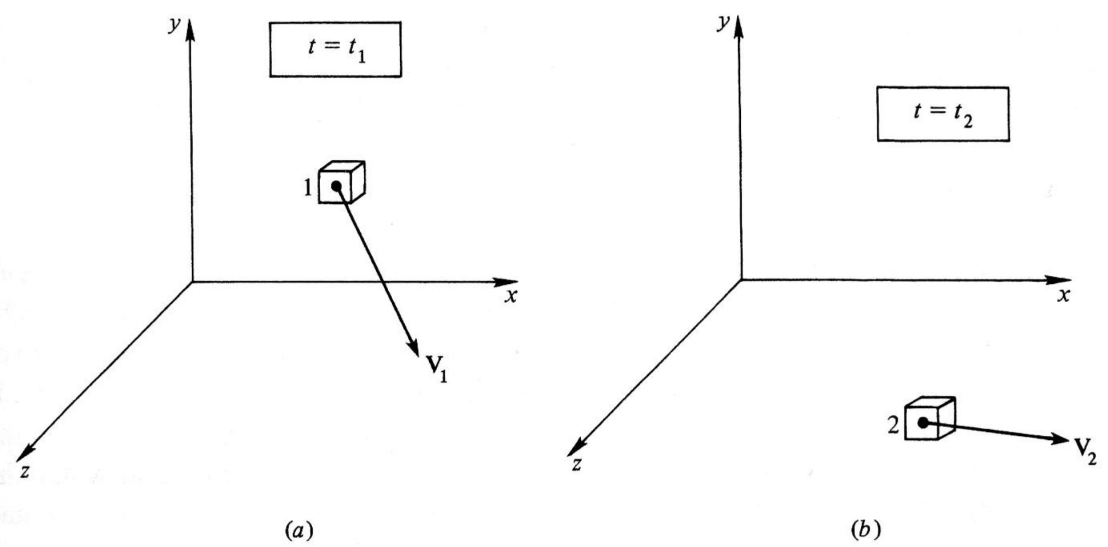



**Figure 6.2** | Illustration of the substantial derivative (the $xyz$ coordinate system above is fixed in space, and the fluid element is moving from point 1 to point 2).

# 6.3 Derivada substantiva

- Neste caso, o campo de velocidades é dado por

$$\vec{V} = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + w\,\vec{k}$$

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

- E o campo de densidades é dado por

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

# 6.3 Derivada substantiva

- No instante $t_1$, a densidade do elemento de fluido é $\rho_1 = \rho\left(x_1, y_1, z_1, t_1\right)$. No instante $t_2$, o mesmo elemento de fluido apresenta densidade $\rho_2 = \rho\left(x_2, y_2, z_2, t_2\right)$. Como tem-se que $\rho = \rho\left(x, y, z, t\right)$, é possível expandir-se a função em uma série de Taylor ao redor do ponto 1, originando

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 \left(x_2 - x_1\right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 \left(y_2 - y_1\right) +$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 \left(z_2 - z_1\right) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 \left(t_2 - t_1\right) + \text{termos de ordem superior}$$

# 6.3 Derivada substantiva

- Dividindo-se por $(t_2 - t_1)$ e ignorando-se termos de ordem superior, tem-se

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 \frac{(y_2 - y_1)}{(t_2 - t_1)} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 \frac{(z_2 - z_1)}{(t_2 - t_1)} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1$$

- A quantidade $(\rho_2 - \rho_1)$ é a variação da densidade de um elemento particular de fluido ao se mover do ponto 1 ao ponto 2.

# 6.3 Derivada substantiva

- Tomando-se o limite para o lado esquerdo da igualdade:

$$\lim_{t_2 \to t_1}\left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1}\right) \equiv \frac{D\rho}{Dt}$$

- Esse valor representa a taxa instantânea de variação da densidade de um elemento de fluido particular que se move do ponto 1 ao ponto 2.

# 6.3 Derivada substantiva

- Tal valor é diferente de $(\partial\rho/\partial t)_1$, que é a taxa temporal de variação da densidade em um ponto fixo 1.
- Calculando-se o limite para as demais parcelas e lembrando-se que se está seguindo um elemento de fluido:

$$\lim_{t_2 \to t_1}\left(\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right) \equiv u$$

# 6.3 Derivada substantiva

$$\lim_{t_2 \to t_1} \left( \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \right) \equiv v$$

$$\lim_{t_2 \to t_1} \left( \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \right) \equiv w$$

- Deste modo, tem-se para o limite de $t_2 \to t_1$

$$\frac{D\rho}{Dt} = u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

# 6.3 Derivada substantiva

- Define-se, então, a notação

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \left\langle \vec{V}, \nabla \right\rangle}$$

como derivada substantiva. A taxa de variação de qualquer quantidade associada ao movimento de um elemento de fluido particular é dado pela derivada substantiva.

# 6.4 Equações diferenciais na forma não conservativa

- Equação da continuidade:
  - A partir da equação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left\langle \nabla, \rho \cdot \vec{V} \right\rangle = 0$$

  - Expandido-se o termo que apresenta o divergente e após algumas manipulações tem-se:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\left\langle \nabla, \vec{V} \right\rangle = 0$$

# 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

– Fisicamente, tem-se que a massa de um elemento de fluido constituído por um conjunto fixo de partículas (moléculas ou átomos) é constante ao longo do movimento do fluido através do espaço.

- Equação do momentum:
  – A partir da equação:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\left\langle\nabla,\rho\cdot u\cdot\vec{V}\right\rangle=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\cdot f_x$$

# 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

– Expandindo-se o termo que apresenta o divergente, bem como a derivada temporal e realizando-se algumas manipulações, obtém-se a relação:

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot f_x}$$

– Analogamente, obtém-se:

$$\boxed{\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot f_y}$$

# 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

$$\boxed{\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot f_z}$$

– Ou na forma vetorial:

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \cdot \vec{f}}$$

– Essas equações se constituem em formas diferentes das equações de Euler.

# 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

– As equações de Euler representam fisicamente a segunda lei de Newton aplicada a um elemento de fluido de identidade fixa movendo-se em um escoamento.

- Equação da energia:
  – A partir da equação:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\cdot\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\right]+\left\langle\nabla,\left[\rho\cdot\left(e+\frac{V^2}{2}\right)\cdot\vec{V}\right]\right\rangle=$$

$$-\left\langle\nabla,p\cdot\vec{V}\right\rangle+\rho\cdot\dot{q}+\rho\cdot\left\langle\vec{f},\vec{V}\right\rangle$$

# 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

– Expandido-se o termo que apresenta o divergente e realizando-se manipulações adequadas, obtém-se

$$\boxed{\rho \frac{D\left(e+V^2/2\right)}{Dt} = -\left\langle \nabla, \rho \cdot \vec{f} \right\rangle + \rho \cdot \dot{q} + \rho \left\langle \vec{f}, \vec{V} \right\rangle}$$

– Esta é uma forma de se aplicar a primeira lei da termodinâmica a um elemento de fluido de identidade fixa em movimento; nota-se, contudo, que a energia para o elemento em movimento é a energia total.

# 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

- Formas alternativas da equação da energia:
  - Baseada na energia interna:

$$\boxed{\rho \frac{De}{Dt} = -p\left\langle \nabla, \vec{V} \right\rangle + \rho \cdot \dot{q}}$$

  - Baseada na entalpia:

$$\boxed{\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{D\,p}{Dt} + \rho \cdot \dot{q}}$$

# 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

– Baseada na entalpia total (ou de estagnação):

$$\boxed{\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \cdot \dot{q} + \rho \left\langle \vec{f}, \vec{V} \right\rangle}$$

– Da formulação anterior, observa-se que a entalpia total de um elemento fluido em movimento em um escoamento invíscido pode sofrer variações devido a:

- Efeitos transientes: $\partial p / \partial t \neq 0$

# 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

- Transferência de calor: $\dot{q} \neq 0$
- Forças de corpo: $\left\langle \vec{f}, \vec{V} \right\rangle \neq 0$

– No caso de um escoamento compressível, adiabático e sem efeitos de forças de corpo, tem-se:

$$\boxed{\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t}}$$

# 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

– A partir da expressão anterior, no caso de regime permanente, um resultado importante é que

$$h_0 = const$$

– Neste caso, para um escoamento invíscido, adiabático e em regime permanente, a entalpia total é constante ao longo de uma dada linha de corrente.

# 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

– Baseada na energia interna e no volume específico:

$$\boxed{\frac{De}{Dt} + p\frac{D\upsilon}{Dt} - \dot{q} = 0}$$

- As formas não-conservativas das equações governantes envolvem as propriedades de um elemento de fluido que se move ao longo do escoamento, apresentando, por isso, derivadas substantivas.

# 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

- No caso da forma conservativa, as equações foram obtidas para um volume de controle fixo no espaço.
- O termo "não-conservativo" não significa que o princípio físico da conservação de propriedades seja violado. Fisicamente, tanto a forma conservativa quanto a não-conservativa são descrições teóricas válidas e equivalentes de um escoamento.

# 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

- Os termos “conservativo” e “não-conservativo” estão relacionados à dinâmica de fluidos computacional (CFD), para a qual a forma conservativa é a mais empregada, pois garante a conservação das propriedades do escoamento na discretização do modelo matemático, algo que não ocorre espontaneamente para as equações na forma não-conservativa.

# 6.5 Equação da entropia

- Combinando-se a primeira e a segunda leis da termodinâmica e aplicando-as a um elemento de fluido em movimento obtém-se

$$\boxed{T\frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p\frac{D\upsilon}{Dt}}$$

- A equação anterior é chamada de equação da entropia e é válida também para escoamentos não-adiabáticos viscosos.

# 6.5 Equação da entropia

- No caso de um escoamento invíscido e adiabático, tem-se

$$\boxed{\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad ou \quad s = const}$$

- Para a solução da maioria dos problemas de escoamentos compressíveis, as equações da continuidade, do momentum e da energia são suficientes.

# 6.5 Equação da entropia

- A equação da entropia só é necessária para calcular a direção de algum processo que possa ocorrer.
- Para escoamentos isentrópicos, contudo, por conveniência pode ser interessante substituir a equação da energia ou do momentum pela equação da entropia.

# 6.6 Teorema de Crocco

- Considerando-se um elemento de fluido que se move ao longo de um escoamento. Neste caso, o movimento de tal elemento é composto por uma parcela translacional e uma rotacional. A translacional é denotada pela velocidade $\vec{V}$. A rotacional é denotada pela velocidade angular $\omega$, que se relaciona com a velocidade através da relação

$$\omega = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{V}$$

# 6.6 Teorema de Crocco

- O termo $\nabla \times \vec{V}$ é denominado vorticidade do fluido e é igual ao dobro da velocidade angular.
- Deseja-se obter uma relação entre a vorticidade do fluido e propriedades termodinâmicas do mesmo. Para tanto, emprega-se a equação de Euler, sem efeito de forças de corpo:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p$$

# 6.6 Teorema de Crocco

- Combinando-se, então, a primeira e a segunda leis da termodinâmica, bem como a definição de entalpia total, tem-se

$$\boxed{T \cdot \nabla s = \nabla h_0 - \vec{V} \times \left( \nabla \times \vec{V} \right) + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}}$$

- A relação anterior foi originalmente obtida por L. Crocco em 1937, sendo por isso chamada de teorema de Crocco.

# 6.6 Teorema de Crocco

- Para regime permanente, o teorema de Crocco se torna

$$\boxed{T \cdot \nabla s = \nabla h_0 - \vec{V} \times \left( \nabla \times \vec{V} \right)}$$

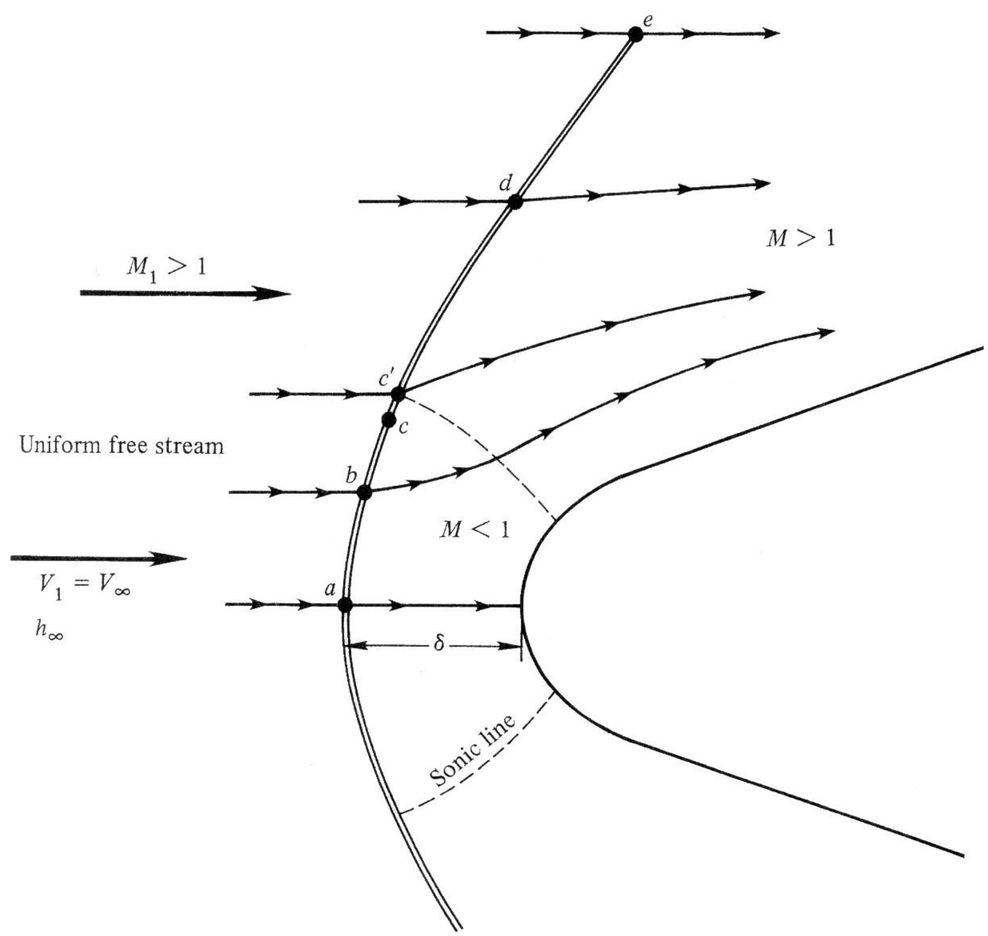
- Rearranjando-se:

$$\vec{V} \times \underbrace{\left( \nabla \times \vec{V} \right)}_{\text{vorticidade}} = \underbrace{\nabla h_0}_{\substack{\text{gradiente de} \\ \text{entalpia total}}} - \underbrace{T \cdot \nabla s}_{\substack{\text{gradiente de} \\ \text{entropia}}}$$

# 6.6 Teorema de Crocco

- Quando um escoamento em regime permanente apresenta gradientes de entalpia e/ou de entropia, o escoamento é rotacional. Isto tem consequências práticas sobre o escoamento a jusante de uma onda de choque curva.

# 6.6 Teorema de Crocco



# 6.6 Teorema de Crocco

- Na região 1, a montante do choque, todas as linhas de corrente são paralelas e apresentam a mesma entropia total.
- Com relação à entalpia total, nota-se que ela é a mesma nas porções anterior e posterior ao choque. Assim, o gradiente de entalpia deve ser nulo.

# 6.6 Teorema de Crocco

- As linhas de corrente, contudo, passam por diferentes regiões do choque: por exemplo, a linha (b) atravessa uma porção do choque mais curva que a linha (d), que atravessa uma região mais fraca do choque. Assim, a linha de corrente que passa por (b) sofre uma maior variação de entropia que a linha que passa por (d).

# 6.6 Teorema de Crocco

- Deste modo, o gradiente de entropia na região 2 não é nula, ou seja, pelo teorema de Crocco

$$\vec{V} \times \left( \nabla \times \vec{V} \right) \neq 0$$

ou seja,

$$\nabla \times \vec{V} \neq 0$$

a jusante do choque.

# 6.6 Teorema de Crocco

- Tem-se, assim, pelo teorema de Crocco, que um campo de escoamento a jusante de um choque é rotacional (infelizmente). Isto, pois, um escoamento rotacional é muito mais difícil de ser analisado que um escoamento irrotacional.