

# Escoamentos compressíveis

## Aula 08

Equação do potencial de  
velocidade

# 8.1 escoamento irrotacional

- Vorticidade:  $\nabla \times \vec{V}$

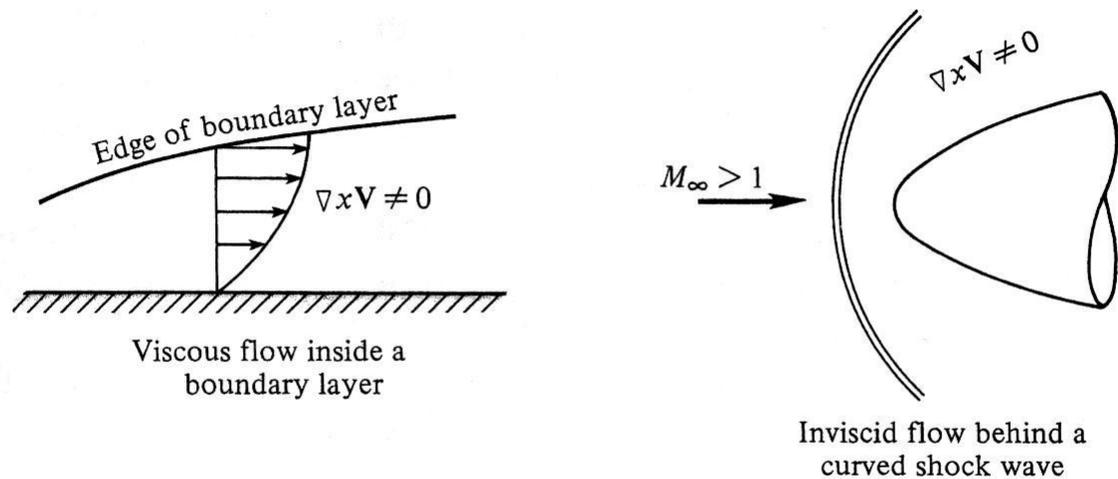


Figure 8.1 | Examples of rotational flows.

# 8.1 Escoamento irrotacional

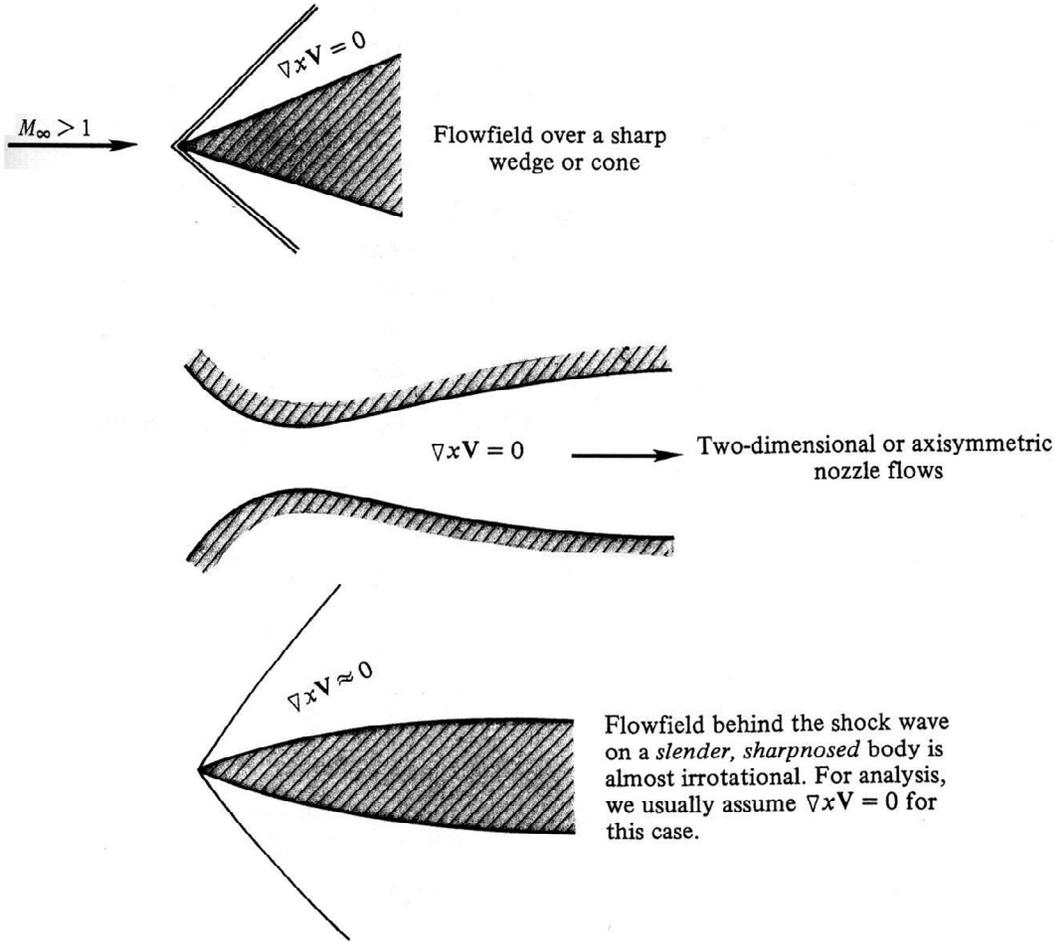


Figure 8.2 | Examples of irrotational flows.

# 8.1 Escoamento irrotacional

- Escoamentos irrotacionais são, em geral, mais simples de analisar que os rotacionais, pois a condição de irrotacionalidade  $\nabla \times \vec{V} = 0$  fornece uma simplificação extra para as equações gerais do movimento.

# 8.1 Escoamento irrotacional

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{i} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

- Condições irrotacionais:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

# 8.1 Escoamento irrotacional

- Equação de Euler na ausência de forças de corpo:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p$$

- Considerando-se regime permanente e tomando-se  $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$ , tem-se:

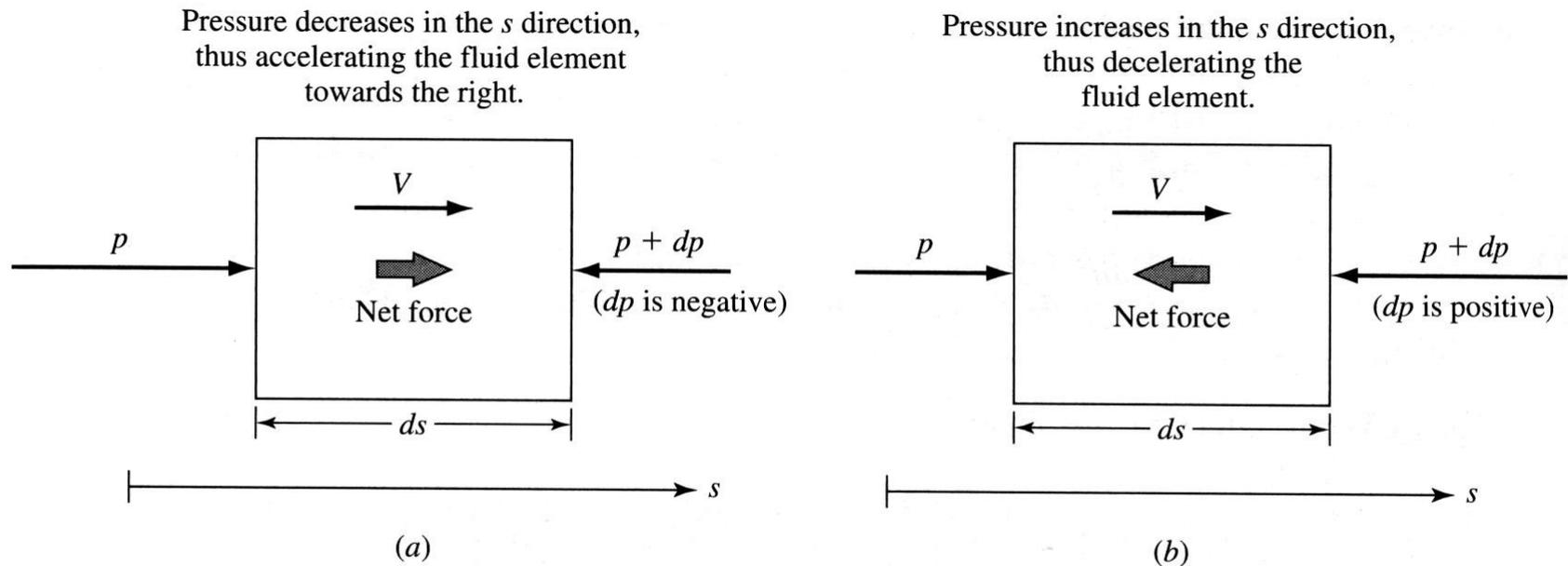
$$dp = -\rho \cdot V \cdot dV$$

## 8.1 Escoamento irrotacional

- A forma especial anterior da Equação de Euler é válida para qualquer direção em um escoamento irrotacional sem forças de corpo ou sobre uma linha de corrente em um escoamento rotacional.
- Observa-se um princípio físico básico para escoamentos invíscidos: se a pressão diminui ao longo de uma direção, a velocidade deve crescer nessa mesma direção (Princípio de Bernoulli).

# 8.1 Escoamento irrotacional

- Princípio de Bernoulli:



**Figure 8.3** | Illustration of pressure gradient effect on the velocity of a fluid element. (a) Decreasing pressure in the flow direction increases the velocity. (b) Increasing pressure in the flow direction decreases the velocity.

## 8.2 Equação do potencial de velocidade

- Considere um vetor  $\vec{A}$ . Se  $\nabla \times \vec{A} = 0$ , então tal vetor pode ser expresso como  $\nabla \zeta$  onde  $\zeta$  é uma função escalar. Isto é proveniente da identidade vetorial,  $rot(grad) \equiv 0$ . Então:

$$\nabla \times \nabla \zeta = 0$$

onde  $\zeta$  é uma função escalar qualquer. Para um escoamento irrotacional,  $\nabla \times \vec{V} = 0$ . Defina-se, então, uma função escalar

$$\Phi = \Phi(x, y, z)$$

## 8.2 Equação do potencial de velocidade

de modo que:

$$\vec{V} \equiv \nabla\Phi$$

onde  $\Phi$  é chamado de potencial de velocidades. Em coordenadas cartesianas:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \vec{k}$$

e assim:

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

## 8.2 Equação do potencial de velocidade

- Assumindo-se regime permanente e escoamento isentrópico, a equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\rho(\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) + \Phi_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \Phi_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \Phi_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

- Observa-se que os subíndices se referem a derivadas parciais.

## 8.2 Equação do potencial de velocidade

- Equação de Euler (momentum):

$$d p = -\rho \cdot d \left( \frac{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}{2} \right)$$

- Da equação da definição da velocidade do som, obtém-se:

$$d \rho = -\frac{\rho}{a^2} \cdot d \left( \frac{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}{2} \right)$$

## 8.2 Equação do potencial de velocidade

- Considerando-se as equações anteriores, obtém-se a equação do potencial de velocidade:

$$\left(1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2}\right)\Phi_{xx} + \left(1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2}\right)\Phi_{yy} + \left(1 - \frac{\Phi_z^2}{a^2}\right)\Phi_{zz} - \frac{2 \cdot \Phi_x \cdot \Phi_y}{a^2}\Phi_{xy} - \frac{2 \cdot \Phi_x \cdot \Phi_z}{a^2}\Phi_{xz} - \frac{2 \cdot \Phi_y \cdot \Phi_z}{a^2}\Phi_{yz} = 0$$

## 8.2 Equação do potencial de velocidade

- Utilizando-se, ainda a equação da energia, tendo-se por hipótese um gás caloricamente perfeito, obtém-se da expressão anterior:

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2)$$

Como  $a_0$  é uma constante conhecida do escoamento, a equação anterior fornece a velocidade do som  $a$  em função de  $\Phi$ .

## 8.2 Equação do potencial de velocidade

- Procedimento geral de solução para campos de escoamentos irrotacionais, isentrópicos:
  - Obter  $\Phi$  para as condições de contorno especificadas para o problema.
  - Calcular  $u, v, w$ . Obter, então  $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$
  - Obter  $a$ .
  - Calcular  $M = V/a$ .
  - Calcular  $T, p, \rho$ .

## 8.2 Equação do potencial de velocidade

- Não existe uma forma fechada (solução analítica) geral para a equação do potencial de velocidade, de modo que sua solução é normalmente obtida de uma das formas seguintes:
  - Solução numérica exata. Neste caso, destaca-se a simulação numérica com ferramentas de CFD (“Computational Fluid Dynamics”).

## 8.2 Equação do potencial de velocidade

- Transformação de variáveis. Aplicável a poucos casos, realiza-se a mudança de variáveis de modo a se obter uma forma linear (porém ainda exata) da equação do potencial de velocidades.
- Soluções linearizadas. As equações originais não-lineares são substituídas por equações lineares aproximadas, para as quais existe solução analítica.