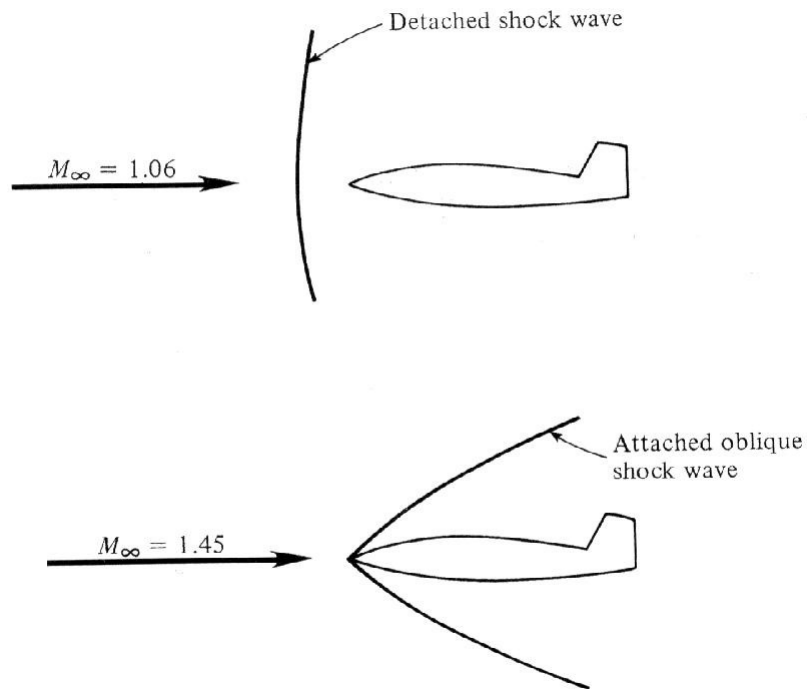


Escoamentos Compressíveis

Capítulo 03

Escoamento unidimensional

3.1 Introdução

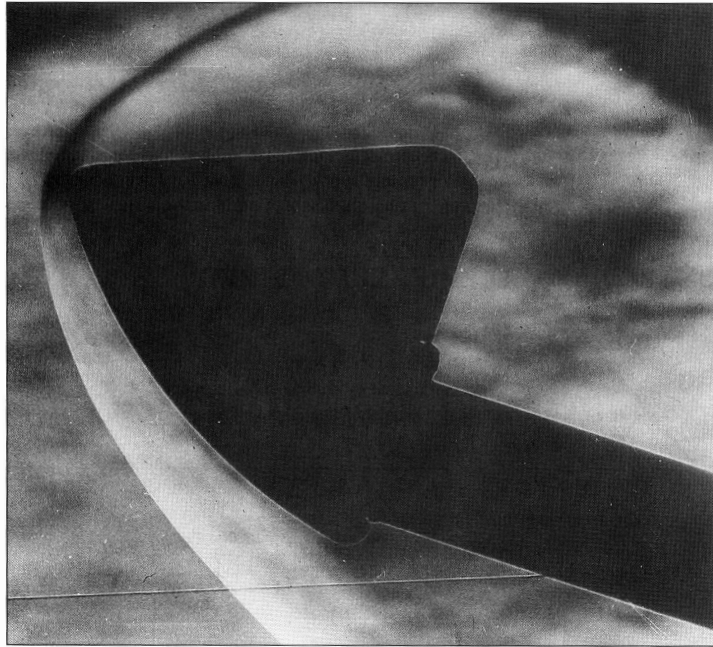


- 14 de outubro de 1947: Chuck Yeager a bordo do Bell XS-1 torna-se o primeiro homem a voar a velocidade superior à do som.
- 26 de março de 1948: durante um mergulho, o capitão Chuck Yeager atinge Mach 1,45 durante um mergulho com o Bell XS-1.

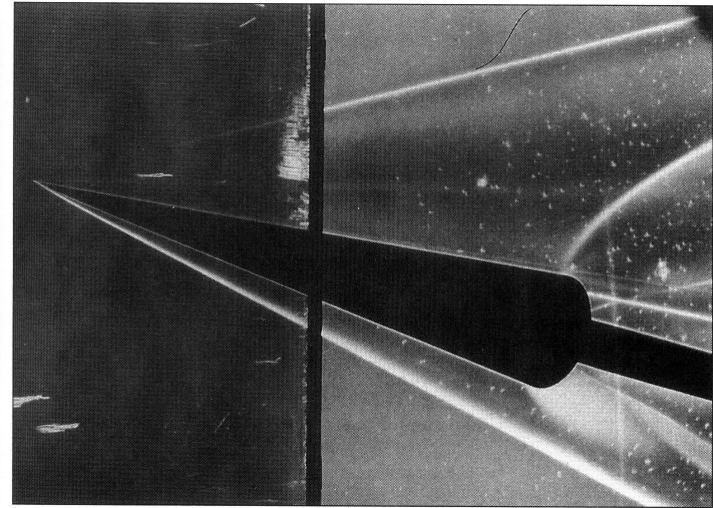
3.1 Introdução

- Escoamento unidimensional:
 - Todas as propriedades do escoamento são funções de uma única dimensão espacial.
 - A área da seção transversal é constante.
 - Mecanismos físicos envolvidos:
 - Ondas de choque normais.
 - Trocas térmicas.
 - Atrito.

3.1 Introdução

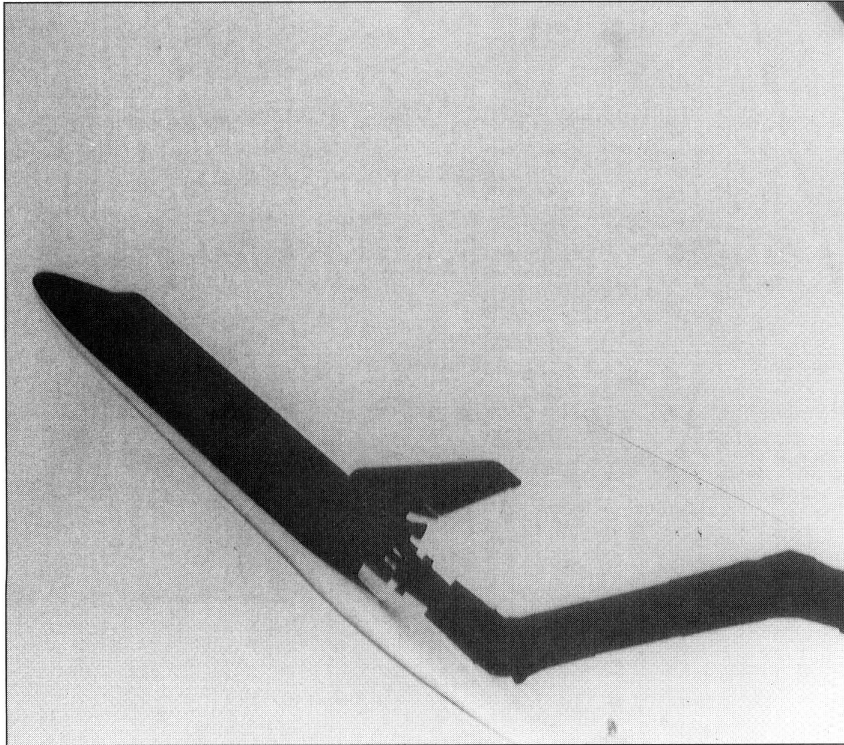


Onda de choque sobre o módulo de comando da Apollo. Modelo em túnel de vento com $\alpha=33^\circ$ no túnel de vento Langley (Nasa), para ar ionizado com densidade variável a Mach 8.

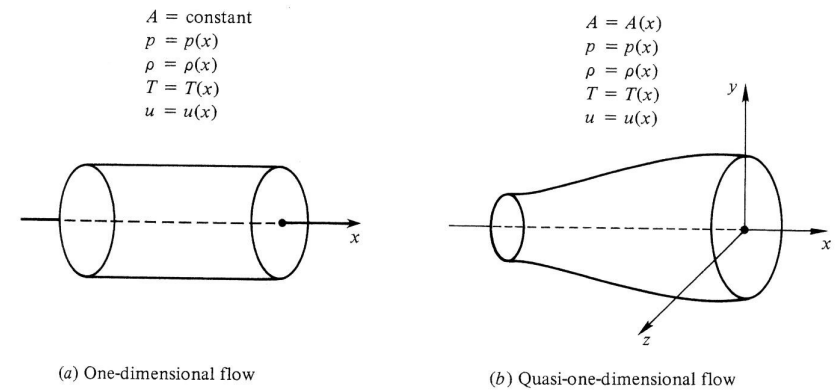


Ondas de choque em um cone de nariz pontiagudo em ângulo de ataque.

3.1 Introdução



Ondas de choque em um túnel de vento para um modelo do ônibus espacial (space shuttle)



Comparação entre os escoamentos unidimensional e quase-unidimensional.

3.1 Introdução

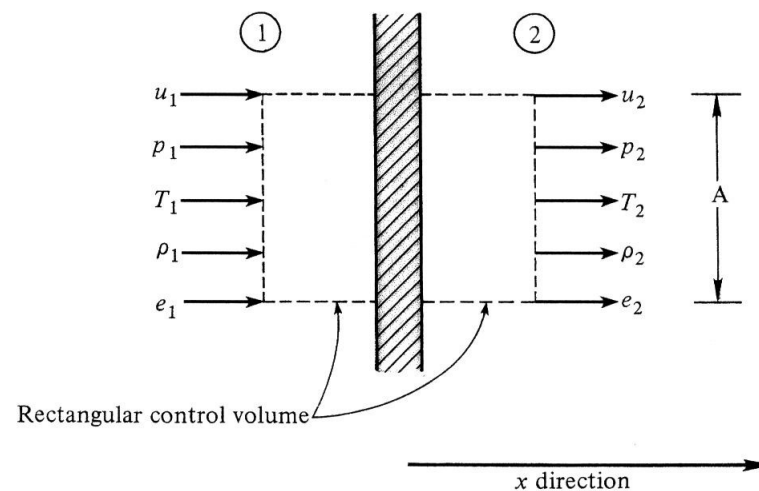
- Choques normais:
 - Propriedades na região do “nariz” de um corpo rombudo movendo-se a velocidades supersônicas.
 - Tomada de ar do motor de alguns aviões a jato.

3.1 Introdução

- Trocas térmicas:
 - Efeito da queima de combustível em um motor a jato.
- Atrito:
 - Análise do escoamento de um gás através de tubulações longas.

3.2 Equações governantes de escoamentos unidimensionais

- Considerações:
 - Área da seção transversal ao escoamento constante.
 - Regime permanente.
 - Ausência de forças de corpo.



3.2 Equações governantes de escoamentos unidimensionais

- Equação da continuidade:

$$-\oiint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$$

$$\oiint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$-\rho_1 u_1 A + \rho_2 u_2 A = 0$$

$$\boxed{\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2}$$

3.2 Equações governantes de escoamentos unidimensionais

- Equação do momentum:

$$\oiint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) \vec{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{f} d\mathcal{V} - \oiint_S p d\vec{S}$$

$$\oiint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) \vec{V} = -\oiint_S p d\vec{S}$$

$$\oiint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) u = -\oiint_S (p dS)_x$$

3.2 Equações governantes de escoamentos unidimensionais

- Equação do momentum:

$$\rho_1 (-u_1 A) u_1 + \rho_2 (u_2 A) u_2 = -(p_1 A + p_2 A)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

3.2 Equações governantes de escoamentos unidimensionais

- Equação da energia:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \dot{q} \rho d\mathcal{V} - \iint_S p \vec{V} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \rho (\vec{f} \cdot \vec{V}) d\mathcal{V} &= \\ = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left(u' + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} + \iint_S \rho \left(u' + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

$$\dot{Q} - \iint_S p \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_S \rho \left(u' + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

3.2 Equações governantes de escoamentos unidimensionais

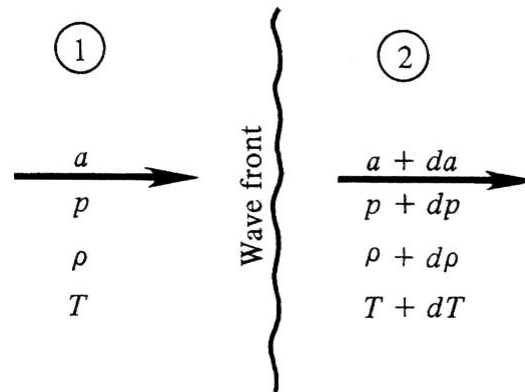
- Equação da energia:

$$\frac{\dot{Q}}{A} + p_1 u_1 + \rho_1 \left(u'_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_1 = p_2 u_2 + \rho_2 \left(u'_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_2$$

$$\frac{\dot{Q}}{\rho_1 u_1 A} + \frac{p_1}{\rho_1} + u'_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + u'_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

3.3 Velocidade do som e número de Mach



- Equação da continuidade:

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a + da)$$

$$a = -\rho \frac{da}{d\rho}$$

3.3 Velocidade do som e número de Mach

- Equação do momentum:

$$p + \rho a^2 = (p + dp) + (\rho + d\rho)(a + da)^2$$

$$dp = -2 a \rho da - a^2 d\rho$$

$$da = \frac{dp + a^2 d\rho}{-2 a \rho}$$

$$a = -\rho \left[\frac{dp/d\rho + a^2}{-2 a \rho} \right]$$

3.3 Velocidade do som e número de Mach

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

- As variações que ocorrem através de uma onda sonora são pequenas, sendo os efeitos irreversíveis desprezíveis.

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$

3.3 Velocidade do som e número de Mach

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = - \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_s v^2 = - \frac{v}{(1/v)(\partial v / \partial p)_s} = \frac{v}{\tau_s}$$

$$a = \sqrt{\frac{v}{\tau_s}}$$

- Nota-se que para um escoamento incompressível, a velocidade do som deveria ser infinita

3.3 Velocidade do som e número de Mach

- Para um gás caloricamente perfeito:

$$p v^\gamma = \text{const}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}$$

$$a = \sqrt{\gamma R T}$$

3.4 Definição de parâmetros de escoamento

- Propriedades características: seriam as propriedades de dado escoamento se o mesmo fosse acelerado ou desacelerado isentropicamente até o número de Mach unitário.
- Propriedades de estagnação (ou totais): seriam as propriedades de dado escoamento desacelerado isentropicamente até que sua velocidade seja nula.

3.4 Definição de parâmetros de escoamento

- Número de Mach característico: $M^* = \frac{V}{a^*}$
- Velocidade de estagnação do som:

$$a_0 = \sqrt{\gamma RT_0}$$

- Massa específica total:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}$$

3.5 Formas alternativas da equação da energia

- Considerando-se um gás em que não haja adição de calor:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

- Para um gás caloricamente perfeito:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

3.5 Formas alternativas da equação da energia

$$\frac{p_0}{p} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)}$$

- Outras relações úteis:

$$\left(\frac{a^*}{a_0} \right)^2 = \frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}$$

3.5 Formas alternativas da equação da energia

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

- Para o ar em condições padrão ($\gamma = 1,40$):

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,833; \quad \frac{p^*}{p_0} = 0,528; \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,634$$

3.5 Formas alternativas da equação da energia

- Relação entre número de Mach real e característico:

$$M^2 = \frac{2}{[(\gamma+1)/M^{*2}] - (\gamma-1)}$$

- Relações:

$$M^* = 1, \quad \text{se } M = 1$$

$$M^* < 1, \quad \text{se } M < 1$$

$$M^* > 1, \quad \text{se } M > 1$$

$$M^* \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}, \quad \text{se } M \rightarrow \infty$$

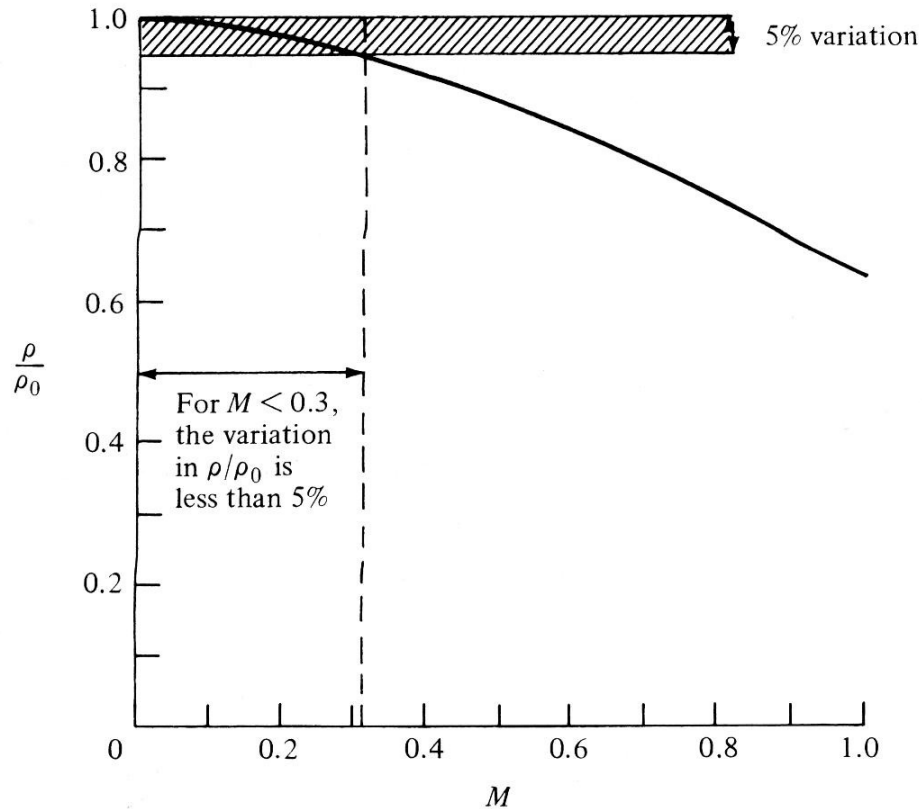
3.6 Escoamentos compressíveis e incompressíveis

- Considere um elemento de fluido inicialmente em repouso, que seja acelerado isentropicamente a alguma velocidade V e número de Mach M . Nesse caso, a densidade pode ser estimada pela relação:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma-1)}$$

3.6 Escoamentos compressíveis e incompressíveis

- Para $\gamma = 1,40$:



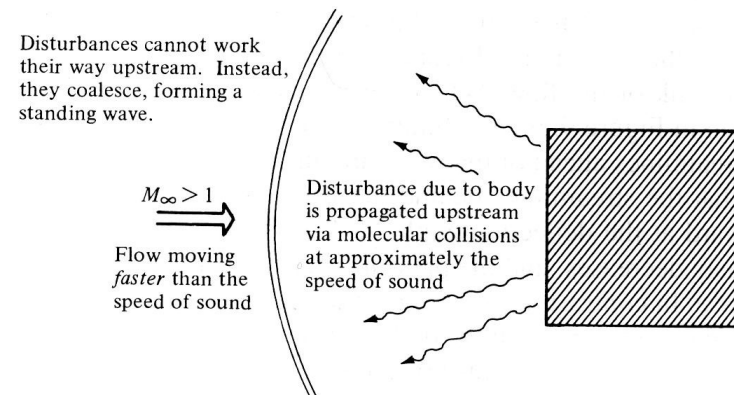
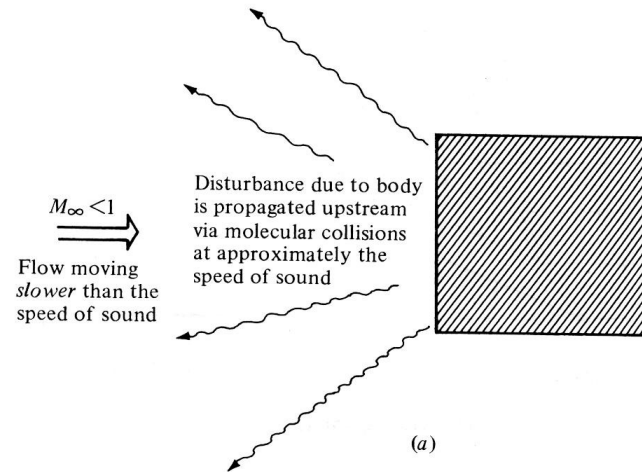
3.7 Relações para choques normais

- Ocorrem frequentemente como parte de muitos campos de escoamentos supersônicos.
- Por definição, uma onda de choque normal é perpendicular ao escoamento.
- Corresponde a uma região muito fina (espessura da ordem de poucas vezes o livre caminho médio molecular, da ordem de micrômetros).

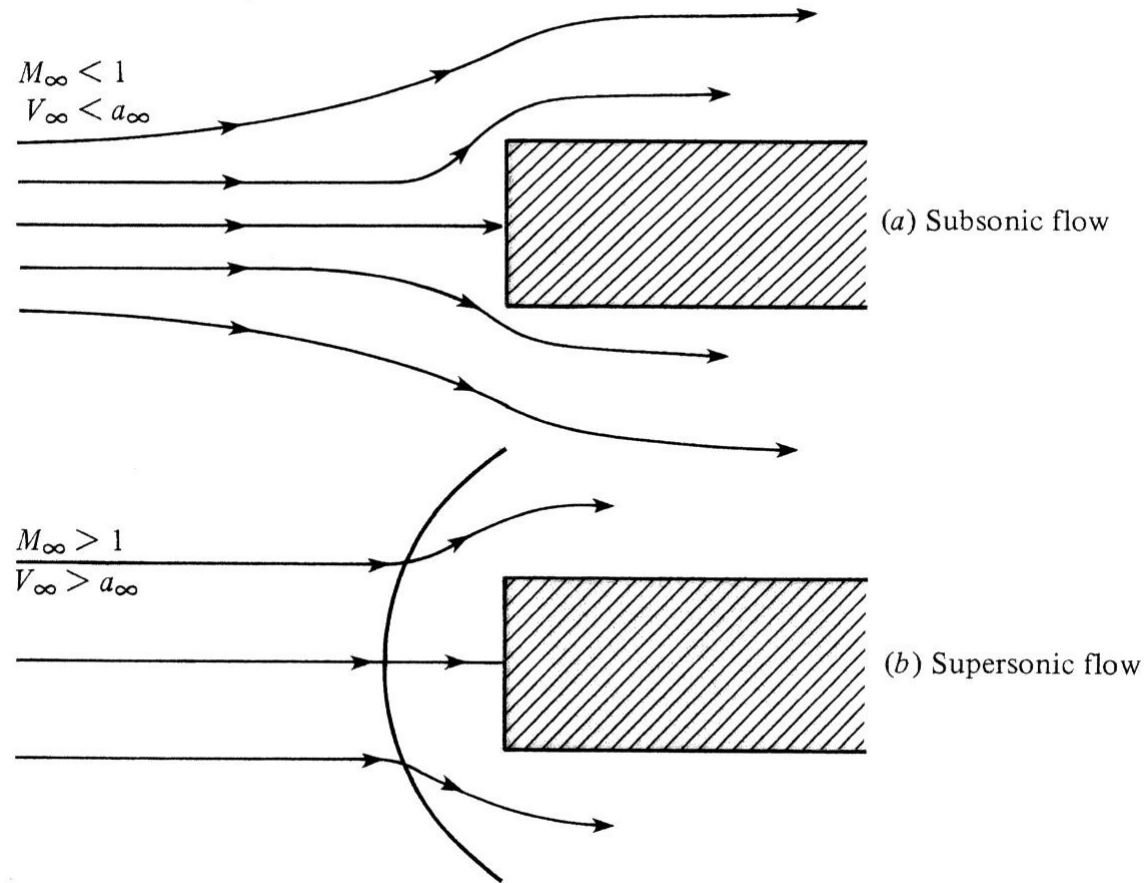
3.7 Relações para choques normais

- À frente da onda (montante), o escoamento é supersônico; atrás (jusante), é subsônico.
- Solução da natureza para um problema relacionado à propagação de distúrbios no escoamento.

3.7 Relações para choques normais



3.7 Relações para choques normais



3.7 Relações para choques normais

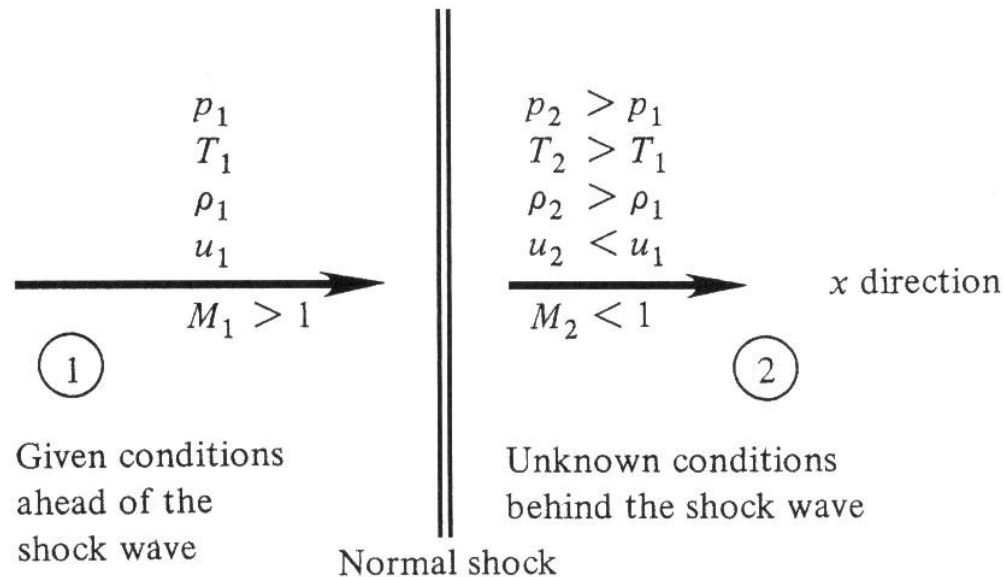
- A presença de um corpo em um escoamento é propagada através de ondas sonoras.
- À montante da onda, o escoamento não possui nenhum conhecimento da presença do corpo.
- À jusante, como o escoamento é subsônico, as linhas de corrente variam rapidamente para compensar o obstáculo.

3.7 Relações para choques normais

- Hipóteses:
 - Considerar as ondas de choque como descontinuidades através das quais as propriedades do escoamento rapidamente se modificam.
 - Todas as propriedades a montante (índice 1) são conhecidas.
 - Não há trocas térmicas enquanto o escoamento atravessa a onda (caso adiabático).

3.7 Relações para choques normais

- Hipóteses:
 - Gás caloricamente perfeito.



3.7 Relações para choques normais

- Sistema de equações:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$p = \rho R T$$

$$h = c_p T$$

3.7 Relações para choques normais

- Relação de Prandtl:

$$a^* = u_1 u_2$$

da qual se obtém:

$$M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$$

$$M_2^2 = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2]M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)/2}$$

3.7 Relações para choques normais

- O número de Mach a jusante de um choque é função apenas do número de Mach a montante.
- Quando $M_1 = 1$, tem-se $M_2 = 1$. Nesse caso, o choque normal é infinitamente fraco, sendo denominado **Onda de Mach**.

$$M_1 \rightarrow \infty; \quad M_2 \rightarrow \sqrt{(\gamma - 1)/(2\gamma)}$$

3.7 Relações para choques normais

- As propriedades do escoamento podem ser obtidas a partir do número de Mach a montante do choque:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)$$

3.7 Relações para choques normais

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} \right]$$

- Para gases termicamente perfeitos, as relações apresentadas não são válidas, pois as propriedades a jusante dependem também da temperatura a montante.
- No caso de um gás quimicamente reativo, também é necessário o conhecimento da pressão a montante.

3.7 Relações para choques normais

- Casos-limite para gás caloricamente perfeito, $\gamma = 1,40$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} M_2 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = 0,378$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 6$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_2}{p_1} = \infty; \quad \lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{T_2}{T_1} = \infty$$

3.7 Relações para choques normais

- Matematicamente, as relações obtidas são válidas para qualquer regime de velocidades; fisicamente, apenas no caso de escoamentos supersônicos tais relações podem ser empregadas. Para mostrar tal fato, é necessário utilizar a segunda lei da termodinâmica, que origina a seguinte expressão:

3.7 Relações para choques normais

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left\{ \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[\frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2} \right] \right\} \\ - R \ln \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]$$

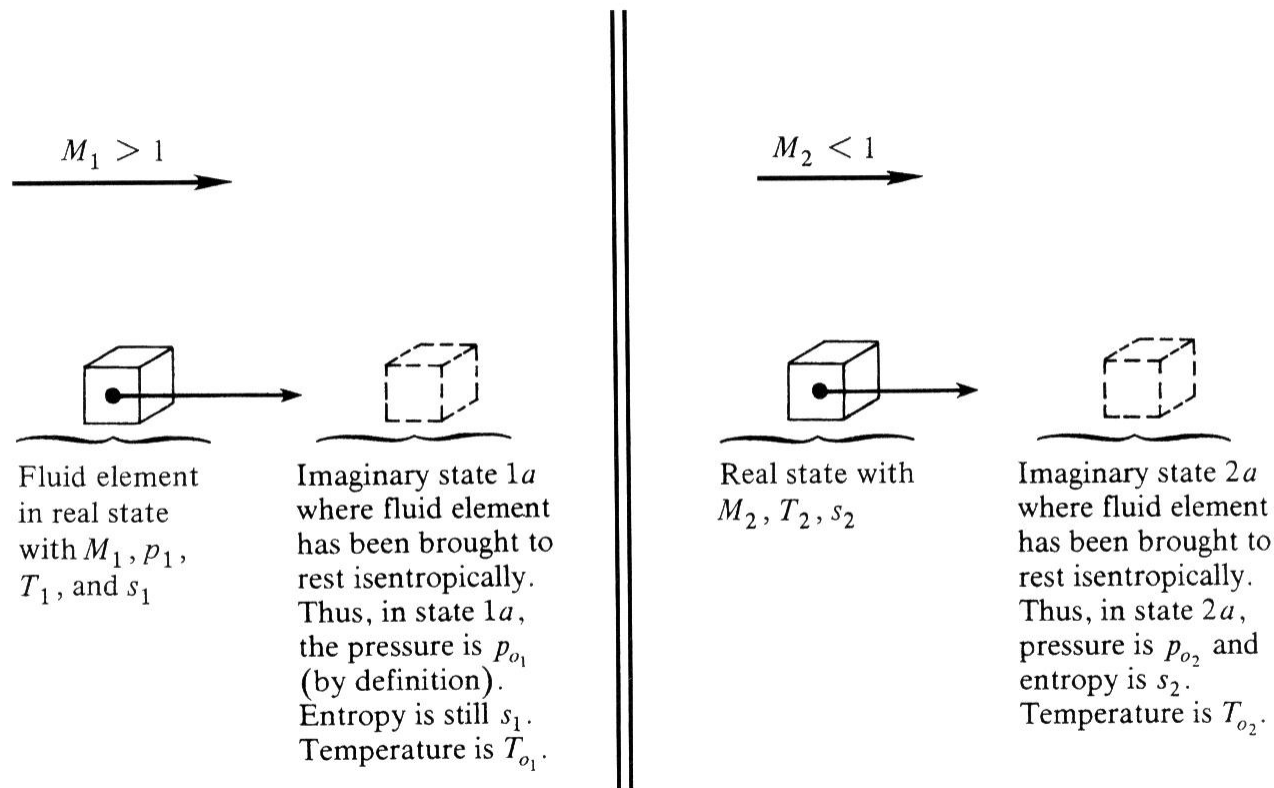
- Nesse caso, a variação de entropia só será positiva se o escoamento a montante for supersônico.

3.7 Relações para choques normais

- O aumento de entropia é originado pelos efeitos viscosos (atrito e condução de calor).
- Como as variações de propriedades ocorrem em distâncias muito pequenas, os gradientes originados são elevados e os efeitos viscosos se tornam importantes.

3.7 Relações para choques normais

- Propriedades totais ou de estagnação:



3.7 Relações para choques normais

- Propriedades totais ou de estagnação:

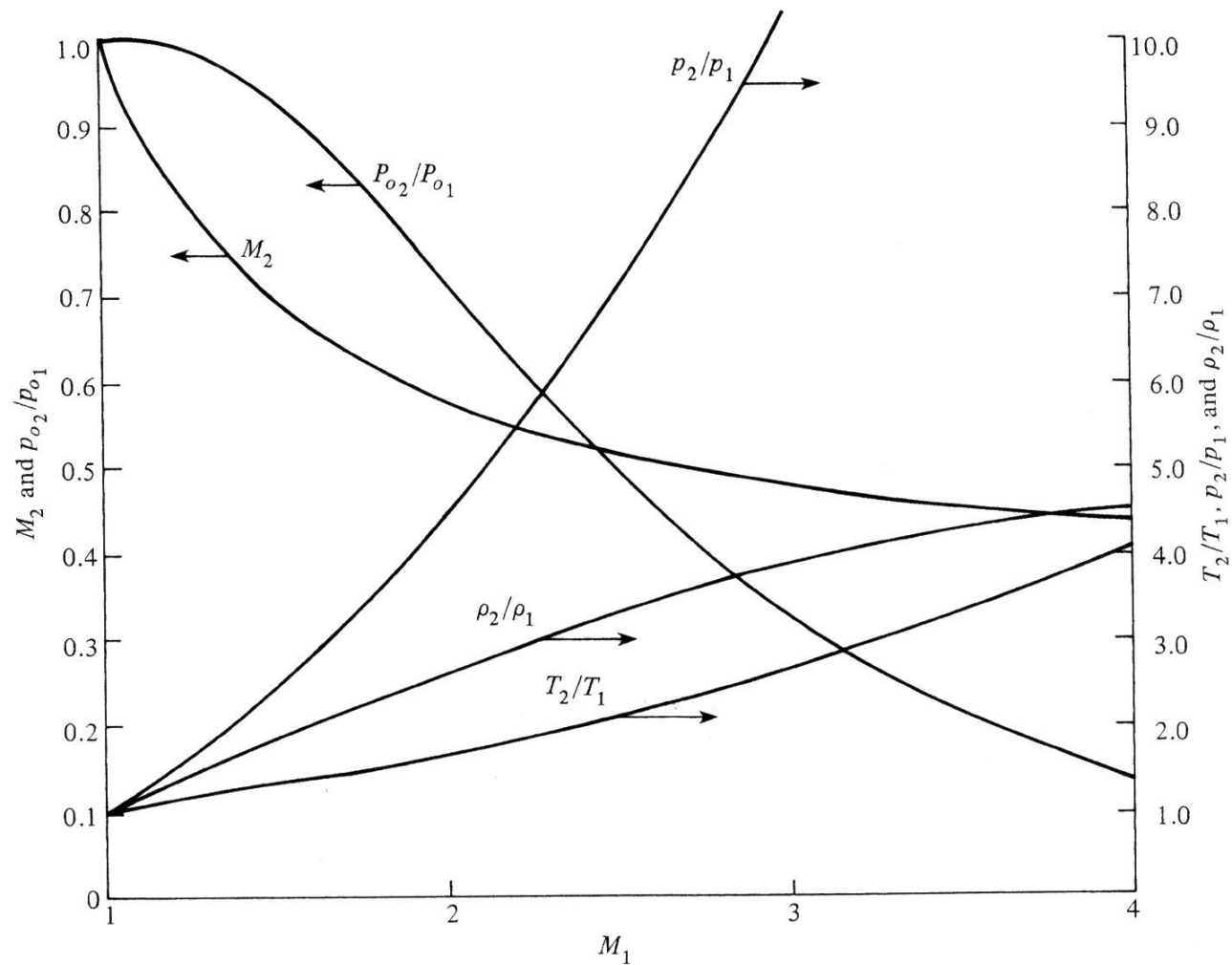
$$T_{01} = T_{02}$$

- A temperatura total é constante através da onda de choque

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp\left[-\frac{(s_2 - s_1)}{R}\right]$$

- A pressão total diminui ao se atravessar a onda de choque

3.7 Relações para choques normais

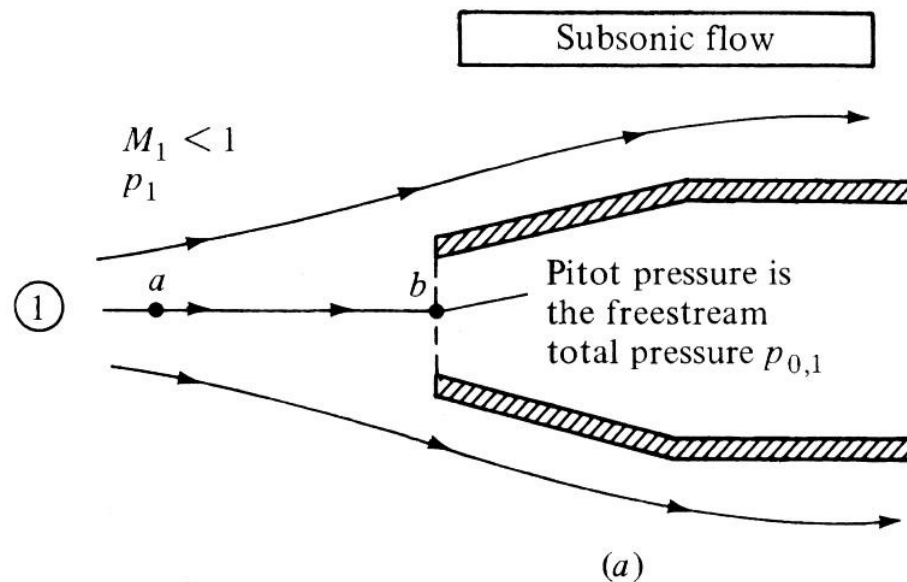


3.7 Relações para choques normais

- Medição da velocidade em um escoamento compressível:
 - Como no caso de escoamentos incompressíveis, são necessárias as pressões estática e obtida através de um tubo de Pitot.
 - As fórmulas empregadas para a obtenção da velocidade, contudo, diferem de acordo com o regime de velocidades.

3.7 Relações para choques normais

- Medição da velocidade em um escoamento compressível:
 - Escoamento subsônico.



3.7 Relações para choques normais

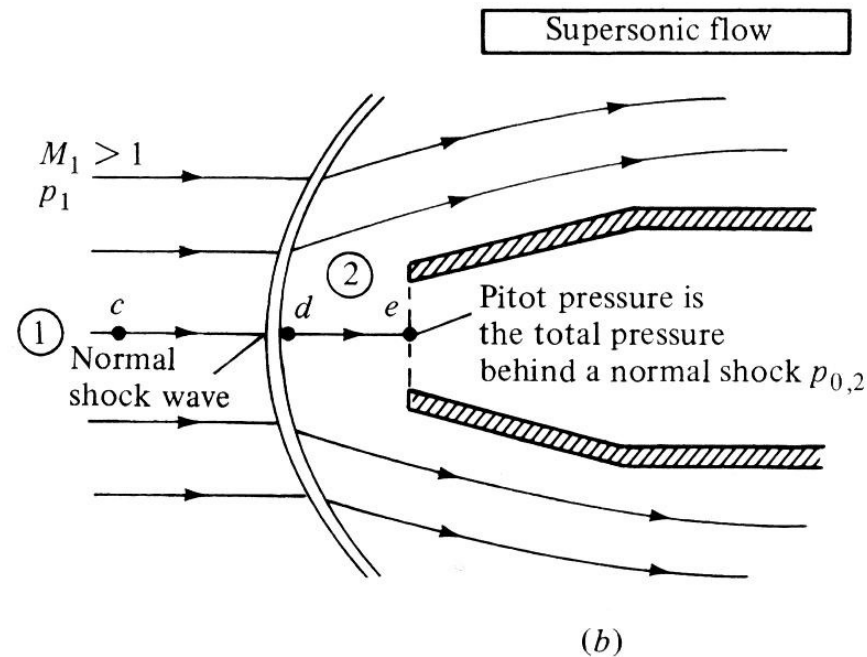
- Medição da velocidade em um escoamento compressível:
 - Escoamento subsônico.

$$\frac{p_{0,1}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad M_1^2 = \frac{2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_{0,1}}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$

$$u_1^2 = \frac{2a_1^2}{\gamma-1} \left[\left(\frac{p_{0,1}}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$

3.7 Relações para choques normais

- Medição da velocidade em um escoamento compressível:
 - Escoamento supersônico.



3.7 Relações para choques normais

- Medição da velocidade em um escoamento compressível:
 - Escoamento supersônico: fórmula de Rayleigh para tubo de Pitot.

$$\frac{p_{0,2}}{p_1} = \left[\frac{(\gamma+1)^2 M_1^2}{4\gamma M_1^2 - 2(\gamma-1)} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \frac{1-\gamma+2\gamma M_1^2}{\gamma+1}$$

3.8 Equação de Hugoniot

- Comparação entre a onda de choque e um dispositivo termodinâmico para compressão de um gás.
- As variações através de uma onda de choque são expressas apenas em termos de variáveis puramente termodinâmicas, sem referências a velocidades ou a números de Mach.

3.8 Equação de Hugoniot

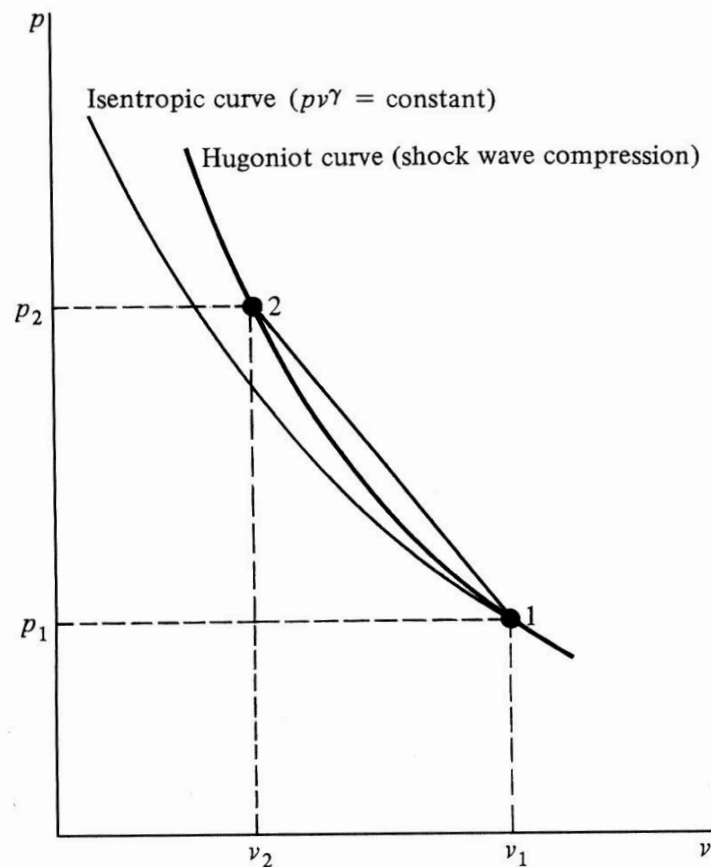
$$u'_2 - u'_1 = \frac{(p_1 + p_2)}{2} (v_1 - v_2)$$

- Relação geral que vale para todos os tipos de gases (perfeitos, reativos...).
- Relação funcional:

$$p_2 = f(p_1, v_1, v_2)$$

3.8 Equação de Hugoniot

- Curva de Hugoniot:



$$\frac{p_2 - p_1}{v_2 - v_1} = - \left(\frac{u_1}{v_1} \right)^2$$

Para gás caloricamente perfeito:

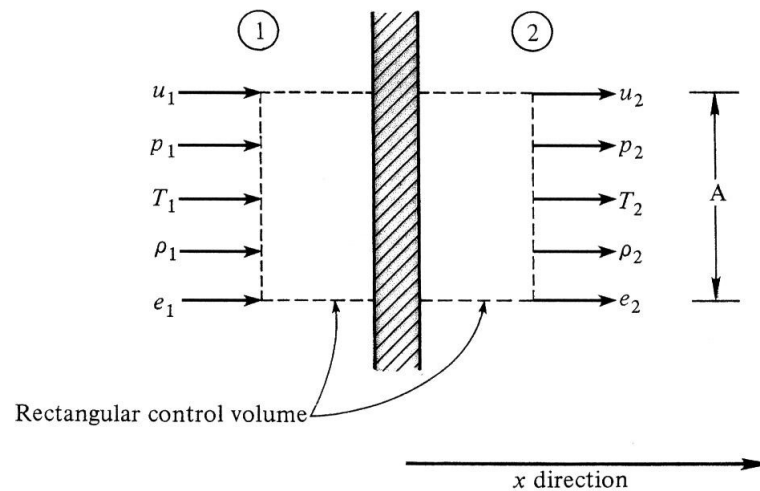
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) \frac{v_1}{v_2} - 1}{\left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \right) - \frac{v_1}{v_2}}$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Exemplos:
 - turbojatos (ou turborreatores), durante o processo de combustão.
 - escoamentos supersônicos em cavidades da dinâmica de gases moderna.
 - lasers químicos (calor efetivamente fornecido por reações químicas e desativação da energia vibracional molecular).
 - gás que absorve um intenso raio de radiação (túneis de vento aquecidos por laser).

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Hipóteses:
 - Gás caloricamente perfeito.



3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Equações governantes:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$p = \rho R T$$

$$h = c_p T$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Utilizando o conceito de temperatura de estagnação:

$$q = c_p (T_{02} - T_{01})$$

outras relações:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \right)^2 \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^2$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Empregando as condições para $M=1$:

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M^2} \left(\frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma} \right)$$

$$\frac{T}{T^*} = M^2 \left(\frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^2$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Empregando condições para $M=1$ e de estagnação:

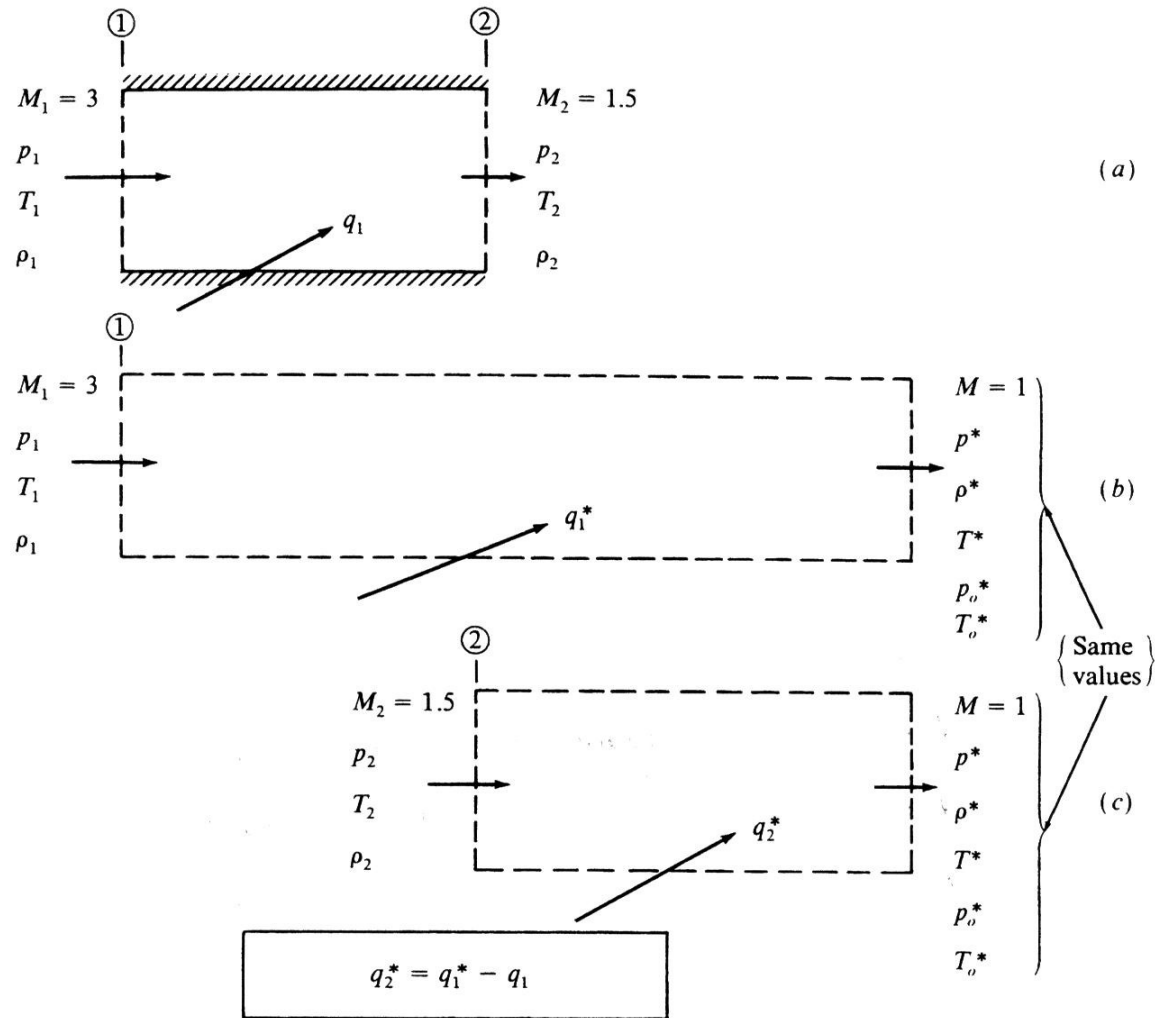
$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{\gamma/(\gamma - 1)}$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(1 + \gamma)M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} [2 + (\gamma - 1)M^2]$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Nota-se que para um dado escoamento, não importando as propriedades locais de escoamento, as condições para $M=1$ são constantes. Deve-se observar que nesse caso, supõe-se que a quantidade de calor fornecida seja suficiente para que o escoamento passe a ser sônico.

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas



3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:

- Da segunda lei da termodinâmica:

$$\frac{s - s_1}{c_p} = \ln \frac{T}{T_1} - \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \ln \frac{p}{p_1}$$

- E da expressão para a determinação da pressão:

$$M^2 = \frac{1}{\gamma} \left[\left(1 + \gamma M_1^2 \right) \frac{p_1}{p} - 1 \right]$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
 - Combinando-se as expressões para a determinação da pressão e da temperatura:

$$\frac{p_1}{p} = \frac{M_1}{M} \sqrt{\frac{T}{T_1}}$$

– ou seja,

$$\frac{p_1}{p} \sqrt{\frac{1}{\gamma} \left[(1 + \gamma M_1^2) \frac{p_1}{p} - 1 \right]} = M_1 \sqrt{\frac{T}{T_1}}$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
 - Elevando-se a expressão anterior ao quadrado:

$$\gamma M_1^2 \frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1} \right)^2 \left[\left(1 + \gamma M_1^2 \right) \frac{p_1}{p} - 1 \right]$$

- que pode ser simplificada originando

$$\left(\frac{p}{p_1} \right)^2 - \left(1 + \gamma M_1^2 \right) \left(\frac{p}{p_1} \right) + \gamma M_1^2 \left(\frac{T}{T_1} \right) = 0$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
 - Ao se solucionar a equação anterior para a razão entre pressões obtém-se:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{(1 + \gamma M_1^2)}{2} \pm \frac{\sqrt{(1 + \gamma M_1^2)^2 - 4\gamma M_1^2 (T/T_1)}}{2}$$

- Assim, a segunda lei da termodinâmica pode ser escrita como

$$\frac{s - s_1}{c_p} = \ln \frac{T}{T_1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \left[\frac{(1 + \gamma M_1^2)}{2} \pm \frac{\sqrt{(1 + \gamma M_1^2)^2 - 4\gamma M_1^2 (T/T_1)}}{2} \right]$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

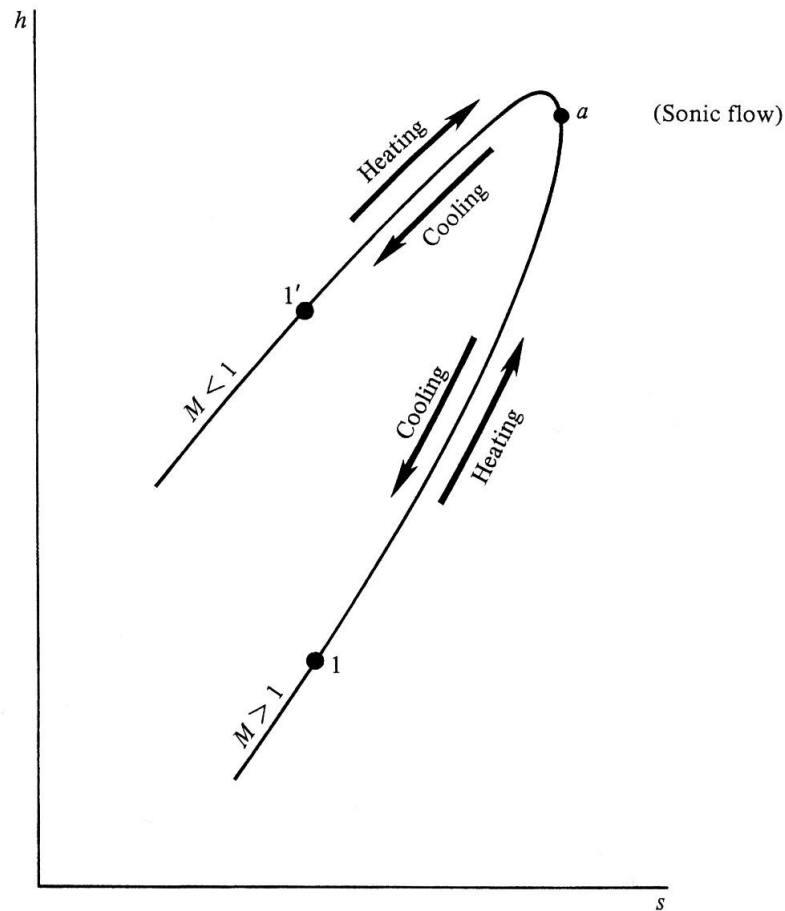
- Curva de Rayleigh:
 - Da expressão anterior, para que a raiz não seja negativa é necessário que:

$$\frac{T}{T_1} \leq \frac{(1 + \gamma M_1^2)^2}{4\gamma M_1^2}$$

- A plotagem da expressão anterior dá origem à chamada curva de Rayleigh, apresentada a seguir.

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:



3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
 - Ponto de tangência (ponto A):
 - Da equação da conservação da massa:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0$$

- Associada à equação do momentum:

$$dp + \rho u du = 0$$

- Tem-se:

$$u^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

3.9 escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
 - Ponto de tangência (ponto A):
 - A expressão anterior é válida para qualquer ponto do escoamento. Sabe-se ainda que:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = a^2$$

- Como o ponto A apresenta :

$$\frac{ds}{dT} = 0$$

- Então o escoamento é sônico em tal ponto.

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
 - Ponto de máximo (ponto B):
 - Como o ponto B é um ponto de máximo, tem-se que:

$$\frac{d(T/T_1)}{dM} = 0$$

- Deste modo,

$$\frac{d(T/T_1)}{dM} = \left[\frac{(1 + \gamma M_1^2)^2}{M_1^2} \right] \frac{(1 + \gamma M^2)^2 2M - M^2 2(1 + \gamma M^2) 2\gamma M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} = 0$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
 - Ponto de máximo (ponto B):
 - A expressão anterior pode ser simplificada para:

$$1 + \gamma M^2 = 2\gamma M^2$$

- ou seja,

$$M^2 = \frac{1}{\gamma}$$

- Isto significa que

$$M_B = \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
 - Ponto de máximo (ponto B):
 - Aplicando-se o número de Mach obtido na expressão da razão entre temperaturas, obtém-se:

$$\left(\frac{T}{T_1}\right)_{\max} = \frac{1}{4\gamma} \frac{(1 + \gamma M_1^2)^2}{M_1^2}$$

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh (adição de calor):
- Para escoamentos supersônicos:
 - O número de Mach diminui.
 - A pressão aumenta.
 - A temperatura aumenta.
 - A temperatura total diminui.
 - A pressão total diminui.
 - A velocidade diminui.

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh (adição de calor):
- Para escoamentos subsônicos:
 - O número de Mach aumenta.
 - A pressão diminui.
 - A temperatura aumenta para $M_1 < \gamma^{-1/2}$ e diminui para $M_1 > \gamma^{-1/2}$.
 - A temperatura total aumenta.
 - A pressão total diminui.
 - A velocidade aumenta.

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- No caso de um escoamento supersônico, o fornecimento de calor move o ponto referente às condições de saída do gás para mais próximas do ponto de escoamento sônico na curva de Rayleigh.
- Quando o fornecimento de calor é tal que o escoamento na saída do gás é sônico, tem-se um escoamento bloqueado.

3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Qualquer fornecimento de calor acima do esperado para as condições de escoamento bloqueado farão com que haja uma revisão drástica do escoamento a montante da região de trocas térmicas. Caso o escoamento a montante fosse supersônico, será transformado em subsônico.

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

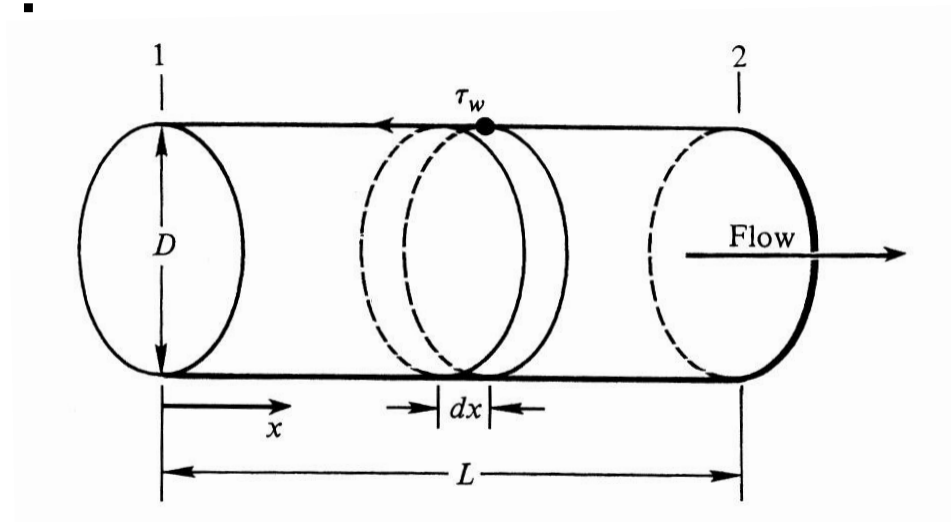
- Hipóteses:
 - Escoamento unidimensional de fluido viscoso compressível em duto de área transversal constante.
 - Regime permanente.
 - Escoamento adiabático.
 - Ausência de ondas de choque.

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Equação da conservação do momentum:

$$\oint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S})_u = -\oint_S (\rho dS)_x - \oint_S \tau_w dS$$

- Aplicando ao volume de controle cilíndrico a seguir:



3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Como resultado da integração para o volume de controle, tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{4 f dx}{D} = \left[-\frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma+1}{2\gamma} \ln \left(\frac{M^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right) \right]_{M_1}^{M_2}$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Outras relações:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_0/T_1}{T_0/T_2} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{1/2}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{-1/2}$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Relações com propriedades de estagnação e/ou para $M = 1$:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right]^{(\gamma + 1)/[2(\gamma - 1)]}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2}$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{1/2}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{1/2}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{(\gamma + 1)/[2(\gamma - 1)]}$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Considerando-se $x = L^*$ para $M = 1$

$$\frac{4 \bar{f} L^*}{D} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{(\gamma + 1) M^2}{2 + (\gamma - 1) M^2} \right]$$

sendo o coeficiente de atrito dado por:

$$\bar{f} = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} f \, dx$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
 - Uma vez que, por hipótese, o escoamento é adiabático, tem-se da equação da energia que:

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{const} = h_0$$

- E da equação da continuidade:

$$\rho u = \text{const}$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:

- A partir da segunda lei da termodinâmica, sabe-se que:

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho} = du' - \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

- Que, no caso de um gás perfeito, pode ser expressa como:

$$ds = \frac{du'}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
 - Mas, sabe-se também que:

$$du' = c_v dT$$

- E, dessa forma, ao se integrar a equação da segunda lei da termodinâmica, obtém-se:

$$s - s_1 = c_v \ln \frac{T}{T_1} - R \ln \frac{\rho}{\rho_1}$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
 - Empregando-se a equação da continuidade:

$$s - s_1 = c_v \ln \frac{T}{T_1} + R \ln \frac{u}{u_1}$$

- Da equação da energia tem-se:

$$u = \sqrt{2(h_0 - h)} = \sqrt{2c_p(T_0 - T)}$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
 - De modo que:

$$\frac{s - s_1}{c_v} = \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) + \frac{\gamma - 1}{2} \ln\left(\frac{T_0 - T}{T_0 - T_1}\right)$$

- Uma vez que:

$$c_p = \gamma c_v$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
 - Tem-se que a segunda lei da termodinâmica pode ser expressa como:

$$\frac{s - s_1}{c_p} = \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \ln\left(\frac{T_0 - T}{T_0 - T_1}\right)$$

- Ou seja,

$$\frac{s - s_1}{c_p} = \frac{1}{\gamma} \ln T + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \ln(T_0 - T) + \text{const}$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:

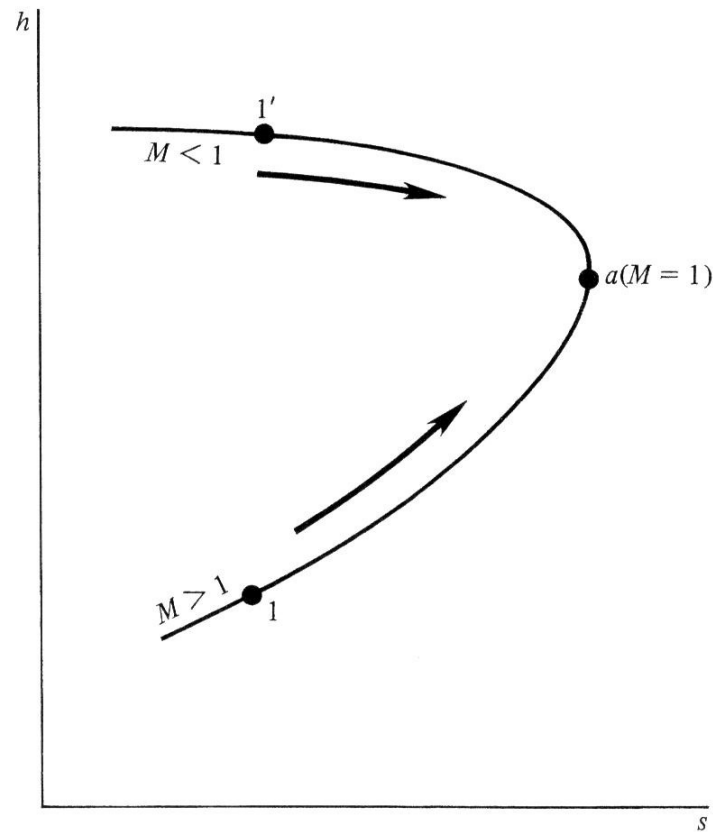


Figure 3.15 | The Fanno curve.

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
 - Ponto de tangência:

$$\frac{d \Delta s}{dT} = 0$$

- Logo:

$$\frac{1}{c_v} \frac{d \Delta s}{dT} = \frac{1}{T} - \frac{\gamma - 1}{2(T_0 - T)} = 0$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
 - Contudo, da equação da energia:

$$c_p (T_0 - T) = \frac{u^2}{2}$$

- E, dessa forma:

$$u^2 = c_p (\gamma - 1) T$$

- Uma vez que:

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:

- Tem-se que:

$$u^2 = \gamma RT$$

- Ou seja,

$$u^2 = a^2$$

- Quando

$$ds = 0$$

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
- Para escoamento supersônico:
 - O número de Mach diminui.
 - A pressão aumenta.
 - A temperatura aumenta.
 - A pressão total diminui.
 - A velocidade diminui.

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
- Para escoamento subsônico:
 - O número de Mach aumenta.
 - A pressão diminui.
 - A temperatura diminui.
 - A pressão total diminui.
 - A velocidade aumenta.

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- No caso de um escoamento supersônico, o crescimento do comprimento da região com atrito move o ponto referente às condições de saída do gás para mais próximas do ponto de escoamento sônico na curva de Fanno.
- Quando o comprimento da região com atrito é tal que o escoamento na saída do gás é sônico, tem-se um escoamento bloqueado.

3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Qualquer aumento do comprimento do duto com atrito, acima do esperado para as condições de escoamento bloqueado farão com que haja uma revisão drástica do escoamento a montante da região de atrito. Caso o escoamento a montante fosse supersônico, será transformado em subsônico.