Escoamentos Compressíveis

Capítulo 08

Equação do potencial de velocidade

8.1 Escoamento irrotacional

- Vorticidade: $\nabla \times \vec{V}$

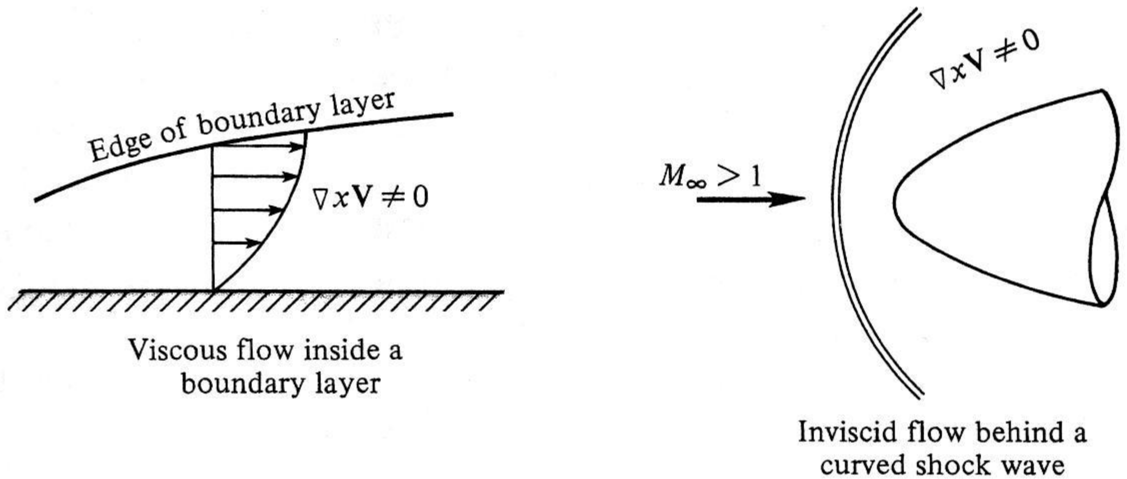

Figure 8.1 | Examples of rotational flows.

8.1 Escoamento irrotacional

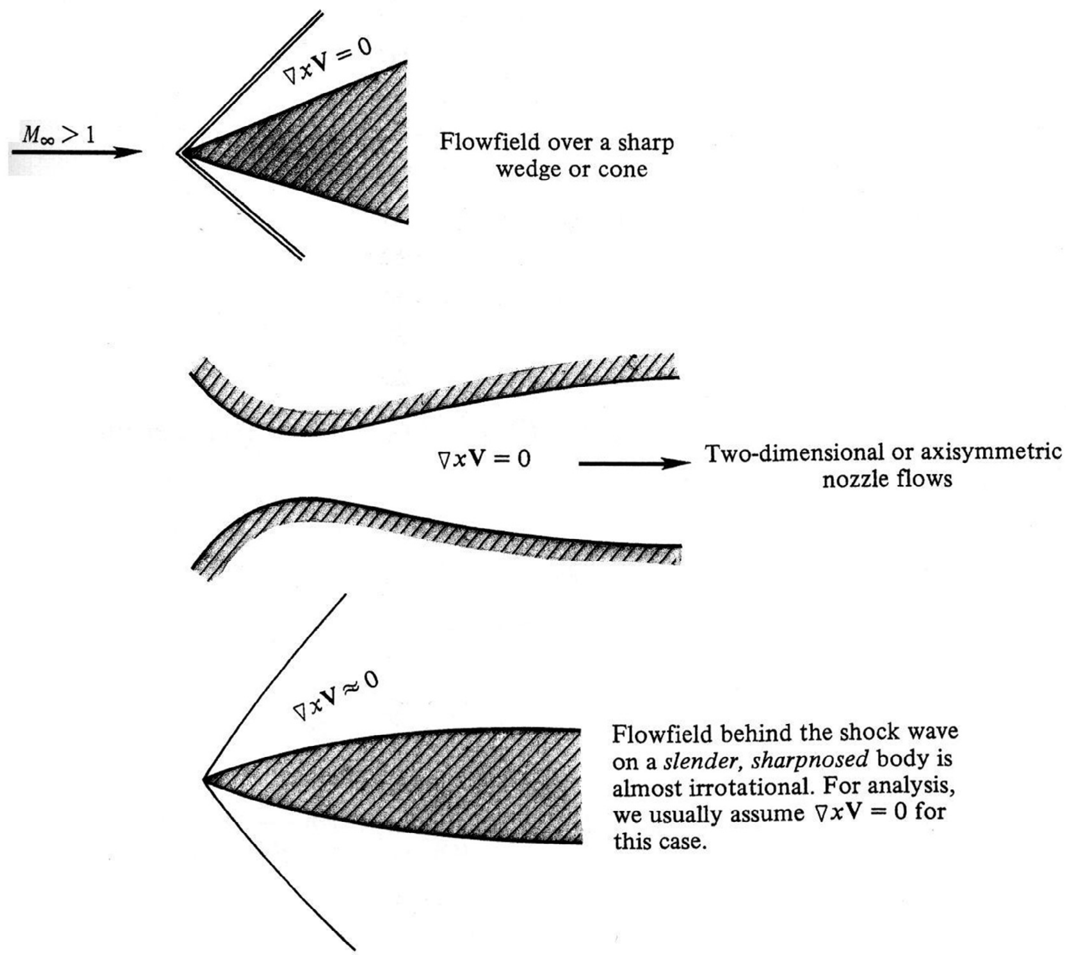

Figure 8.2 | Examples of irrotational flows.

8.1 Escoamento irrotacional

- Escoamentos irrotacionais são, em geral, mais simples de analisar que os rotacionais, pois a condição de irrotacionalidade $\nabla \times \vec{V} = 0$ fornece uma simplificação extra para as equações gerais do movimento.

8.1 Escoamento irrotacional

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

- Condições irrotacionais:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

8.1 Escoamento irrotacional

- Equação de Euler na ausência de forças de corpo:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p$$

- Considerando-se regime permanente e tomando-se $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$, tem-se:

$$\boxed{dp = -\rho\, V\, dV}$$

8.1 Escoamento irrotacional

- A forma especial anterior da Equação de Euler é válida para qualquer direção em um escoamento irrotacional sem forças de corpo ou sobre uma linha de corrente em um escoamento rotacional.
- Observa-se um princípio físico básico para escoamentos invíscidos: se a pressão diminui ao longo de uma direção, a velocidade deve crescer nessa mesma direção (Princípio de Bernoulli).

8.1 Escoamento irrotacional

- Princípio de Bernoulli:

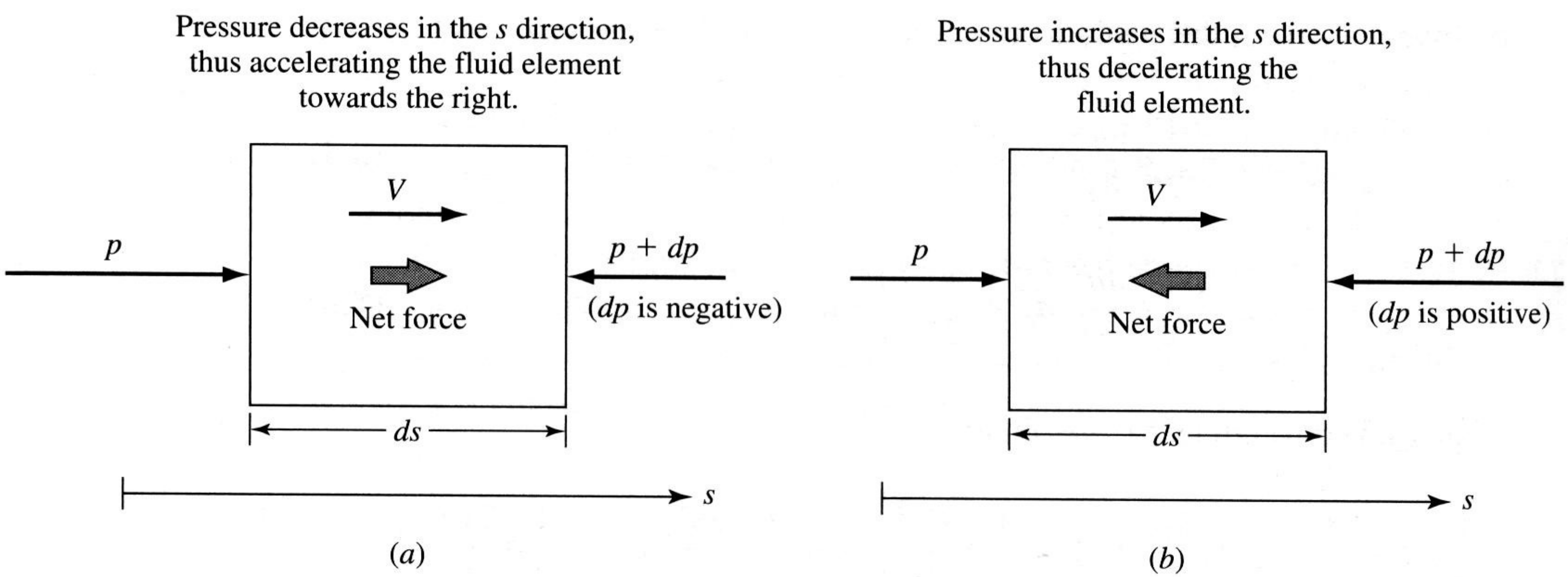

Figure 8.3 | Illustration of pressure gradient effect on the velocity of a fluid element. (a) Decreasing pressure in the flow direction increases the velocity. (b) Increasing pressure in the flow direction decreases the velocity.

8.2 Equação do potencial de velocidade

- Considere um vetor $\vec{A}$. Se $\nabla \times \vec{A} = 0$, então tal vetor pode ser expresso como $\nabla \zeta$, onde ζ é uma função escalar. Isto é proveniente da identidade vetorial, $rot(grad) \equiv 0$. Então:

$$\nabla \times \nabla \zeta = 0$$

onde ζ é uma função escalar qualquer. Para um escoamento irrotacional, $\nabla \times \vec{V} = 0$. Define-se, então, uma função escalar

$$\Phi = \Phi(x, y, z)$$

8.2 Equação do potencial de velocidade

de modo que:

$$\vec{V} \equiv \nabla\Phi$$

onde Φ é chamado de potencial de velocidades. Em coordenadas cartesianas:

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}$$

e assim:

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

8.2 Equação do potencial de velocidade

- Assumindo-se regime permanente e escoamento isentrópico, a equação da continuidade pode ser escrita como:

$$\rho\left(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}\right)+\Phi_{x}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\Phi_{y}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\Phi_{z}\frac{\partial\rho}{\partial z}=0$$

- Observa-se que os subíndices se referem a derivadas parciais.

8.2 Equação do potencial de velocidade

- Equação de Euler (momentum):

$$d\,p = -\rho\, d\left(\frac{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}{2}\right)$$

- Da equação da definição da velocidade do som, obtém-se:

$$d\rho = -\frac{\rho}{a^2}\, d\left(\frac{\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2}{2}\right)$$

8.2 Equação do potencial de velocidade

- Considerando-se as equações anteriores, obtém-se a equação do potencial de velocidade:

$$\left(1-\frac{\Phi_x^2}{a^2}\right)\Phi_{xx}+\left(1-\frac{\Phi_y^2}{a^2}\right)\Phi_{yy}+\left(1-\frac{\Phi_z^2}{a^2}\right)\Phi_{zz}$$

$$-\frac{2\Phi_x\Phi_y}{a^2}\Phi_{xy}-\frac{2\Phi_x\Phi_z}{a^2}\Phi_{xz}-\frac{2\Phi_y\Phi_z}{a^2}\Phi_{yz}=0$$

8.2 Equação do potencial de velocidade

- Utilizando-se, ainda a equação da energia, tendo-se por hipótese um gás caloricamente perfeito, obtém-se da expressão anterior:

$$\boxed{a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2}\left(\Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2\right)}$$

Como a_0 é uma constante conhecida do escoamento, a equação anterior fornece a velocidade do som a em função de Φ.

8.2 Equação do potencial de velocidade

- Procedimento geral de solução para campos de escoamentos irrotacionais, isentrópicos:
  - Obter Φ para as condições de contorno especificadas para o problema.
  - Calcular u, v, w. Obter, então $V = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$
  - Obter a.
  - Calcular $M=V/a$.
  - Calcular T, p, ρ.

8.2 Equação do potencial de velocidade

- Não existe uma forma fechada (solução analítica) geral para a equação do potencial de velocidade, de modo que sua solução é normalmente obtida de uma das formas seguintes:
  – Solução numérica exata. Neste caso, destaca-se a simulação numérica com ferramentas de CFD ("Computational Fluid Dynamics").

8.2 Equação do potencial de velocidade

- Transformação de variáveis. Aplicável a poucos casos, realiza-se a mudança de variáveis de modo a se obter uma forma linear (porém ainda exata) da equação do potencial de velocidades.
- Soluções linearizadas. As equações originais não-lineares são substituídas por equações lineares aproximadas, para as quais existe solução analítica.