

Escoamentos Compressíveis

Capítulo 11

Técnicas numéricas para
escoamentos supersônicos em
regime permanente

11.1 Introdução

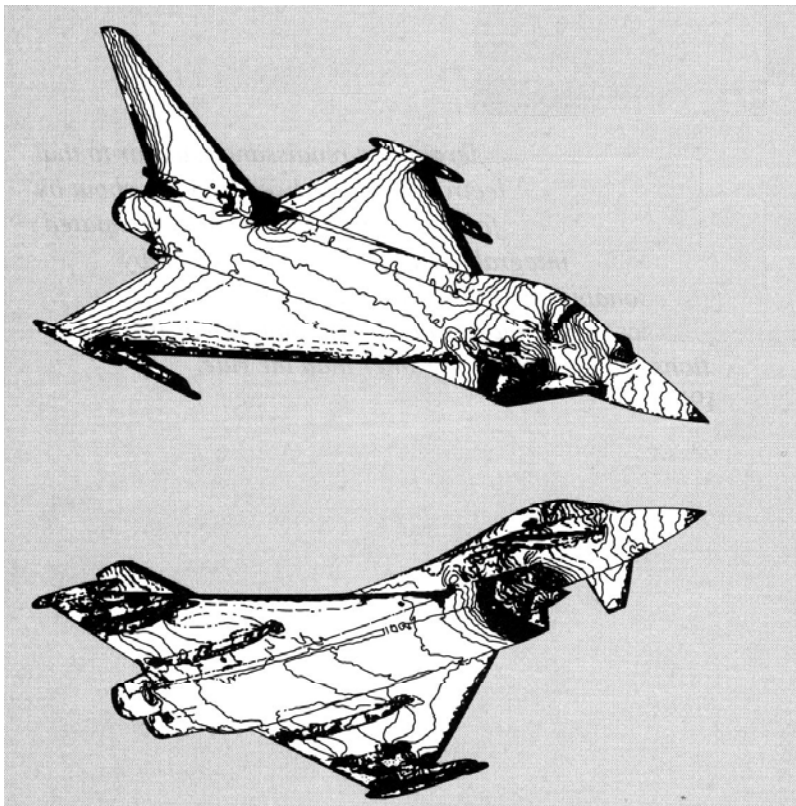
- Leis básicas da dinâmica dos fluidos:
 - Conservação da massa.
 - Segunda lei de Newton.
 - Conservação da energia.
- Tais leis, em sua forma mais geral, são escritas na forma integral ou na diferencial (equações diferenciais parciais), sem solução analítica geral.

11.1 Introdução

- A Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD) constitui-se na substituição de termos individuais nas equações de conservação governantes por formas algébricas, de modo a se obter resultados numéricos para as variáveis do escoamento em pontos discretos do tempo e/ou do espaço.

11.1 Introdução

- Aplicação de ferramentas de CFD para solução do escoamento não-linear, tridimensional, invíscido sobre um avião.



Contornos de coeficiente de pressão para um caça genérico, com Mach de 0,85, ângulo de ataque de 10° e ângulo de guinada de 30° .

11.1 Introdução

- 1947 Kopal compilou diversas tabelas de escoamentos supersônicos sobre cones pontiagudos resolvendo numericamente a equação de Taylor-Maccoll em um computador digital primitivo na Massachusetts Institute of Technology (MIT).

11.1 Introdução

- Durante a década de 1950 e início da de 1960, cresce a importância de CFD com o advento de computadores mais rápidos e eficientes simultâneo à necessidade de solucionar problemas de reentrada atmosférica (alta velocidade e alta temperatura).

11.1 Introdução

- Atualmente, ferramentas de CFD são empregadas a problemas mais complexos, que envolvem: a presença de reações químicas; escoamentos nos quais há regiões subsônicas e supersônicas; escoamentos viscosos nas quais as aproximações de camadas-limites não são válidas (regiões de recirculação e descolamento).

11.1 Introdução

- Método das características: mais antigo e com maior grau de desenvolvimento, limitado a escoamentos invíscidos.
- Métodos de diferenças e volumes finitos: mais recentes, com menor grau de desenvolvimento, com aplicações gerais a escoamentos invíscidos e viscosos.

11.1 Introdução

- Características gerais das técnicas numéricas:
 - Cálculo das propriedades do escoamento em pontos discretos.

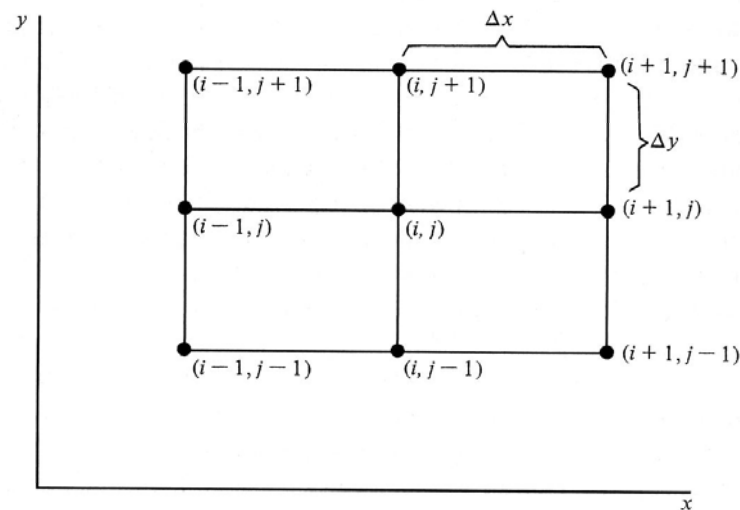


Figure 11.3 | Rectangular finite-difference grid.

11.1 Introdução

- As propriedades do escoamento são expandidas em termos de séries de Taylor.

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \dots$$

- No limite teórico em que o número de pontos tende a infinito, tem-se soluções exatas.

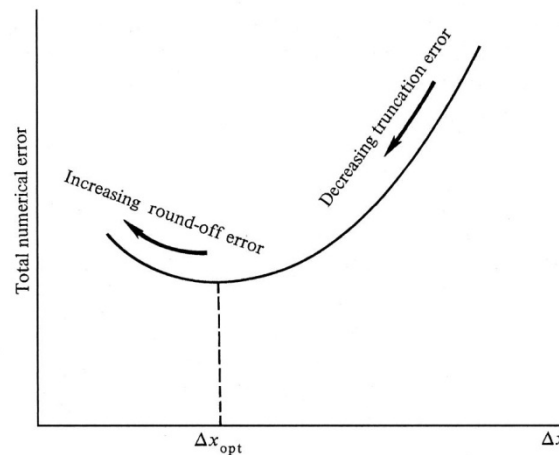


Figure 11.4 | Schematic of the effect of grid size on numerical error.

11.2 Filosofia do método das características

- Considerando-se uma série de Taylor, na qual os termos de segunda ordem (e de ordens superiores) são desprezados, tem-se

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x + \dots$$

- O valor da derivada $\partial u / \partial x$ pode ser obtido a partir das equações gerais de conservação.

11.2 Filosofia do método das características

- Considerando-se, por exemplo, um escoamento bidimensional irrotacional, tem-se que

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2uv}{a^2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

- De onde obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{2uv}{a^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y}}{\left(1 - u^2/a^2\right)}$$

11.2 Filosofia do método das características

- Assume-se, então que \vec{V} seja conhecido em cada ponto de uma linha vertical $x=x_0$. Mais especificamente, conhece-se os valores de u e v nos pontos (i, j) , $(i+1, j)$ e $(i-1, j)$.

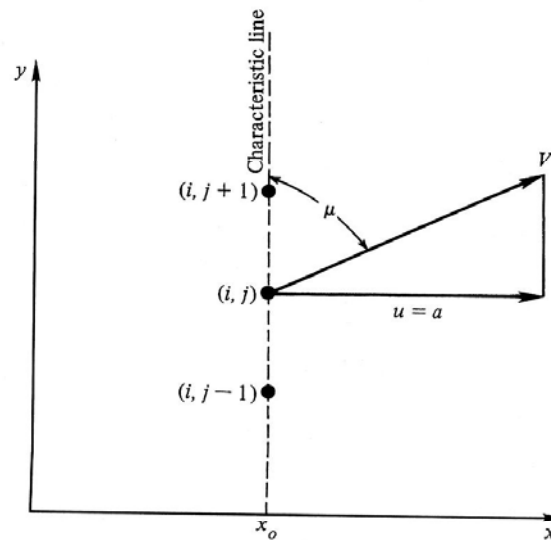


Figure 11.5 | Illustration of the characteristic direction.

11.2 Filosofia do método das características

- Pode-se, então, avaliar $(\partial u / \partial x)_{i,j}$. O passo seguinte é calcular o ângulo de Mach μ , definido como

$$\sin \mu = u/V = a/V = 1/M$$

- A orientação dos eixos x e y em relação ao vetor de velocidades é arbitrária.

11.2 Filosofia do método das características

- Deste modo, uma linha que faz um ângulo de Mach com relação à direção da linha de corrente em um ponto também é a linha ao longo da qual a derivada de u é indeterminada.
- As derivadas de outras propriedades do escoamento (p , ρ , T , ...) também são indeterminadas ao longo dessas linhas, que são definidas como linhas características.

11.2 Filosofia do método das características

- Considerando-se uma região de escoamento supersônico, bidimensional, em regime permanente, tem-se que o campo de escoamento pode ser determinado em três passos.
 - Passo 1: Encontrar algumas linhas particulares (direções) no espaço xy onde as variáveis do escoamento são contínuas, mas ao longo das quais as derivadas são indeterminadas. Tais linhas serão as linhas características.

11.2 Filosofia do método das características

- Passo 2: Combinar as equações diferenciais parciais de conservação de tal modo que sejam obtidas equações diferenciais ordinárias que sejam válidas apenas ao longo das linhas características. Tais equações são chamadas de equações de compatibilidade.
- Passo 3: Solucionar as equações de compatibilidade passo a passo ao longo das linhas características, a partir das condições iniciais dadas em alguns pontos ou regiões do escoamento.

11.2 Filosofia do método das características

- Com o passo 3, obtém-se o campo completo de escoamento, mapeado ao longo das características. Nota-se, contudo, que, em geral, as linhas características dependem do campo de escoamento e as equações de compatibilidade são uma função da localização geométrica ao longo das linhas características. Deste modo, as características e as equações de compatibilidade devem ser construídas simultaneamente, passo a passo.

11.2 Filosofia do método das características

- A metodologia anterior foi empregada para o escoamento unidimensional, em regime transiente apresentado no capítulo 7. Nesse caso, as equações governantes (diferenciais parciais) foram reduzidas a equações diferenciais ordinárias (equações de compatibilidade), que eram válidas para certas linhas no plano xt que possuíam derivadas iguais a $dx/dt = u \pm a$.

11.2 Filosofia do método das características

- Considere um instante $t = t_1$, no qual a frente de onda está na posição x_b , enquanto o final da mesma está em x_e .

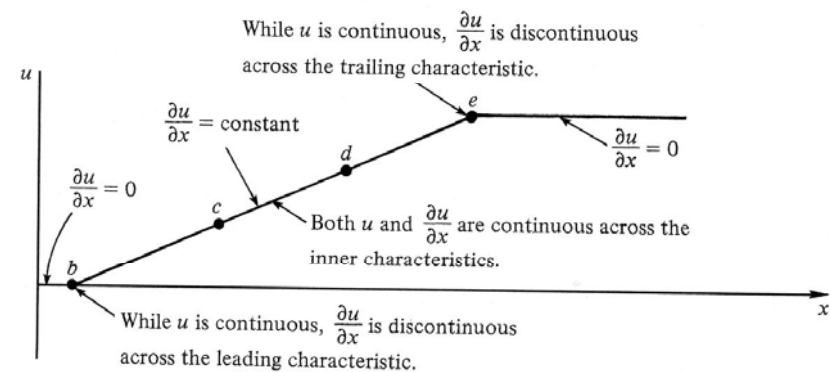
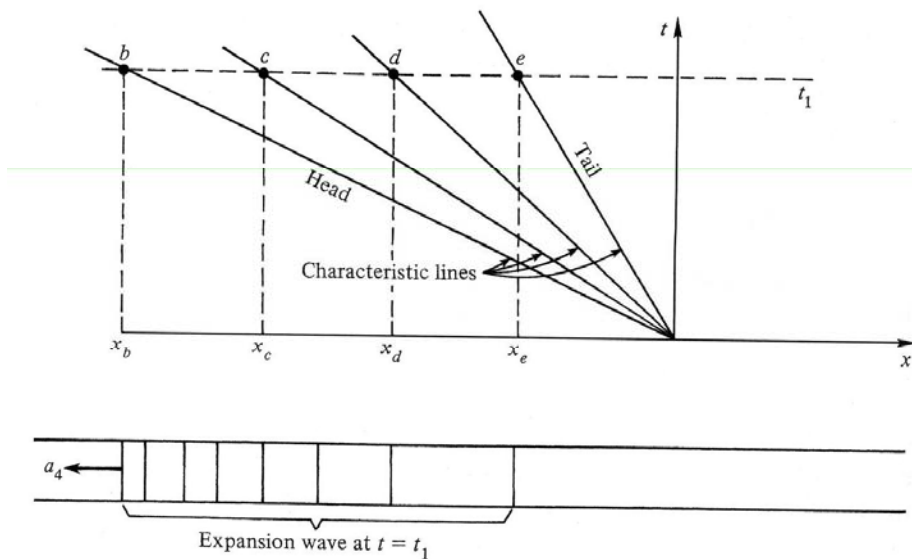


Figure 11.6 | Relationship of characteristics in unsteady one-dimensional flow.

11.2 Filosofia do método das características

- A velocidade do escoamento será:

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \left(a_4 + \frac{x}{t} \right)$$

- que é uma função contínua em x_b e x_e . A derivada $\partial u / \partial x$, contudo, é descontínua nesses pontos.
- Nota-se, assim, que a definição de características do capítulo 7 é consistente com a apresentada neste capítulo.

11.3 Determinação das linhas características

- Considere um escoamento supersônico, bidimensional, adiabático, irrotacional em regime permanente. Neste caso, tem-se

$$\left(1 - \frac{\Phi_x^2}{a^2}\right) \Phi_{xx} + \left(1 - \frac{\Phi_y^2}{a^2}\right) \Phi_{yy} - \frac{2\Phi_x \Phi_y}{a^2} \Phi_{xy} = 0$$

- sendo Φ o potencial de velocidade (e não as perturbações de potencial). Assim,

$$\Phi_x = u \quad \Phi_y = v \quad \vec{V} = u \vec{i} + v \vec{j}$$

11.3 Determinação das linhas características

- Lembrando que $\Phi_x = f(x, y)$, tem-se

$$d\Phi_x = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_x}{\partial y} dy = \Phi_{xx} dx + \Phi_{xy} dy$$

$$d\Phi_y = \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} dy = \Phi_{xy} dx + \Phi_{yy} dy$$

- Deste modo, pode-se escrever:

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \Phi_{xx} - \frac{2uv}{a^2} \Phi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \Phi_{yy} = 0$$

11.3 Determinação das linhas características

$$(dx)\Phi_{xx} + (dy)\Phi_{xy} = du$$

$$(dx)\Phi_{xy} + (dy)\Phi_{yy} = dv$$

- As três equações anteriores podem ser resolvidas como um sistema de equações algébricas lineares simultâneas. Por exemplo, empregando-se a regra de Cramer para Φ_{xy} , tem-se

11.3 Determinação das linhas características

$$\Phi_{xy} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & 0 & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & du & 0 \\ 0 & dv & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & -\frac{2uv}{a^2} & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}} = \frac{N}{D}$$

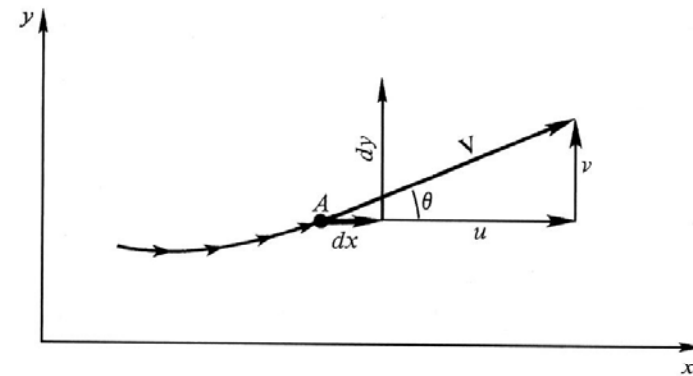


Figure 11.7 | Streamline geometry.

- Considerando-se um ponto A e sua vizinhança em um campo de escoamento arbitrário. A equação anterior fornece a solução de Φ_{xy} para escolhas arbitrárias de dx e dy .

11.3 Determinação das linhas características

- Se dx e dy forem escolhidos de modo que $D=0$, então, para manter Φ_{xy} finito, é necessário que $N=0$. Neste caso,

$$\Phi_{xy} = \partial u / \partial y = \partial v / \partial x$$

- é indeterminado. As linhas no espaço xy para as quais $D=0$ (e, por consequência, $N=0$) são linhas características.

11.3 Determinação das linhas características

- Fazendo-se $D=0$, tem-se

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)(dy)^2 - \frac{2uv}{a^2} dx dy + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)(dx)^2 = 0$$

- ou seja,

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char}^2 - \frac{2uv}{a^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = 0$$

11.3 Determinação das linhas características

- Deste modo,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} = \frac{-uv/a^2 \pm \sqrt{[(u^2 + v^2)/a^2] - 1}}{[1 - (u^2/a^2)]}$$

- Examinando-se o termo na raiz quadrada:

$$\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1 = \frac{V^2}{a^2} - 1 = M^2 - 1$$

11.3 Determinação das linhas características

- Neste ponto, tem-se:
 - Se $M > 1$, existem duas raízes características reais para cada ponto do escoamento. Tem-se assim uma equação diferencial parcial hiperbólica.
 - Se $M = 1$, existe somente uma característica real para cada ponto do escoamento. Tem-se uma equação diferencial parcial parabólica.
 - Se $M < 1$, as características são imaginárias e a equação diferencial parcial é elíptica.

11.3 Determinação das linhas características

- Em regime permanente, como existem duas raízes reais características para $M > 1$, o método das características pode ser empregado para solucionar escoamentos supersônicos. Por sua vez, no caso de escoamentos subsônicos ($M < 1$), como as raízes são imaginárias, o método não é utilizado. A exceção ocorre para regiões de regime misto (supersônico e subsônico).

11.3 Determinação das linhas características

- No caso de um escoamento invíscido em regime transiente, bi ou tridimensional, em qualquer regime de velocidades (subsônico, transônico, supersônico ou hipersônico), a equação diferencial parcial é hiperbólica.

11.3 Determinação das linhas características

- Para um escoamento supersônico, bidimensional, em regime permanente, tem-se:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} = \frac{-V^2 \cos \theta \sin \theta \pm \sqrt{\frac{V^2}{a^2} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 1}}{1 - \frac{V^2}{a^2} \cos^2 \theta}$$

- sendo:

$$u = V \cos \theta$$

$$v = V \sin \theta$$

11.3 Determinação das linhas características

- Lembrando-se que

$$\mu = \sin^{-1}\left(\frac{1}{M}\right)$$

- Obtém-se:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} = \frac{\frac{-\cos \theta \sin \theta}{\sin^2 \mu} \pm \sqrt{\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \mu} - 1}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}}$$

11.3 Determinação das linhas características

- Empregando-se relações trigonométricas e rearranjando-se os termos, obtém-se

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} = \tan(\theta \mp \mu)$$

- Considerando-se o caso em que uma linha de corrente, em um ponto A, possui um ângulo θ em relação ao eixo x .

11.3 Determinação das linhas características

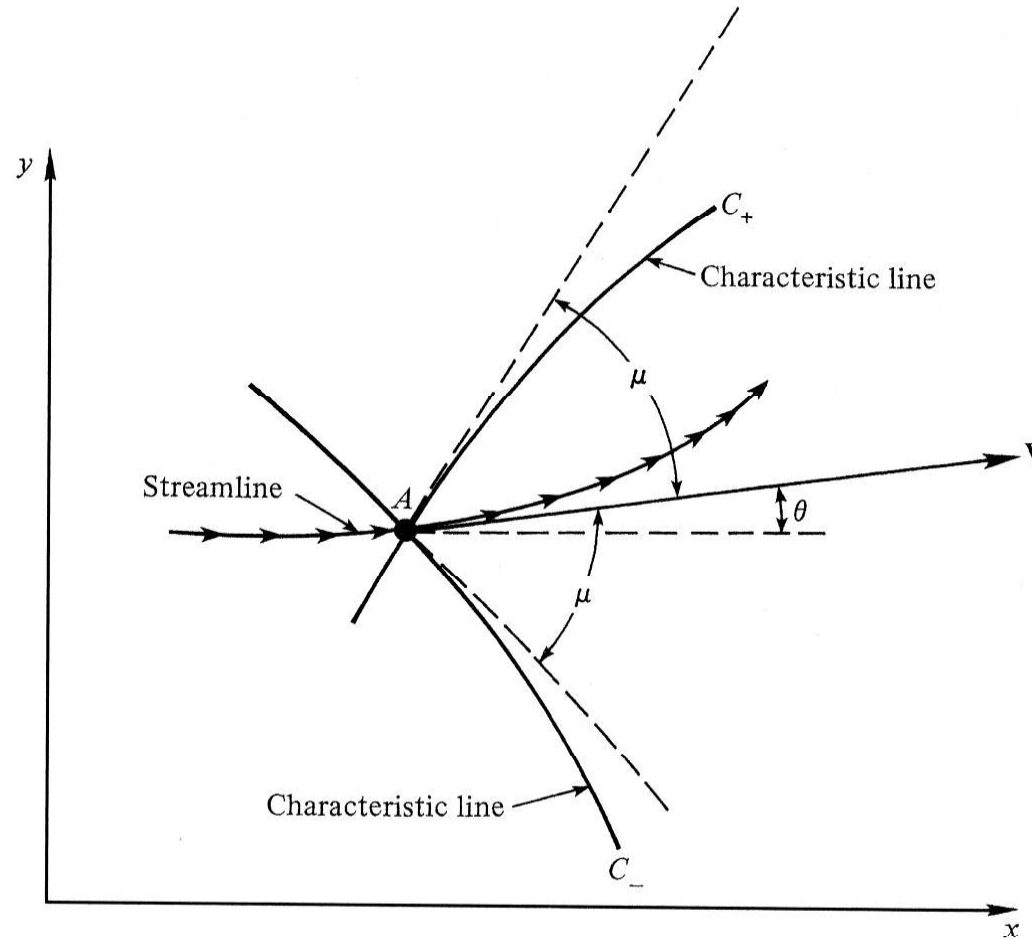


Figure 11.8 | Illustration of left- and right-running characteristic lines.

11.3 Determinação das linhas características

- Pode-se determinar as duas linhas características que passam por A através da relação

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{char} = \tan(\theta \mp \mu)$$

- sendo que uma linha apresenta um ângulo μ , estando acima da linha de corrente e a outra apresenta um ângulo μ estando abaixo da linha de corrente.

11.3 Determinação das linhas características

- As linhas características são linhas de Mach, sendo que a que apresenta o ângulo igual a $\theta + \mu$ corresponde à característica C_+ e a linha com o ângulo de $\theta - \mu$ corresponde à característica C_- .

11.4 Determinação das equações de compatibilidade

- As equações de compatibilidade são obtidas ao se fazer $N = 0$ na equação

$$\Phi_{xy} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & 0 & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & du & 0 \\ 0 & dv & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & -\frac{2uv}{a^2} & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}} = \frac{N}{D}$$

11.4 Determinação das equações de compatibilidade

- Neste caso, o cálculo do determinante fornece

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) du dy + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) dx dv = 0$$

- ou seja,

$$\frac{dv}{du} = \frac{-\left[1 - \left(u^2/a^2\right)\right] dy}{\left[1 - \left(v^2/a^2\right)\right] dx}$$

- que é válida apenas sobre as linhas características.

11.4 Determinação das equações de compatibilidade

- Desta maneira, tem-se que

$$\frac{dy}{dx} \equiv \left(\frac{dy}{dx} \right)_{char}$$

- De modo que se obtém

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{uv}{a^2} \mp \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1}}{1 - \frac{v^2}{a^2}}$$

11.4 Determinação das equações de compatibilidade

- Utilizando o fato que

$$u = V \cos \theta \qquad v = V \sin \theta$$

- E após algumas manipulações, tem-se

$$d\theta = \mp \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

- que se constitui na equação de compatibilidade, isto é, é a equação que descreve a variação das propriedades do escoamento ao longo das linhas características.

11.4 Determinação das equações de compatibilidade

- Assim, tem-se para a característica C_- :

$$d\theta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

- Para a característica C_+ :

$$d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

11.4 Determinação das equações de compatibilidade

- Integrando-se a equação geral de compatibilidade, obtém-se a função de Prandtl-Meyer $v(M)$, resultando-se as seguintes equações algébricas:
 - Para a característica C_- :

$$\theta + v(M) = \text{const} = K_-$$

- Para a característica C_+ :

$$\theta - v(M) = \text{const} = K_+$$

11.4 Determinação das equações de compatibilidade

- Nas expressões anteriores, K_- e K_+ são constantes ao longo de suas respectivas características, sendo análogas às invariantes de Riemann J_- e J_+ dos escoamentos transientes.
- As equações de compatibilidade relacionam a magnitude da velocidade e a direção ao longo das características, sendo conhecidas por vezes como “características hodográficas”.

11.4 Determinação das equações de compatibilidade

- Observa-se que as equações de compatibilidade apresentadas não envolvem coordenadas espaciais e, portanto, são independentes da localização geométrica das linhas características. Este é um caso especial relacionado ao escoamento bidimensional irrotacional.

11.5 Processos unitários

- Para a solução numérica através do método das características é necessário o emprego de uma série de cálculos específicos chamados de “processos unitários”, que dependem do fato do escoamento ser interno ou externo, haver fronteira sólida ou livre, ou ainda ondas de choque.

11.5 Processos unitários

- Escoamento interno:
 - Conhecidas as condições do campo de escoamento em dois pontos, pode-se encontrar as condições relacionadas a um terceiro ponto.

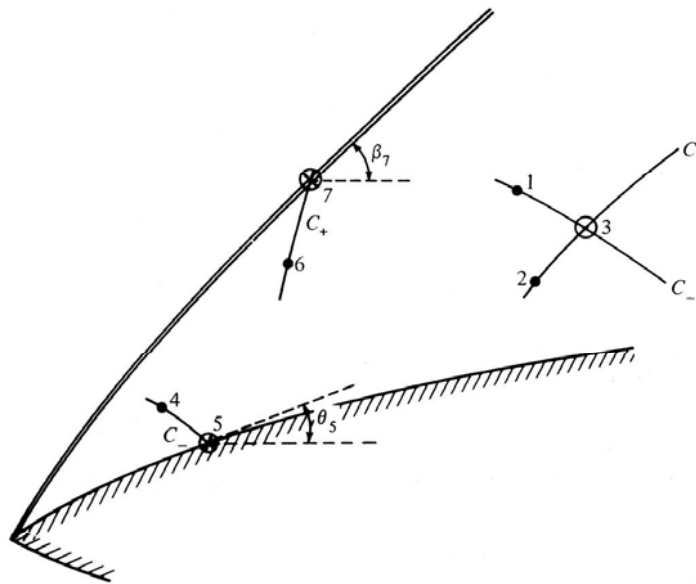


Figure 11.9 | Unit processes for the steady-flow, two-dimensional, irrotational method of characteristics.

11.5 Processos unitários

- Escoamento interno:
 - Sejam os valores de v_1 e θ_1 conhecidos em um ponto 1 e v_2 e θ_2 conhecidos em um ponto 2. Se um ponto 3 estiver localizado na interseção entre a característica C_- que passa por 1 e a característica C_+ que passa por 2, tem-se que:

$$\theta_1 + v_1 = (K_-)_1$$

$$\theta_2 - v_2 = (K_+)_2$$

11.5 Processos unitários

- Escoamento interno:

- Desta forma, no ponto 3:

$$\theta_3 + v_3 = (K_-)_3 = (K_-)_1$$

$$\theta_3 - v_3 = (K_+)_3 = (K_+)_2$$

- Solucionando-se as equações anteriores, tem-se:

$$\theta_3 = \frac{1}{2} [(K_-)_1 + (K_+)_2]$$

$$v_3 = \frac{1}{2} [(K_-)_1 - (K_+)_2]$$

11.5 Processos unitários

- Escoamento interno:
 - A localização do ponto 3 é determinada pela interseção da característica C_- que passa pelo ponto 1 e da característica C_+ que passa pelo ponto 2. O procedimento normalmente adotado para a determinação do ponto 3 consiste aproximar as linhas características por segmentos de reta entre os pontos da malha, sendo a inclinação igual ao valor médio

11.5 Processos unitários

- Escoamento interno:
 - A característica C_- através do ponto 1 é uma reta cujo ângulo médio de inclinação é dado por

$$\left[\frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_3) - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_3) \right]$$

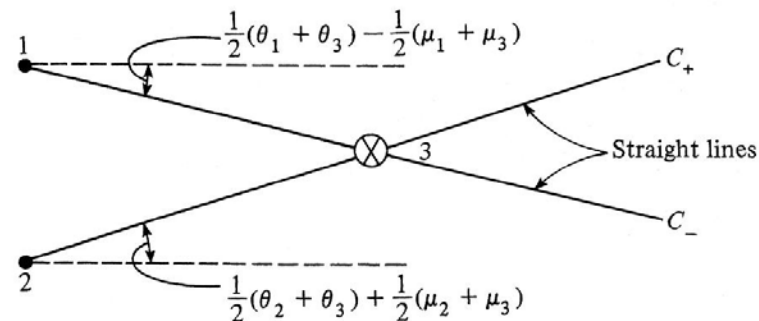


Figure 11.10 | Approximation of characteristics by straight lines.

11.5 Processos unitários

- Escoamento interno:
 - A característica C_+ através do ponto 2, é considerada como a reta que passa por 2 com inclinação

$$\left[\frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_3) - \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3) \right]$$

- Na interseção das linhas anteriores tem-se o ponto 3.

11.5 Processos unitários

- Ponto na parede:
 - Se as condições de um ponto do escoamento próximo a uma parede sólida forem conhecidas, então pode-se determinar as propriedades das variáveis de escoamento na parede.
 - Considerando-se um ponto 4 conhecido, então para a característica C_- :

$$(K_-)_4 = \theta_4 + v_4$$

11.5 Processos unitários

- Ponto na parede:
 - A característica C_- intercepta a parede no ponto 5. Deste modo,

$$(K_-)_4 = (K_-)_5 = \theta_4 + v_4$$

- Como o formato da parede é conhecido e o escoamento deve ser tangente à parede, tem-se que θ_5 é conhecido. Assim:

$$v_5 = v_4 + \theta_4 - \theta_5$$

11.5 Processos unitários

- Ponto de choque:
 - Conhecidas as condições em um ponto do escoamento próximo a uma onda de choque, pode-se determinar as variáveis de escoamento imediatamente atrás do choque, bem como o ângulo de choque local.
 - Considerando-se o ponto 6 no qual o escoamento é conhecido. Assim, ao longo da característica C_+ tem-se

$$(K_+)_{6} = \theta_6 - v_6$$

11.5 Processos unitários

- Ponto de choque:
 - A característica C_+ intersecta o choque no ponto 7. Deste modo

$$(K_+) _6 = (K_+) _7 = \theta_7 - v_7$$

- Para um dado escoamento livre, a partir do número de Mach encontra-se o valor do ângulo local de choque β_7 que permite que se avalie $\theta_7 - v_7$ imediatamente após o choque. Esse valor deve, então, ser igual ao o obtido através da equação anterior.

11.5 Processos unitários

- Linha inicial de dados:
 - Os processos unitários anteriores necessitam iniciar-se em algum ponto. Para que se utilize o método das características, é necessário que se conheça as propriedades de escoamento sobre os pontos de uma linha, na região de escoamento supersônico.
 - A partir dessa linha, as propriedades a jusante podem ser calculadas, o que é uma característica das equações parabólicas e hiperbólicas.

11.5 Processos unitários

- Linha inicial de dados:
 - No caso de um escoamento interno, a linha inicial de dados é tomada sobre ou a jusante da característica limite, que corresponde a uma linha no escoamento pouco após à sônica.
 - As propriedades ao longo da linha inicial devem ser obtidas a partir de uma forma independente de cálculos, como os métodos transientes.

11.5 Processos unitários

- Linha inicial de dados:
 - Uma alternativa para os cálculos em um bocal é considerar que a linha sônica na garganta seja reta, assumindo-se uma expansão centrada emanada da parede do bocal a partir da região da garganta.
 - Para o cálculo de um escoamento externo, a linha inicial de dados pode ser definida assumindo-se o escoamento em cunha na ponta do corpo, empregando-se as propriedades do escoamento ao longo de uma linha através do escoamento entre o corpo e a onda de choque.

11.6 Regiões de influência e domínios de dependência

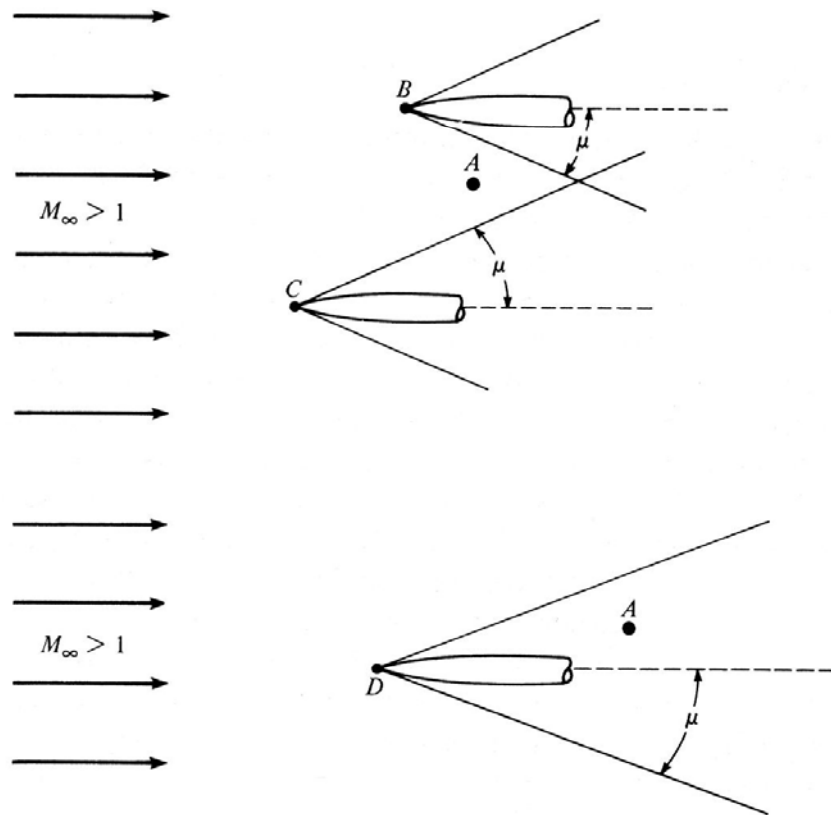


Figure 11.11 | Weak disturbances in a supersonic flow.

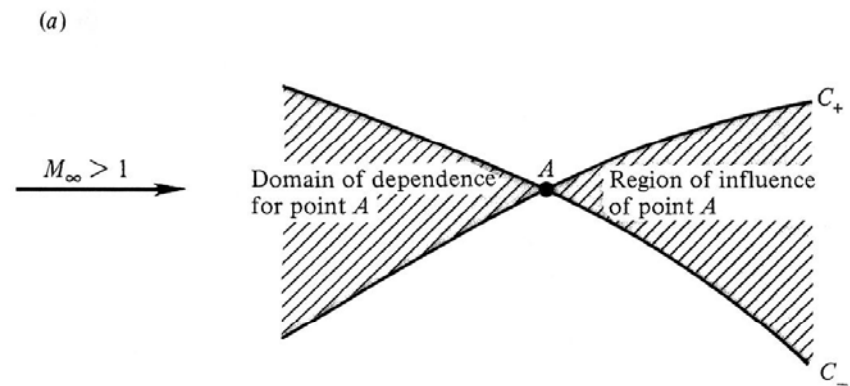


Figure 11.12 | Domain of dependence and region of influence.

11.6 Regiões de influência e domínios de dependência

- Considerando-se as características C_+ e C_- através do ponto A, tem-se que:
 - A área à montante, entre as duas linhas características, é o domínio de dependência do ponto A. As propriedades do ponto A dependem de quaisquer distúrbios ou informações do escoamento nesta região.
 - A área à jusante, entre as duas linhas características, é a região de influência do ponto A. Esta região é influenciada por qualquer ação que ocorra nesse ponto.

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- O método das características fornece uma técnica para projetar adequadamente um bocal supersônico, para um escoamento isentrópico, sem choques, levando-se em consideração efeitos multidimensionais dentro do duto.

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- O escoamento subsônico na porção convergente de um duto é acelerada até velocidades sônicas na região da garganta. Devido a efeitos multidimensionais, a linha sônica é ligeiramente curva, mas para a maioria das aplicações, pode ser considerada reta. À jusante da linha sônica, o bocal é divergente.

11.7 Projeto de bocais supersônicos

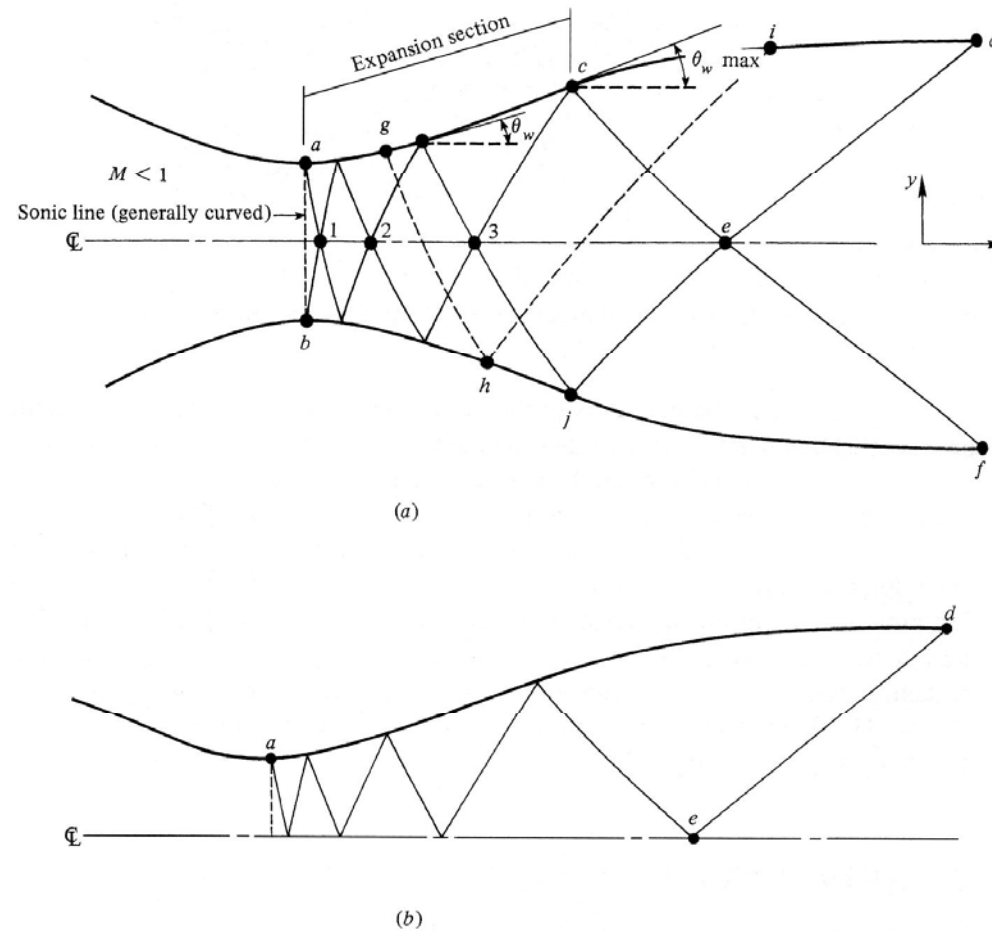


Figure 11.13 | Schematic of supersonic nozzle design by the method of characteristics.

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- Seja θ_w o ângulo da parede do duto em relação ao eixo x . A seção do bocal na qual θ_w é crescente é chamada de seção de expansão. Nesta região, ondas de expansão são geradas e propagam-se ao longo do escoamento a jusante, refletindo-se na parede oposta. O ponto c é um ponto de inflexão do contorno, onde $\theta_w = \theta_{w \text{ máx}}$. A jusante do ponto c , θ_w diminui até que a parede se torne paralela ao eixo x .

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- A seção entre os pontos c e d é projetada de modo a se cancelar todas as ondas de expansão geradas na seção de expansão.
- Traçando-se as características a partir dos pontos d e f , à montante, observa-se que existem múltiplas reflexões até a região da garganta. A área $acejb$ apresenta características que correm à direita e à esquerda, sendo definida como uma região não-simples.

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- Nesta região, as características são linhas curvas, em contraste com as regiões *cde* e *jef*, cobertas por uma única família de características, uma vez que a onda é cancelada na parede.
- Bocais supersônicos com seções de expansão suavemente curvas são características de túneis de vento, onde o escoamento uniforme de alta qualidade é necessário para a seção de testes.

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- Tuberias de foguetes, por sua vez, apresentam bocais mais curtos, de modo a se reduzir a massa. Em casos onde a expansão rápida é desejável, como no escoamento em desequilíbrio químico, o bocal também deve ser o mais curto possível. Neste caso, a seção de expansão é reduzida a um ponto e a expansão deve-se a ondas de Prandtl-Meyer que provêm de uma garganta com uma quina viva.

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- Tais ondas apresentam ângulo $\theta_{w \max, ML}$. O comprimento L do bocal, resultante de tal ângulo, é o valor mínimo consistente com um escoamento isentrópico livre de choques. Caso o contorno do bocal possua um comprimento menor, serão verificados choques no interior do bocal.

11.7 Projeto de bocais supersônicos

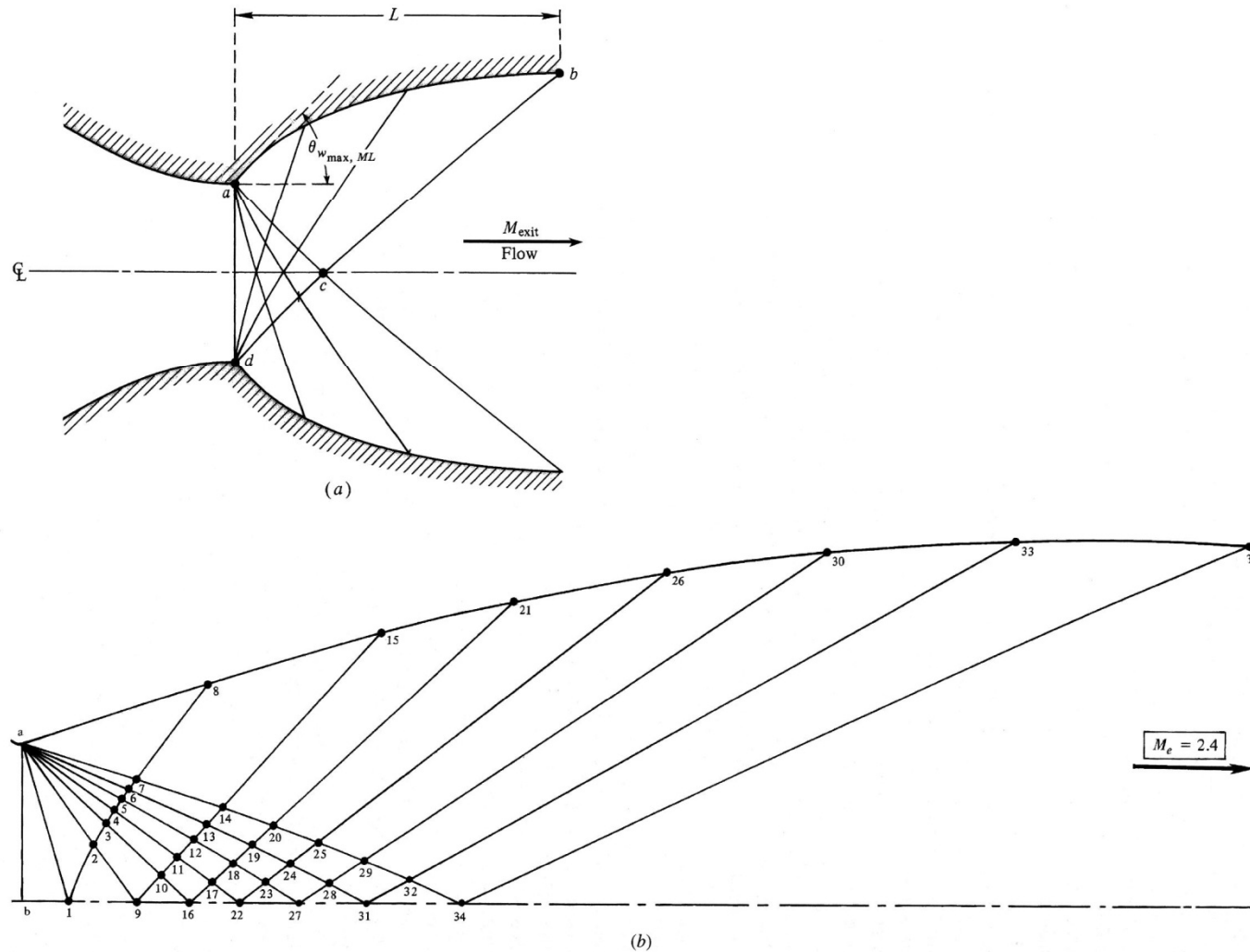


Figure 11.14 | (a) Schematic of minimum-length nozzle. (b) Graphical construction for Example 11.1.

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- Comparando-se os bocais apresentados nas Figs. 11.13(a) e 11.14(a) e assumindo-se que sejam projetados para o mesmo número de Mach na saída, observa-se que:
 - O bocal da Fig. 11.13 apresenta na região de expansão *ac* múltiplas reflexões de características (ondas de expansão). Um elemento de fluido movendo-se ao longo de uma linha de corrente é constantemente acelerado ao passar através de tais ondas refletidas.

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- No caso do bocal da Fig. 11.14, a região de expansão é substituída por um canto vivo no ponto a . Neste caso, não há reflexões múltiplas e um elemento de fluido encontra somente dois sistemas de ondas – um de ondas à direita, vindas do ponto a e outro de ondas à esquerda, provenientes do ponto d .
- Tem-se, assim que o valor de $\theta_{w \max ML}$ deve ser superior ao valor de $\theta_{w \max}$, mesmo que o número de Mach na saída seja o mesmo.

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- Seja v_M a função de Prandtl-Meyer associada ao projeto para o número de Mach na saída do bocal. Deste modo, ao longo da característica C_+ (cb) na Fig. 11.4, tem-se $v = v_M = v_c = v_b$. Considerando-se, então, a característica C_- através dos pontos a e c . Tem-se no ponto c :

$$\theta_c + v_c = (K_-)_c$$

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- Entretanto, $\theta_c = 0$ e $v_c = v_M$. Desta forma

$$(K_-)_c = v_M$$

- No ponto a , ao longo da mesma característica C_- , tem-se que

$$\theta_{w \max ML} + v_a = (K_-)_a$$

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- Como a expansão no ponto a é uma expansão de Prandtl-Meyer a partir de condições sônicas, tem-se que $v_a = \theta_{w \max ML}$ e desta forma,

$$\theta_{w \max ML} = \frac{1}{2} (K_-)_a$$

- No entanto, ao longo da mesma característica C_- , tem-se que $(K_-)_a = (K_-)_c$ de modo que

$$\theta_{w \max ML} = \frac{1}{2} (K_-)_c$$

11.7 Projeto de bocais supersônicos

- Por fim, tem-se que

$$\theta_{w \max ML} = \frac{v_M}{2}$$

- Tal equação mostra que, para um bocal de comprimento mínimo, o ângulo de expansão da parede a jusante da garganta é igual à metade da função de Prandtl-Meyer para o número de Mach projetado para a saída.

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- Para o escoamento axissimétrico irrotacional, a filosofia do método das características é a mesma aplicada anteriormente. Alguns detalhes, contudo, são diferentes, em especial em relação às equações de compatibilidade.
- Considere um sistema de coordenadas cilíndricas, com eixos r , ϕ e x , com componentes da velocidade v , w e u .

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- Neste caso, a equação da continuidade

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

- é escrita como

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho w)}{\partial \phi} + \frac{\rho v}{r} = 0$$

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- Lembrando-se que para o escoamento axissimétrico tem-se $\partial/\partial\phi = 0$, a equação anterior torna-se

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} = 0$$

- Da equação de Euler para escoamento irrotacional

$$dp = -\rho V dV = -\frac{\rho}{2} d(V^2) = -\frac{\rho}{2} d(u^2 + v^2 + w^2)$$

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- Contudo, como a velocidade do som é dada por $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_s = dp / d\rho$ e no caso do escoamento axissimétrico $w = 0$, obtém-se

$$d\rho = -\frac{\rho}{a^2} (u du + v dv)$$

- de onde segue-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{a^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{\rho}{a^2} \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- Substituindo as equações anteriores na equação da continuidade obtém-se

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{uv}{a^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{uv}{a^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{v}{r}$$

- A condição de irrotacionalidade é

$$\nabla \times \vec{V} = 0$$

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- que em coordenadas cilíndricas pode ser escrita como

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & r\hat{e}_\phi & \hat{e}_x \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial x} \\ v & r w & u \end{vmatrix} = 0$$

- que proporciona para o escoamento axissimétrico

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- Substituindo tal condição na equação proveniente da equação da continuidade, tem-se

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{u v}{a^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{v}{r}$$

- Tendo-se em mente que $u = u(x, r)$ e que $v = v(x, r)$ pode-se escrever:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial r} dr = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial x} dr$$

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial r} dr$$

- As três equações anteriores devem ser solucionadas para as três derivadas,

$$\partial u / \partial x, \partial v / \partial x, \partial v / \partial r$$

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- Para se determinar as linhas características e as equações de compatibilidade, deve-se solucionar as equações anteriores para $\partial v / \partial x$ como se segue:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & -\frac{v}{r} & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & du & 0 \\ 0 & dv & dr \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \frac{u^2}{a^2} & -2\frac{uv}{a^2} & 1 - \frac{v^2}{a^2} \\ dx & dr & 0 \\ 0 & dx & dr \end{vmatrix}} = \frac{N}{D}$$

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- As direções características são obtidas ao se fazer $D = 0$. Neste caso

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{char} = \frac{-uv/a^2 \pm \sqrt{[(u^2 + v^2)/a^2] - 1}}{1 - (u^2/a^2)}$$

- que é idêntica à solução obtida para o escoamento irrotacional bidimensional. Desta forma, tem-se que

$$\left(\frac{dr}{dx}\right)_{char} = \tan(\theta \mp \mu)$$

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- Nota-se, assim, que as características para um escoamento axissimétrico irrotacional são linhas de Mach.
- As equações de compatibilidade são obtidas ao se fazer $N = 0$. Neste caso,

$$\frac{dv}{du} = \frac{-\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) - \frac{v}{r} \frac{dx}{du}}{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{dx}{dr}}$$

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- que escrita de outra forma

$$\frac{dv}{du} = - \frac{\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) dr}{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) dx} - \frac{\frac{v}{r} \frac{dr}{du}}{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)}$$

- O termo dr/dx é a direção característica e, neste caso, obtém-se

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

$$\frac{dv}{du} = - \frac{\frac{uv}{a^2} \mp \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1}}{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)} - \frac{\frac{v}{r} \frac{dr}{du}}{\left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)}$$

- Substituindo-se, então,

$$u = V \cos \theta \quad v = V \sin \theta$$

- Após manipulações, obtém-se

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

$$d\theta = \mp \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \pm \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} \mp \cot \theta} \frac{dr}{r}$$

- O primeiro termo do lado direito da equação acima é a diferencial da função de Prandtl-Meyer, $d\nu$. Assim, as formas finais da equação da compatibilidade serão:

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

– Ao longo da característica C_- :

$$d(\theta + \nu) = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} - \cot \theta} \frac{dr}{r}$$

– Ao longo da característica C_+ :

$$d(\theta - \nu) = -\frac{1}{\sqrt{M^2 - 1} + \cot \theta} \frac{dr}{r}$$

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- Comparando-se as equações de compatibilidade para o escoamento axissimétrico irrotacional às equações obtidas para o escoamento irrotacional bidimensional, observa-se que:
 - No caso axissimétrico, as equações de compatibilidade são equações diferenciais e não equações algébricas, como no caso bidimensional.

11.8 Método das características para escoamento axissimétrico irrotacional

- A quantidade $\theta + v$ não é mais constante ao longo de uma característica C_- . Ao invés disso, seu valor depende da localização espacial no campo de escoamento ditado por dr/r . O mesmo vale para $\theta - v$ ao longo de C_+ .

11.9 Método das características para escoamentos rotacionais

- Embora o escoamento rotacional seja mais complexo que o irrotacional, a filosofia do método das características permanece a mesma.

- A partir do teorema de Crocco

$$T \nabla s = \nabla h_0 - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$$

- verifica-se que o escoamento rotacional ocorre quando condições não-isentrópicas e/ou não-adiabáticas estão presentes.

11.9 Método das características para escoamentos rotacionais

- Sem a simplificação obtida pela condição de irrotacionalidade, não é possível obter um sistema de três equações independentes com três derivadas não conhecidas para as variáveis do escoamento. Ao invés disso, para um escoamento rotacional, as equações de conservação bem como as relações auxiliares conduzem a um mínimo de oito equações com oito derivadas desconhecidas.

11.9 Método das características para escoamentos rotacionais

- Neste caso, as linhas características e as equações de compatibilidade correspondentes são encontradas através do cálculo de oito determinantes.
- Os resultados para escoamentos bidimensionais e axissimétricos, contudo, mostram que existem três conjuntos de características – linhas de Mach à esquerda, à direita e linhas de corrente do escoamento.

11.9 Método das características para escoamentos rotacionais

- As equações de compatibilidade ao longo das linhas de Mach são da forma

$$dV = f \left(d\theta, ds, dh_0, \frac{dr}{r} \right)$$

- e, ao longo das linhas de corrente,

$$dh_0 = \dot{q}$$

$$T ds = de + p d \frac{1}{\rho}$$

11.9 Método das características para escoamentos rotacionais

- As equações anteriores devem ser resolvidas passo a passo, de modo acoplado.

11.10 Método das características tridimensional

- As equações de conservação para o escoamento invíscido tridimensional são equações do tipo hiperbólico, de modo que o método das características pode ser empregado para resolver os campos de escoamento, embora de um modo muito mais complexo que os casos bidimensional ou axissimétrico.

11.10 Método das características tridimensional

- Considerando-se um ponto b em um escoamento tridimensional geral. Através desse ponto, as direções características geram dois conjuntos de superfícies tridimensionais – um cone de Mach com vértice em b e semi-ângulo igual ao ângulo de Mach local μ , e uma superfície de corrente através do ponto b .

11.10 Método das características tridimensional

- As interseções dessas superfícies estabelece uma complexa rede tridimensional de pontos. Além disso, as equações de compatibilidade ao longo de raios arbitrários do cone de Mach contêm derivadas cruzadas que devem ser avaliadas em direções que não as das características. Tais soluções, contudo, pode ser obtidas.

11.10 Método das características tridimensional

- Rakich empregou uma modificação dessa filosofia, chamada de “semicaracterísticas” ou “método do plano de referência”, na qual o campo de escoamento tridimensional é dividido em um número arbitrário de planos contendo a linha de centro do corpo. Em cada plano, uma série de pontos são estabelecidos ao longo de linhas retas, perpendiculares localmente à superfície do corpo.

11.10 Método das características tridimensional

- Assumindo-se que as propriedades do escoamento sejam conhecidas nos pontos de malha denotados por círculos fechados ao longo da reta ab . Além disso, arbitrariamente escolha o ponto 1 da próxima linha a jusante, cd . Sejam C_+ , C_- e S as projeções no plano de referência do cone de Mach e da linha de corrente através do ponto 1.

11.10 Método das características tridimensional

- Estende-se essas características a montante até que intersectem a linha de dados ab nos pontos marcados por X. As propriedades nessas interseções são obtidas pela interpolação entre os dados conhecidos nos círculos fechados. Assim, as propriedades do escoamento no ponto 1 são obtidas resolvendo-se as equações de compatibilidade ao longo das características:

11.10 Método das características tridimensional

$$\frac{\beta}{\rho V^2} \frac{dp}{dC_+} + \cos \psi \frac{d\theta}{dC_+} = (f_1 + \beta f_2) \sin \mu$$

$$\frac{\beta}{\rho V^2} \frac{dp}{dC_-} - \cos \psi \frac{d\theta}{dC_-} = (f_1 - \beta f_2) \sin \mu$$

$$\frac{d\psi}{dS} = 0$$

- onde:

$$\psi = \sin^{-1} \left(\frac{w}{V} \right)$$

11.10 Método das características tridimensional

$$\beta = \sqrt{M^2 - 1}$$

$$f_1 = -\frac{\cos \psi \sin \theta}{r}$$

$$f_2 = -\frac{\sin^2 \psi \cos \theta}{r}$$

$$f_3 = -\frac{\sin \psi \sin \theta}{r}$$