Dinâmica de Gases

Capítulo 02

Forma integral das equações de conservação para escoamentos invíscidos

2.1 Introdução

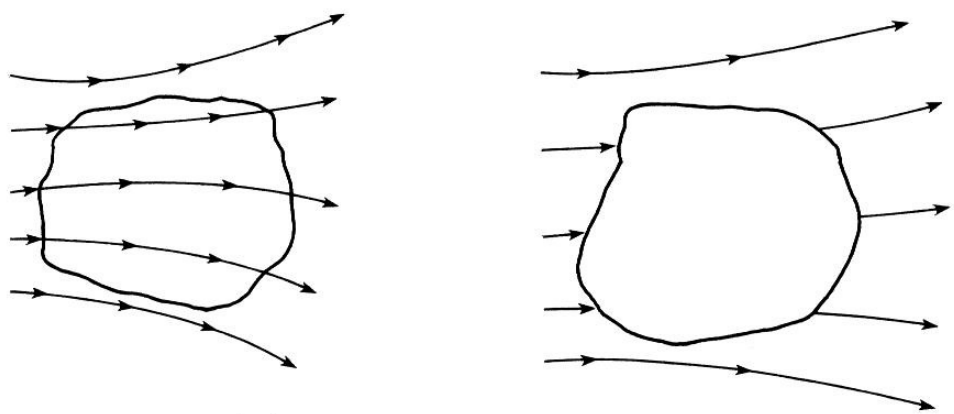
- Princípios básicos das equações de conservação:
  - A massa não pode ser criada ou destruída.

  - A taxa de variação do momentum de um corpo é igual à força resultante exercida sobre o mesmo (Segunda Lei de Newton).

  - A energia não pode ser criada ou destruída, ela pode apenas mudar de forma (Primeira Lei da Termodinâmica).

2.1 Introdução

- Abordagem por volumes de controle:
  - Obtenção direta das equações de conservação na forma integral.



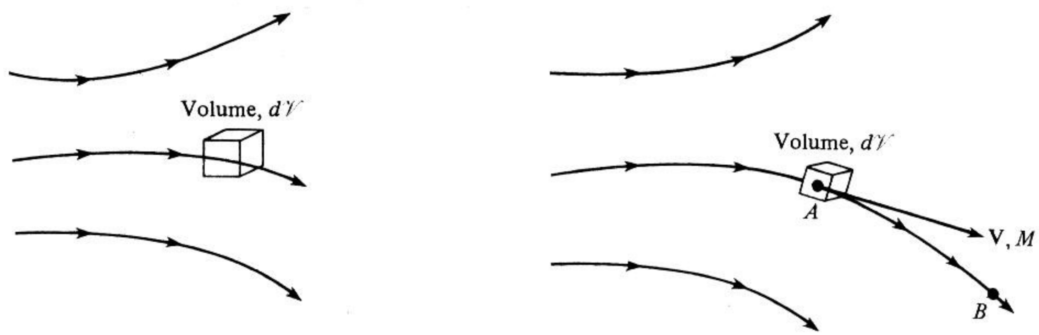
Finite control volume fixed in space with the fluid moving through it.

Finite control volume moving with the fluid such that the same fluid particles are always in the same control volume

Figure 2.2 | Finite control volume approach.

2.1 Introdução

- Abordagem por elementos infinitesimais de fluido:
  - Obtenção direta das equações de conservação na forma diferencial.



Infinitesimal fluid element fixed in space with the fluid moving through it

Infinitesimal fluid element moving along a streamline with the velocity **V** equal to the flow velocity at each point

Figure 2.3 | Infinitesimal fluid element approach.

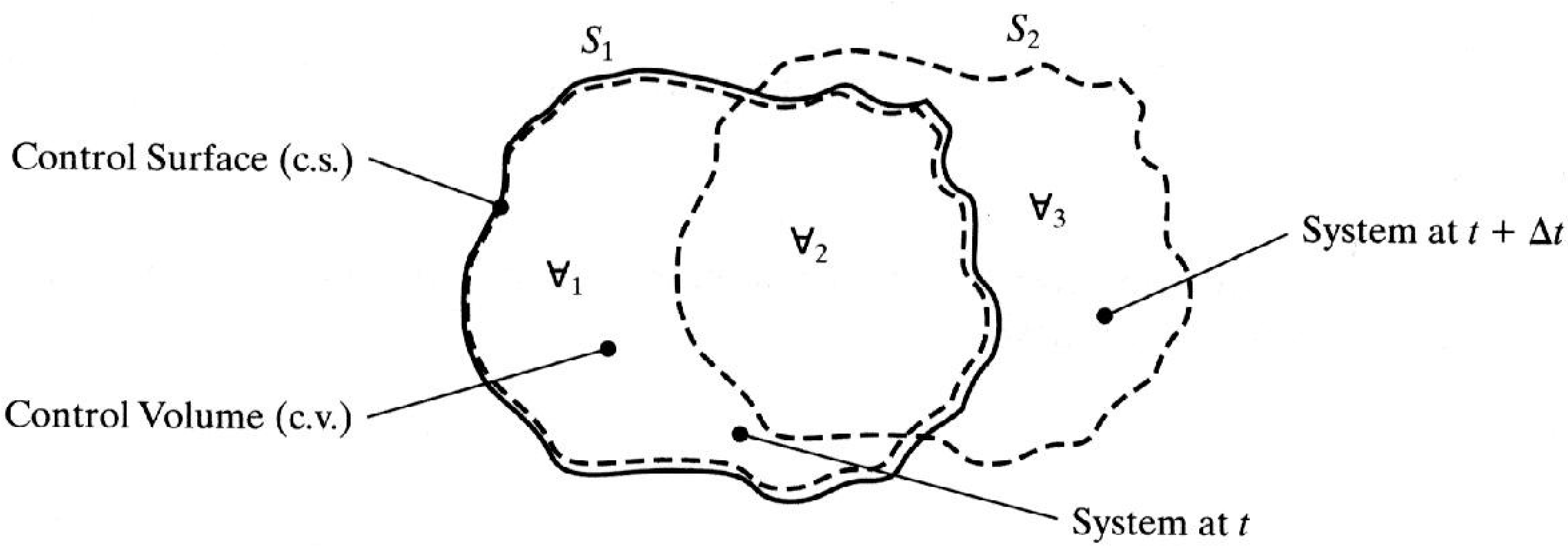
2.1 Introdução

- Abordagem molecular:
  - Abordagem microscópica na qual as leis fundamentais da natureza são aplicadas diretamente às moléculas, com uma média estatística adequada. Isto conduz à equação de Boltzmann para a teoria cinética, da qual as equações de conservação na forma diferencial podem ser extraídas.

2.2 Abordagem por volumes de controle

- Abordagem Lagrangiana: considera-se uma massa fixa de partículas de fluido, seguindo-a através do campo de escoamento.
- Abordagem Euleriana: considera-se um volume de controle fixo no escoamento, relatando-se os movimentos de massa, momentum e energia através das fronteiras do volume às variações que ocorrem dentro do volume de controle.

2.2 Abordagem por volumes de controle



2.2 Abordagem por volumes de controle

- Da figura anterior:

$$S_1 = \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2$$

$$S_2 = \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3$$

- Seja $X(t)$ a massa, o momentum ou a energia total apresentada pelo sistema de partículas no tempo t.

$$X(t) = X_{\mathcal{V}_1}(t) + X_{\mathcal{V}_2}(t)$$

2.2 Abordagem por volumes de controle

- No tempo t + Δt:

$$X(t+\Delta t) = X_{\mathcal{V}_2}(t+\Delta t) + X_{\mathcal{V}_3}(t+\Delta t)$$

- A variação de X do sistema de partículas durante o intervalo de tempo será:

$$X(t+\Delta t) - X(t) = X_{\mathcal{V}_2}(t+\Delta t) - X_{\mathcal{V}_2}(t) + X_{\mathcal{V}_3}(t+\Delta t) - X_{\mathcal{V}_1}(t)$$

2.2 Abordagem por volumes de controle

- Adicionando-se e subtraindo-se $X_{\mathcal{V}_1}(t+\Delta t)$ e dividindo-se a equação resultante por Δt:

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{\Delta X_{\mathcal{V}_2+\mathcal{V}_1}}{\Delta t} = \frac{X_{\mathcal{V}_3}(t+\Delta t) - X_{\mathcal{V}_1}(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

- Ao se fazer Δt tender a zero, o volume $\mathcal{V}_1+\mathcal{V}_2$ se aproxima do valor do volume de controle. Assim, o lado esquerdo da expressão anterior representa a taxa temporal de variação de X no sistema.

2.2 Abordagem por volumes de controle

- A derivada $\left(dX/dt\right)_{sistema}$ é conhecida como derivada substantiva ou material, sendo denotada por DX/Dt porque representa a variação de X com o tempo enquanto uma quantidade fixa de massa (material) se move com o fluido.
- O segundo termo da expressão representa a diferença entre as taxas de entrada e de saída de X no volume de controle.

2.2 Abordagem por volumes de controle

- Movimento de massa através da superfície de controle:

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_{\substack{\text{para um sistema}\\ \text{com massa fixa se}\\ \text{movendo com um fluido}}} = \frac{DX}{Dt}$$

$$= \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{\substack{\text{para o fluido}\\ \text{em um volume}\\ \text{de controle}}} + \left(\oiint_S x\left(\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}\right)\right)_{\substack{\text{integração sobre}\\ \text{a superfície do volume}\\ \text{de controle}}}$$

2.2 Abordagem por volumes de controle

- A variação temporal de X no volume de controle também pode ser escrita como uma integral pois para qualquer elemento de massa dm tem-se

$$dX_{\substack{\text{volume} \\ \text{de controle}}} = x\,dm = x\,\rho\,d\mathcal{V}$$

2.2 Abordagem por volumes de controle

- Integrando-se sobre todo o volume de controle obtém-se

$$\frac{DX}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} x \rho \, d\mathcal{V} + \oiint_{S} x \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S} \right)$$

- A expressão anterior é conhecida como equação de transporte de Reynolds e relaciona as propriedades de um sistema de partículas com massa fixa às propriedades do fluido interno e do fluido que cruza a superfície do volume de controle.

2.3 Equação da conservação da massa (eq. da continuidade)

- Princípio físico: a massa não pode ser criada ou destruída.

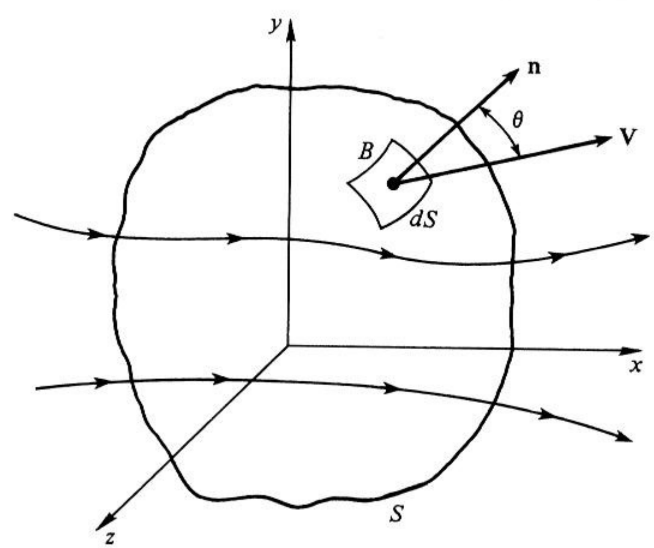


Figure 2.4 | Fixed control volume for derivation of the governing equations.

2.3 Equação da conservação da massa (eq. da continuidade)

- Fluxo de massa através de dS:

$$\dot{m} = \rho \left(V \cos\theta \right) dS = \rho\, V_n \, dS = \rho\, \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

- Fluxo de massa que entra no volume:

$$-\oiint_S \rho\, \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

2.3 Equação da conservação da massa (eq. da continuidade)

- Massa de um volume infinitesimal:

$$\oiiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V}$$

- Taxa de variação da massa com o tempo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V}$$

2.3 Equação da conservação da massa (eq. da continuidade)

- Empregando-se o princípio fundamental:

$$-\oiint_{S} \rho \, \vec{V} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V}$$

- Validade: todos os escoamentos (viscosos ou invíscidos, compressíveis ou incompressíveis)

2.3 Equação da conservação da massa (eq. da continuidade)

- Obtenção a partir da equação de transporte de Reynolds:
  - Tomando-se $x = 1$ e considerando-se um sistema fixo de massa, $Dm/Dt = 0$, tem-se:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \, d\mathcal{V} + \oiint_{S} \rho \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

2.4 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Princípio físico: a taxa de variação da quantidade de movimento de um corpo é igual à força resultante que atua sobre o mesmo.

- Forma vetorial:

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{V}\right)=\vec{F}$$

2.4 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Para massa constante:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\,\vec{a}$$

- Tipos de forças atuantes sobre um volume de controle:
  - Forças de corpo.
  - Forças de superfície.

2.4 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Forças de corpo:

$$\text{forças de corpo (total)} = \oiiint_{\mathcal{V}} \rho\, \vec{f}\, d\mathcal{V}$$

- Forças de superfície:
  - Para um fluido invíscido, tem-se

$$\text{força superficial (total)} = -\oiint_{S} p\, d\vec{S}$$

2.4 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Força resultante sobre o volume:

$$\vec{F} = \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \, \vec{f} \, d\mathcal{V} - \oiint_{S} p \, d\vec{S}$$

- Fluxo de momentum associado ao fluxo mássico para o volume de controle:

$$A_1 = \oiint_{S} \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S} \right) \vec{V}$$

2.4 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Fluxo de momentum devido a flutuações transientes:

$$A_2 = \frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{V}\, d\mathcal{V} = \oiiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \left(\rho \vec{V} \right)}{\partial t} d\mathcal{V}$$

- Taxa instantânea total de variação do momentum:

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{V} \right) = A_1 + A_2 = \oiint_{S} \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S} \right) \vec{V} + \oiiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \left(\rho \vec{V} \right)}{\partial t} d\mathcal{V}$$

2.4 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Escoamento invíscido:

$$\oint\!\!\!\oint_S \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}\right)\vec{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial\left(\rho \vec{V}\right)}{\partial t} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{f}\, d\mathcal{V} - \oint\!\!\!\oint_S p\, d\vec{S}$$

- Escoamento viscoso:

$$\oint\!\!\!\oint_S \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}\right)\vec{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial\left(\rho \vec{V}\right)}{\partial t} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{f}\, d\mathcal{V} - \oint\!\!\!\oint_S p\, d\vec{S} + \vec{F}_{visc}$$

2.4 Equação da conservação da quantidade de movimento

- Obtenção a partir da equação de transporte de Reynolds:
  - Considerando-se a segunda lei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{D\left(m\vec{V}\right)}{Dt} = \frac{D\vec{P}}{Dt}$$

sendo o momento linear do sistema:

$$\vec{P} = m\vec{V}$$

2.4 Equação da conservação da quantidade de movimento

– Substituindo-se, então, X por $\vec{P}$ na equação de transporte de Reynolds, tem-se:

$$x = \vec{P}/m = \vec{V}$$

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{V} \, d\mathcal{V} + \oiint_{S} \vec{V} \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S} \right)$$

$$\sum \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{V} \, d\mathcal{V} + \oiint_{S} \vec{V} \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S} \right)$$

2.4 Equação da conservação da quantidade de movimento

– Considerando-se as forças de campo e as forças de corpo, tem-se então:

$$\sum \vec{F} = \oiiint_{\mathcal{V}} \rho\, \vec{f}\, d\mathcal{V} - \oiint_{S} p\, d\vec{S}$$

– Para escoamento invíscido:

$$\oiint_{S} \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}\right)\vec{V} + \oiiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial\left(\rho \vec{V}\right)}{\partial t} d\mathcal{V} = \oiiint_{\mathcal{V}} \rho\, \vec{f}\, d\mathcal{V} - \oiint_{S} p\, d\vec{S}$$

2.5 Equação da conservação da energia

- Princípio físico: a energia não pode ser criada ou destruída; ela apenas muda de forma.

- Taxa de calor transferida para o (ou a partir do) fluido:

$$B_1 = \oiiint_{\mathcal{V}} \dot{q} \rho \, d\mathcal{V}$$

sendo $\dot{q}$ a taxa específica de transferência de calor.

2.5 Equação da conservação da energia

- Taxa de trabalho efetuado em um corpo em movimento:

$$-\oiint_{S} \left(p \, d\vec{S} \right) \cdot \vec{V}$$

- Taxa de trabalho efetuado por forças de corpo:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\rho \, \vec{f} \, d\mathcal{V} \right) \cdot \vec{V}$$

2.5 Equação da conservação da energia

- Taxa de trabalho efetuado sobre o fluido dentro do volume de controle:

$$B_2 = -\oiint_S p\, d\vec{S} \cdot \vec{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left(\vec{f}\, d\mathcal{V} \right) \cdot \vec{V}$$

- Taxa líquida de escoamento de energia através da superfície:

$$\oiint_S \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S} \right) \left(u + \frac{V^2}{2} \right)$$

2.5 Equação da conservação da energia

- Taxa temporal de variação de energia dentro do volume de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_{\mathcal{V}} \rho\left(u+\frac{V^2}{2}\right)d\mathcal{V}$$

- Taxa de variação da energia devido ao escoamento através do volume:

$$B_3=\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_{\mathcal{V}} \rho\left(u+\frac{V^2}{2}\right)d\mathcal{V}+\oiint_S\left(\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}\right)\left(u+\frac{V^2}{2}\right)$$

2.5 Equação da conservação da energia

- Da Primeira Lei da Termodinâmica:

$$B_1 + B_2 = B_3$$

ou seja,

$$\oiiint_{\mathcal{V}} \dot{q}\,\rho\, d\mathcal{V} - \oiint_{S} p\, d\vec{S}\cdot\vec{V} + \oiiint_{\mathcal{V}} \rho\left(\vec{f}\cdot\vec{V}\right) d\mathcal{V} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\oiiint_{\mathcal{V}}\left[\rho\left(u+\frac{V^2}{2}\right)\right] d\mathcal{V} + \oiint_{S}\rho\left(u+\frac{V^2}{2}\right)\vec{V}\cdot d\vec{S}$$

2.5 Equação da conservação da energia

- Na equação anterior não estão incluídos os seguintes fenômenos:
  - Taxa de trabalho efetuado sobre o fluido pela rotação de um eixo: $\dot{W}_{shaft}$
  - Taxa de trabalho efetuado por tensões viscosas: $\dot{W}_{viscous}$
  - Calor trocado pela superfície do volume de controle por condução e/ou difusão. Associado aos efeitos de radiação, tais efeitos são denotados por $\dot{Q}$

2.5 Equação da conservação da energia

- Equação completa:

$$\dot{Q} + \dot{W}_{shaft} + \dot{W}_{viscous} + \oiiint_{\mathcal{V}} \dot{q}\,\rho\, d\mathcal{V} - \oiint_{S} p\, d\vec{S} \cdot \vec{V} + \oiiint_{\mathcal{V}} \rho\left(\vec{f} \cdot \vec{V}\right) d\mathcal{V} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} \left[\rho\left(u + \frac{V^2}{2}\right)\right] d\mathcal{V} + \oiint_{S} \rho\left(u + \frac{V^2}{2}\right) \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

2.5 Equação da conservação da energia

- Obtenção a partir da equação de transporte de Reynolds:
  - A partir da primeira lei da termodinâmica:

$$\delta Q + \delta W = dE$$

  - Substituindo-se X pela energia total (U) e, consequentemente, x por u:

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{\delta Q}{dt} + \frac{\delta W}{dt} = \dot{Q} + \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} e \rho \, d\mathcal{V} + \oiint_{S} e \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S} \right)$$

2.5 Equação da conservação da energia

– Admitindo-se que o sistema possua apenas energias interna e cinética, tem-se:

$$E = U + \frac{1}{2} m V^2$$

$$e = u + \frac{1}{2} V^2$$

$$\dot{Q} + \dot{W} = \frac{\partial}{\partial t} \oiiint_{\mathcal{V}} \left(u + \frac{V^2}{2} \right) \rho \, d\mathcal{V} + \oiint_{S} \left(u + \frac{V^2}{2} \right) \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S} \right)$$

2.5 Equação da conservação da energia

– Considerando-se que o calor recebido pelo sistema seja avaliado por:

$$\dot{Q} = \oiiint_{\mathcal{V}} \dot{q}\,\rho\, d\mathcal{V}$$

– Admitindo-se, ainda, que o trabalho efetuado sobre o sistema possa ser dividido em duas parcelas: uma devido ao deslocamento de massa através das fronteiras do sistema e a outra correspondente ao trabalho de forças de corpo.

2.5 Equação da conservação da energia

– Trabalho devido ao deslocamento de massa através das fronteiras:

$$\dot{W}_1 = \pm \frac{p\,dS}{\Delta t}\Delta x = \pm p\,V\,dS$$

aplicando-se a toda a superfície de controle:

$$\dot{W}_1 = -\oiint_S p\,\vec{V} \cdot d\vec{S}$$

2.5 Equação da conservação da energia

– Trabalho devido às forças de corpo atuantes sobre o sistema:

$$\dot{W}_2 = \oiiint_{\mathcal{V}} \left(\rho \, \vec{f} \, d\mathcal{V} \right) \cdot \vec{V}$$

– Tem-se, desse modo:

$$\dot{W} = -\oiint_{S} p \vec{V} \cdot d\vec{S} + \oiiint_{\mathcal{V}} \left(\rho \, \vec{f} \, d\mathcal{V} \right) \cdot \vec{V}$$

2.5 Equação da conservação da energia

– A equação da energia, neste caso, será expressa como:

$$\oiiint_{\mathcal{V}} \dot{q}\rho \, d\mathcal{V} - \oiint_{S} p\vec{V}\cdot d\vec{S} + \oiiint_{\mathcal{V}} \rho\left(\vec{f}\cdot\vec{V}\right) d\mathcal{V} =$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\oiiint_{\mathcal{V}} \left(u+\frac{V^2}{2}\right)\rho \, d\mathcal{V} + \oiint_{S}\left(u+\frac{V^2}{2}\right)\left(\rho\vec{V}\cdot d\vec{S}\right)$$

2.6 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- Princípios empregados:
  - A força exercida sobre um corpo pelo escoamento de fluido sobre ou através do corpo é devido apenas à distribuição de pressão e à distribuição de tensões cisalhantes sobre a totalidade da superfície exposta do corpo.
  - A forma integral da equação do momentum.

2.6 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- A distribuição de pressões é seguramente o fator determinante no empuxo.

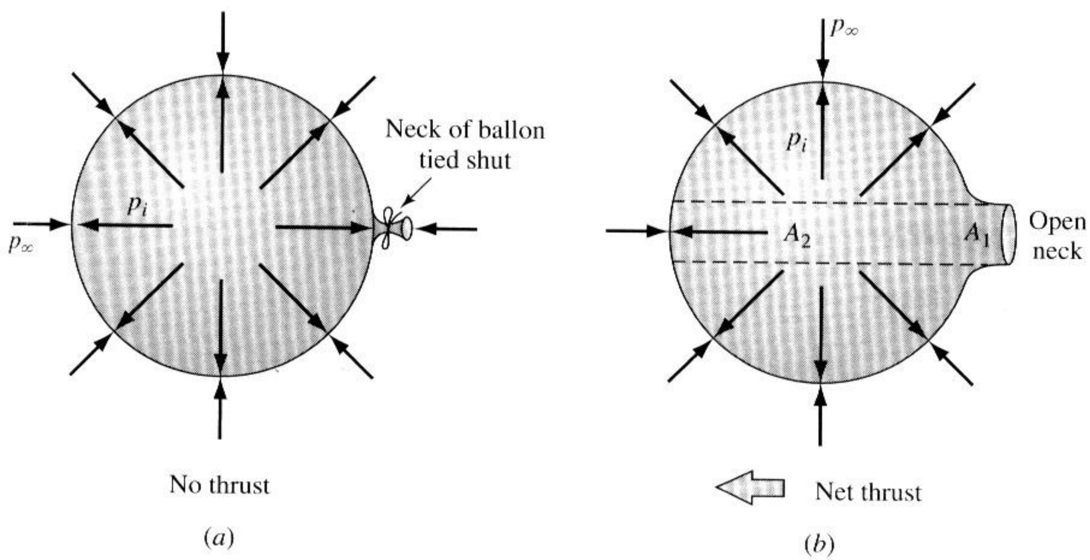


Figure 2.6 | Illustration of thrust on a balloon.

2.6 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

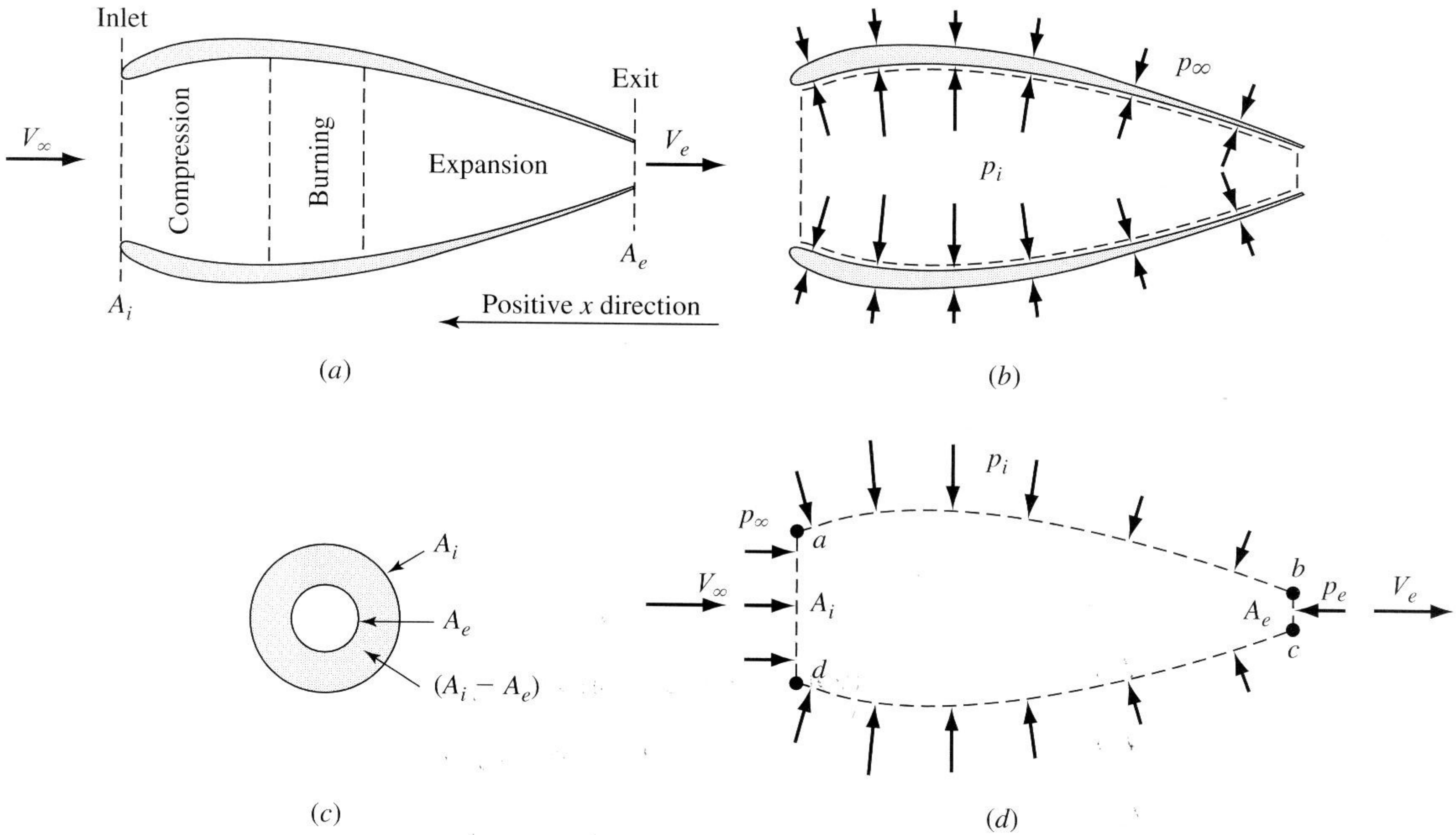


Figure 2.7 | Sketches for the development of the thrust equation.

2.6 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- Força resultante sobre o dispositivo devido à distribuição de pressões:

$$\vec{F} = -\oiint_S p\, d\vec{S}$$

- Empuxo escalar na direção axial (x):

$$T = -\int \left(p_i\, dS\right)_x - \int \left(p_\infty\, dS\right)_x$$

2.6 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- Considerando-se a pressão ambiente como constante:

$$\int \left(p_\infty \, dS\right)_x = p_\infty \int \left(dS\right)_x = p_\infty \left(A_e - A_i\right)$$

deste modo:

$$T = -\int \left(p_i \, dS\right)_x + p_\infty \left(A_i - A_e\right)$$

Força sobre a superfície sólida devido ao gás

2.6 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- Equação do momentum para regime permanente, sem forças de corpo:

$$\oiint_S \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}\right)\vec{V} = -\oiint_S p\, d\vec{S}$$

- Componente axial:

$$\oiint_S \left(\rho\, \vec{V} \cdot d\vec{S}\right) V_x = -\oiint_S \left(p\, d\vec{S}\right)_x$$

2.6 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- Utilizando o volume de controle $abcda$, lado esquerdo da equação:
  - Contornos superior e inferior:

$$\int_{ab} \left(\rho\,\vec{V} \cdot d\,\vec{S}\right) V_x = \int_{cd} \left(\rho\,\vec{V} \cdot d\,\vec{S}\right) V_x = 0$$

  - Na entrada:

$$\int_{ad} \left(\rho\,\vec{V} \cdot d\,\vec{S}\right) V_x = \left(-\,p_\infty\,V_\infty\,A_i\right)\left(-V_\infty\right) = \dot{m}_i\,V_\infty$$

2.6 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

– Na saída:

$$\int_{bc} \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}\right) V_x = \left(p_\infty V_e A_e\right)\left(-V_e\right) = -\dot{m}_e V_e$$

– Soma dos termos:

$$\int \left(\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}\right) V_x = \dot{m}_i V_\infty - \dot{m}_e V$$

2.6 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

Assim:

$$\dot{m}_i V_\infty - \dot{m}_e V = -\int (p\, dS)_x$$

- Para o lado direito da equação acima, empregando o volume *abcda*, tem-se:

$$\int_{ad} (p\, dS)_x = p_\infty A_i$$

$$\int_{bc} (p\, dS)_x = -p_e A_e$$

2.6 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

– Ao longo dos contornos ab e cd, tem-se:

$$\int_{ab} (p\,dS)_x + \int_{cd} (p\,dS)_x = \int_{abcd} (p\,dS)_x$$

– Tem-se deste modo,

$$\dot{m}_i V_\infty - \dot{m}_e V = -p_\infty A_i + p_e A_e - \int_{abcd} (p_i\,dS)_x$$

Força sobre o gás devido à superfície sólida

2.6 Aplicação da equação do mometum: propulsão a jato

- Por fim, tem-se:

$$T = \dot{m}_e V_e - \dot{m}_i V_\infty + p_e A_e - p_\infty A_i + p_\infty \left(A_i - A_e \right)$$

ou seja,

$$T = \dot{m}_e V_e - \dot{m}_i V_\infty - A_e \left(p_e - p_\infty \right)$$