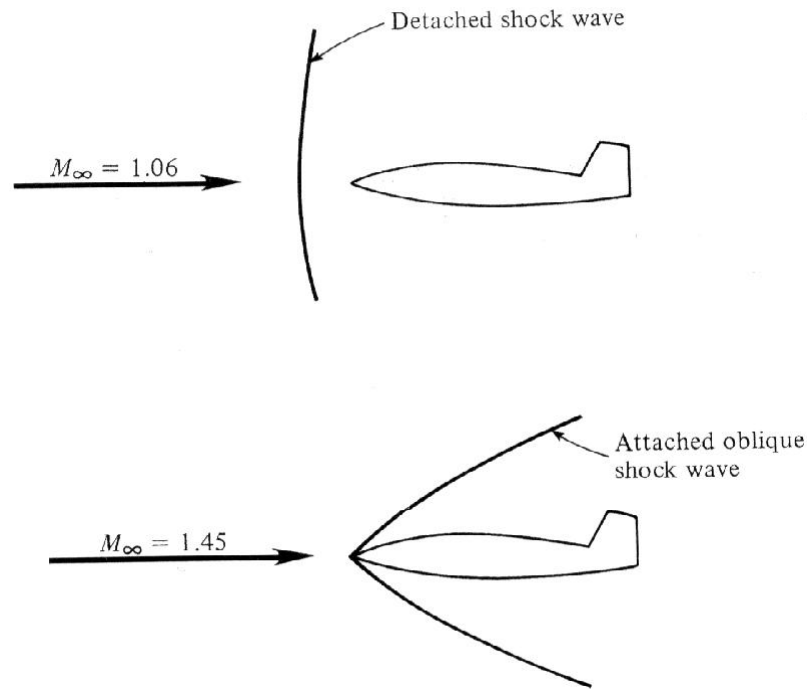


# **Dinâmica de Gases**

## **Capítulo 03**

### **Escoamento unidimensional**

# 3.1 Introdução

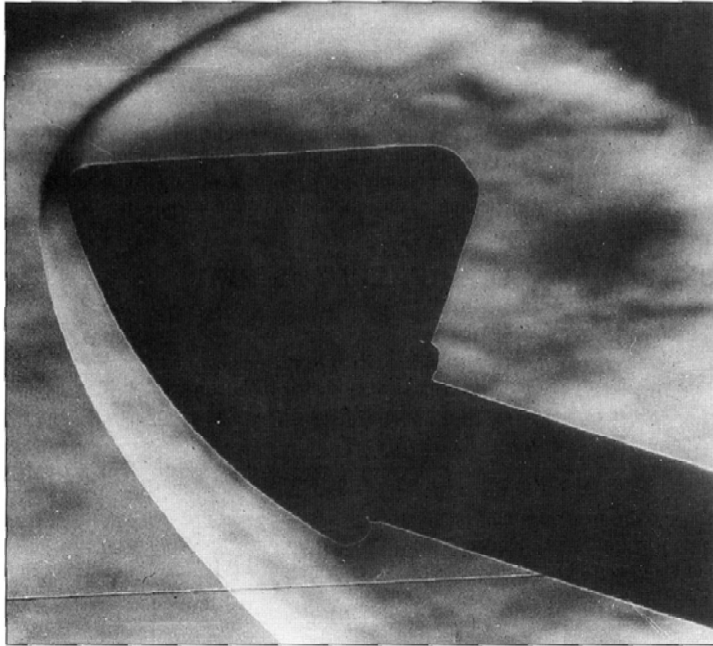


- 14 de outubro de 1947: Chuck Yeager a bordo do Bell XS-1 torna-se o primeiro homem a voar a velocidade superior à do som.
- 26 de março de 1948: durante um mergulho, o capitão Chuck Yeager atinge Mach 1,45 durante um mergulho com o Bell XS-1.

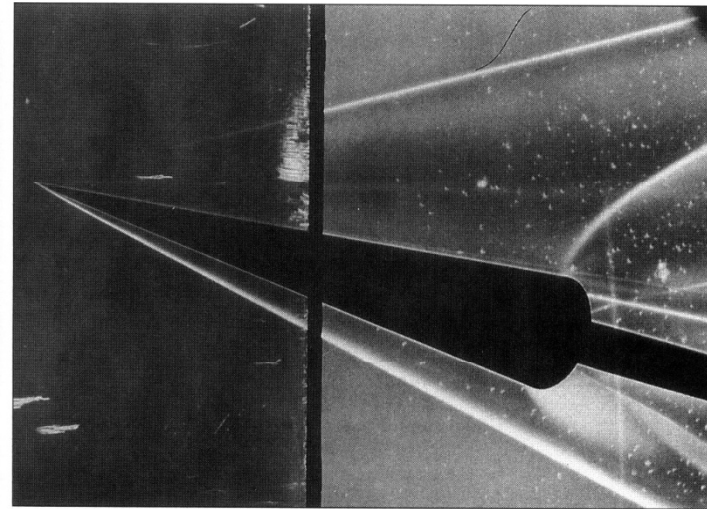
# 3.1 Introdução

- Escoamento unidimensional:
  - Todas as propriedades do escoamento são funções de uma única dimensão espacial.
  - A área da seção transversal é constante.
  - Mecanismos físicos envolvidos:
    - Ondas de choque normais.
    - Trocas térmicas.
    - Atrito.

# 3.1 Introdução

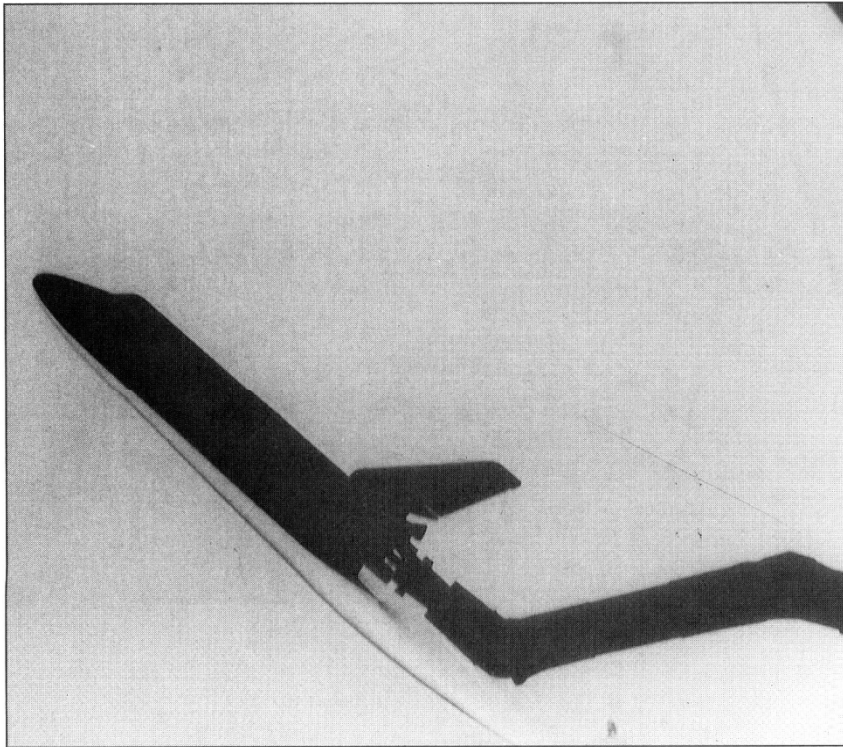


Onda de choque sobre o módulo de comando da Apollo. Modelo em túnel de vento com  $\alpha=33^\circ$  no túnel de vento Langley (Nasa), para ar ionizado com densidade variável a Mach 8.

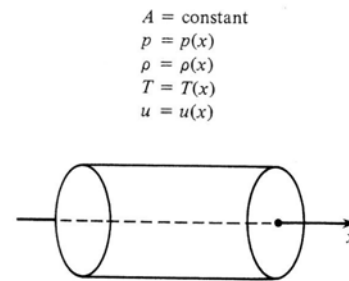


Ondas de choque em um cone de nariz pontiagudo em ângulo de ataque.

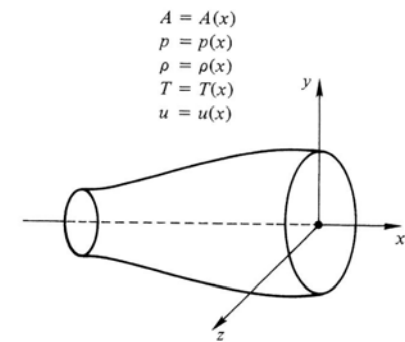
# 3.1 Introdução



Ondas de choque em um túnel de vento para um modelo do ônibus espacial (space shuttle)



(a) One-dimensional flow



(b) Quasi-one-dimensional flow

Comparação entre os escoamentos unidimensional e quase-unidimensional.

# 3.1 Introdução

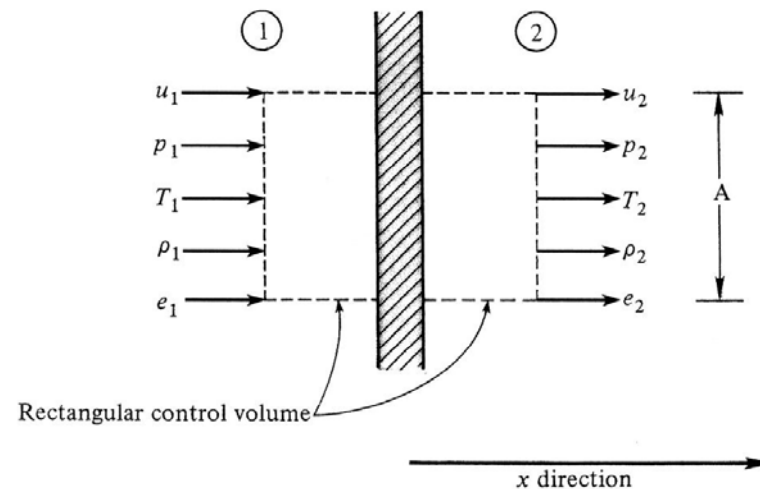
- Choques normais:
  - Propriedades na região do “nariz” de um corpo rombudo movendo-se a velocidades supersônicas.
  - Tomada de ar do motor de alguns aviões a jato.

# 3.1 Introdução

- Trocas térmicas:
  - Efeito da queima de combustível em um motor a jato.
- Atrito:
  - Análise do escoamento de um gás através de tubulações longas.

## 3.2 Equações governantes de escoamentos unidimensionais

- Considerações:
  - Área da seção transversal ao escoamento constante.
  - Regime permanente.
  - Ausência de forças de corpo.





## 3.2 Equações governantes de escoamentos unidimensionais

- Equação da continuidade:

$$-\oiint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$$

$$\oiint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$-\rho_1 u_1 A + \rho_2 u_2 A = 0$$

$$\boxed{\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2}$$

## 3.2 Equações governantes de escoamentos unidimensionais

- Equação do momentum:

$$\oiint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) \vec{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{f} d\mathcal{V} - \oiint_S p d\vec{S}$$

$$\oiint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) \vec{V} = -\oiint_S p d\vec{S}$$

$$\oiint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) u = -\oiint_S (p dS)_x$$

## 3.2 Equações governantes de escoamentos unidimensionais

- Equação do momentum:

$$\rho_1 (-u_1 A) u_1 + \rho_2 (u_2 A) u_2 = -(p_1 A + p_2 A)$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

## 3.2 Equações governantes de escoamentos unidimensionais

- Equação da energia:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathcal{V}} \dot{q} \rho d\mathcal{V} - \oiint_S p \vec{V} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \rho (\vec{f} \cdot \vec{V}) d\mathcal{V} &= \\ = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathcal{V}} \rho \left( u' + \frac{V^2}{2} \right) d\mathcal{V} + \iint_S \rho \left( u' + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

$$\dot{Q} - \oiint_S p \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_S \rho \left( u' + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

## 3.2 Equações governantes de escoamentos unidimensionais

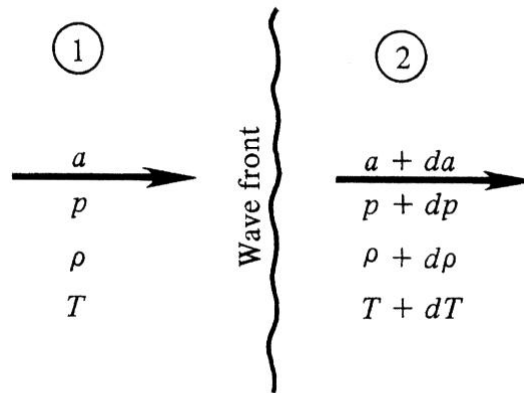
- Equação da energia:

$$\frac{\dot{Q}}{A} + p_1 u_1 + \rho_1 \left( u'_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) u_1 = p_2 u_2 + \rho_2 \left( u'_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) u_2$$

$$\frac{\dot{Q}}{\rho_1 u_1 A} + \frac{p_1}{\rho_1} + u'_1 + \frac{u_1^2}{2} = \frac{p_2}{\rho_2} + u'_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

## 3.3 Velocidade do som e número de Mach



- Equação da continuidade:

$$\rho a = (\rho + d\rho)(a + da)$$

$$a = -\rho \frac{da}{d\rho}$$

## 3.3 Velocidade do som e número de Mach

- Equação do momentum:

$$p + \rho a^2 = (p + dp) + (\rho + d\rho)(a + da)^2$$

$$dp = -2 a \rho da - a^2 d\rho$$

$$da = \frac{dp + a^2 d\rho}{-2 a \rho}$$

$$a = -\rho \left[ \frac{dp/d\rho + a^2}{-2 a \rho} \right]$$

## 3.3 Velocidade do som e número de Mach

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

- As variações que ocorrem através de uma onda sonora são pequenas, sendo os efeitos irreversíveis desprezíveis.

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s$$



## 3.3 Velocidade do som e número de Mach

$$a^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = - \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)_s v^2 = - \frac{v}{(1/v)(\partial v / \partial p)_s} = \frac{v}{\tau_s}$$

$$a = \sqrt{\frac{v}{\tau_s}}$$

- Nota-se que para um escoamento incompressível, a velocidade do som deveria ser infinita

## 3.3 Velocidade do som e número de Mach

- Para um gás caloricamente perfeito:

$$p v^\gamma = \text{const}$$

$$\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = \frac{\gamma p}{\rho}$$

$$a = \sqrt{\gamma R T}$$

## 3.4 Definição de parâmetros de escoamento

- Propriedades características: seriam as propriedades de dado escoamento se o mesmo fosse acelerado ou desacelerado isentropicamente até o número de Mach unitário.
- Propriedades de estagnação (ou totais): seriam as propriedades de dado escoamento desacelerado isentropicamente até que sua velocidade seja nula.

## 3.4 Definição de parâmetros de escoamento

- Número de Mach característico:  $M^* = \frac{V}{a^*}$
- Velocidade de estagnação do som:

$$a_0 = \sqrt{\gamma RT_0}$$

- Massa específica total:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0}$$

## 3.5 Formas alternativas da equação da energia

- Considerando-se um gás em que não haja adição de calor:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

- Para um gás caloricamente perfeito:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

## 3.5 Formas alternativas da equação da energia

$$\frac{p_0}{p} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\gamma/(\gamma - 1)}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma - 1)}$$

- Outras relações úteis:

$$\left( \frac{a^*}{a_0} \right)^2 = \frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}$$

## 3.5 Formas alternativas da equação da energia

$$\frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

- Para o ar em condições padrão ( $\gamma = 1,40$ ):

$$\frac{T^*}{T_0} = 0,833; \quad \frac{p^*}{p_0} = 0,528; \quad \frac{\rho^*}{\rho_0} = 0,634$$

## 3.5 Formas alternativas da equação da energia

- Relação entre número de Mach real e característico:

$$M^2 = \frac{2}{\left[ (\gamma + 1) / M^{*2} \right] - (\gamma - 1)}$$

- Relações:

$$M^* = 1, \quad \text{se } M = 1$$

$$M^* < 1, \quad \text{se } M < 1$$

$$M^* > 1, \quad \text{se } M > 1$$

$$M^* \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}, \quad \text{se } M \rightarrow \infty$$



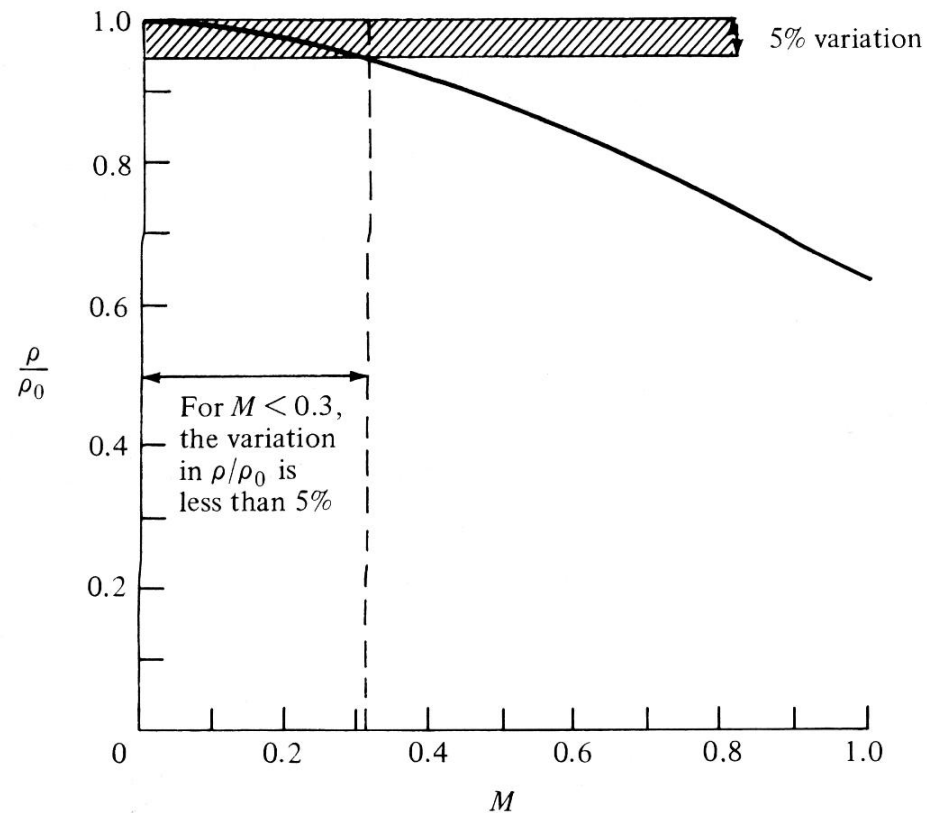
## 3.6 Escoamentos compressíveis e incompressíveis

- Considere um elemento de fluido inicialmente em repouso, que seja acelerado isentropicamente a alguma velocidade  $V$  e número de Mach  $M$ . Nesse caso, a densidade pode ser estimada pela relação:

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{1/(\gamma - 1)}$$

## 3.6 Escoamentos compressíveis e incompressíveis

- Para  $\gamma = 1,40$ :



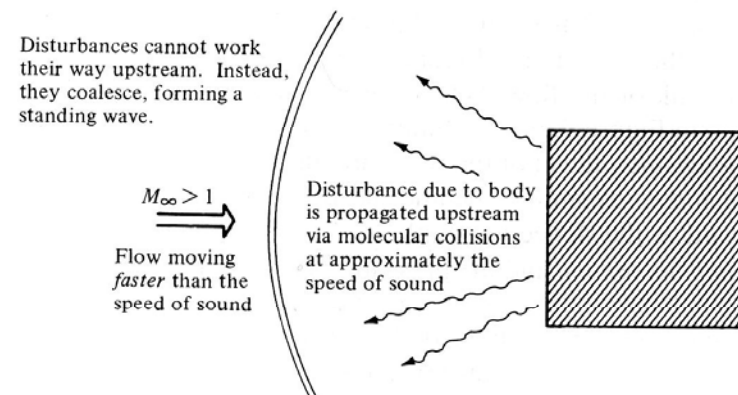
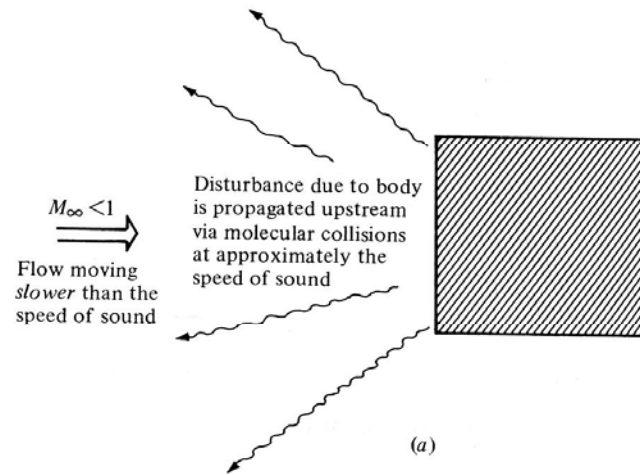
## 3.7 Relações para choques normais

- Ocorrem frequentemente como parte de muitos campos de escoamentos supersônicos.
- Por definição, uma onda de choque normal é perpendicular ao escoamento.
- Corresponde a uma região muito fina (espessura da ordem de poucas vezes o livre caminho médio molecular, da ordem de micrômetros).

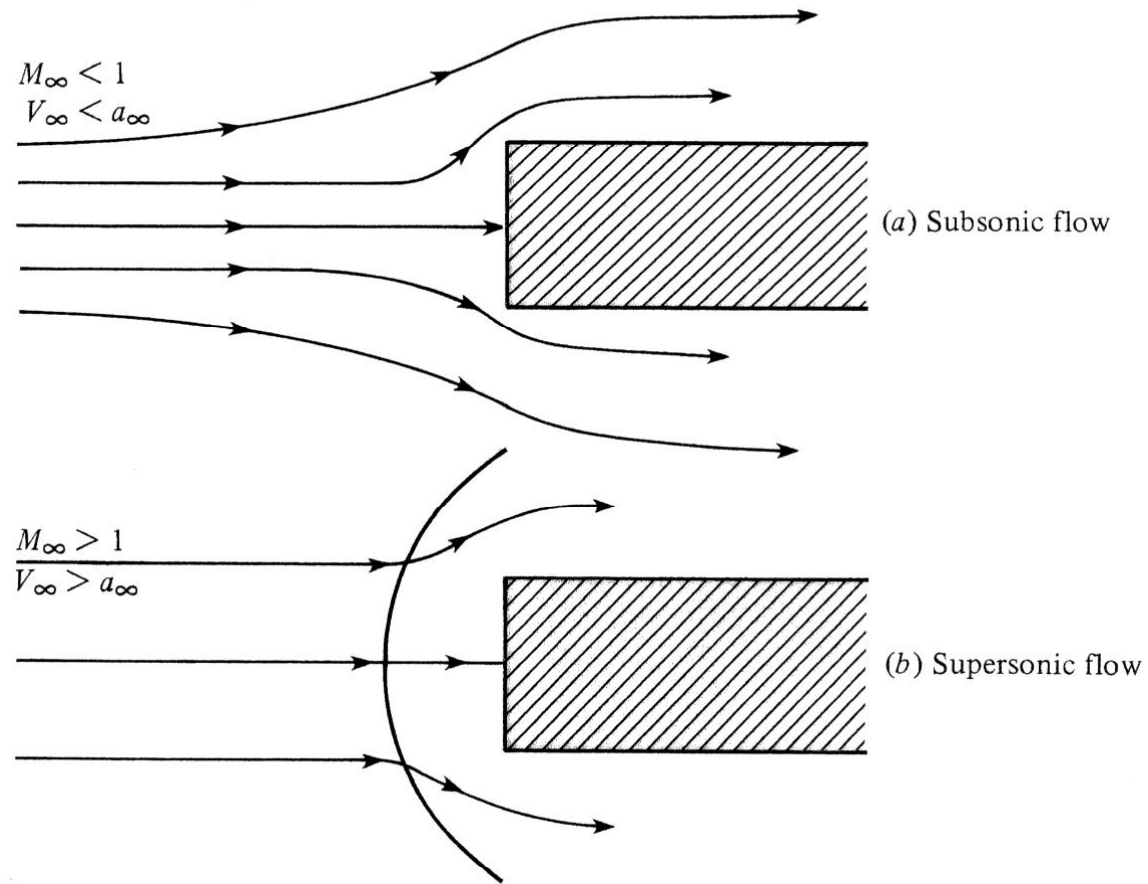
## 3.7 Relações para choques normais

- À frente da onda (montante), o escoamento é supersônico; atrás (jusante), é subsônico.
- Solução da natureza para um problema relacionado à propagação de distúrbios no escoamento.

# 3.7 Relações para choques normais



# 3.7 Relações para choques normais



## 3.7 Relações para choques normais

- A presença de um corpo em um escoamento é propagada através de ondas sonoras.
- À montante da onda, o escoamento não possui nenhum conhecimento da presença do corpo.
- À jusante, como o escoamento é subsônico, as linhas de corrente variam rapidamente para compensar o obstáculo.

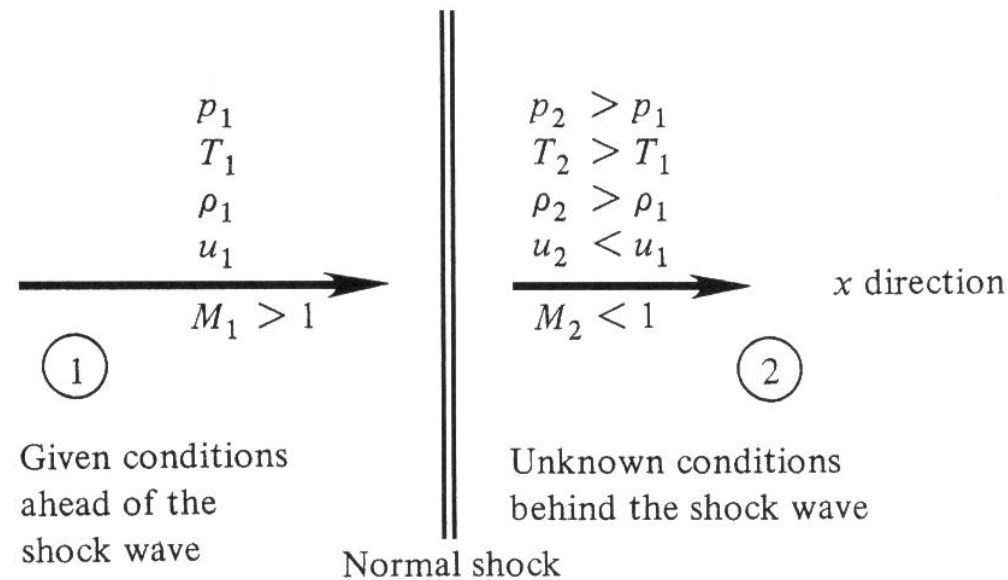
## 3.7 Relações para choques normais

- Hipóteses:
  - Considerar as ondas de choque como descontinuidades através das quais as propriedades do escoamento rapidamente se modificam.
  - Todas as propriedades a montante (índice 1) são conhecidas.
  - Não há trocas térmicas enquanto o escoamento atravessa a onda (caso adiabático).



# 3.7 Relações para choques normais

- Hipóteses:
  - Gás caloricamente perfeito.



## 3.7 Relações para choques normais

- Sistema de equações:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$p = \rho R T$$

$$h = c_p T$$

## 3.7 Relações para choques normais

- Relação de Prandtl:

$$a^* = u_1 u_2$$

da qual se obtém:

$$M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$$

$$M_2^2 = \frac{1 + [(\gamma - 1)/2]M_1^2}{\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)/2}$$

## 3.7 Relações para choques normais

- O número de Mach a jusante de um choque é função apenas do número de Mach a montante.
- Quando  $M_1 = 1$ , tem-se  $M_2 = 1$ . Nesse caso, o choque normal é infinitamente fraco, sendo denominado **Onda de Mach**.

$$M_1 \rightarrow \infty; \quad M_2 \rightarrow \sqrt{(\gamma - 1)/(2\gamma)}$$

## 3.7 Relações para choques normais

- As propriedades do escoamento podem ser obtidas a partir do número de Mach a montante do choque:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(M_1^2 - 1)$$

## 3.7 Relações para choques normais

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{h_2}{h_1} = \left[ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right] \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right]$$

- Para gases termicamente perfeitos, as relações apresentadas não são válidas, pois as propriedades a jusante dependem também da temperatura a montante.
- No caso de um gás quimicamente reativo, também é necessário o conhecimento da pressão a montante.

## 3.7 Relações para choques normais

- Casos-limite para gás caloricamente perfeito,  $\gamma = 1,40$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} M_2 = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} = 0,378$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = 6$$

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{p_2}{p_1} = \infty; \quad \lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{T_2}{T_1} = \infty$$

## 3.7 Relações para choques normais

- Matematicamente, as relações obtidas são válidas para qualquer regime de velocidades; fisicamente, apenas no caso de escoamentos supersônicos tais relações podem ser empregadas. Para mostrar tal fato, é necessário utilizar a segunda lei da termodinâmica, que origina a seguinte expressão:



## 3.7 Relações para choques normais

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left\{ \left[ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right] \left[ \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2} \right] \right\} \\ - R \ln \left[ 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]$$

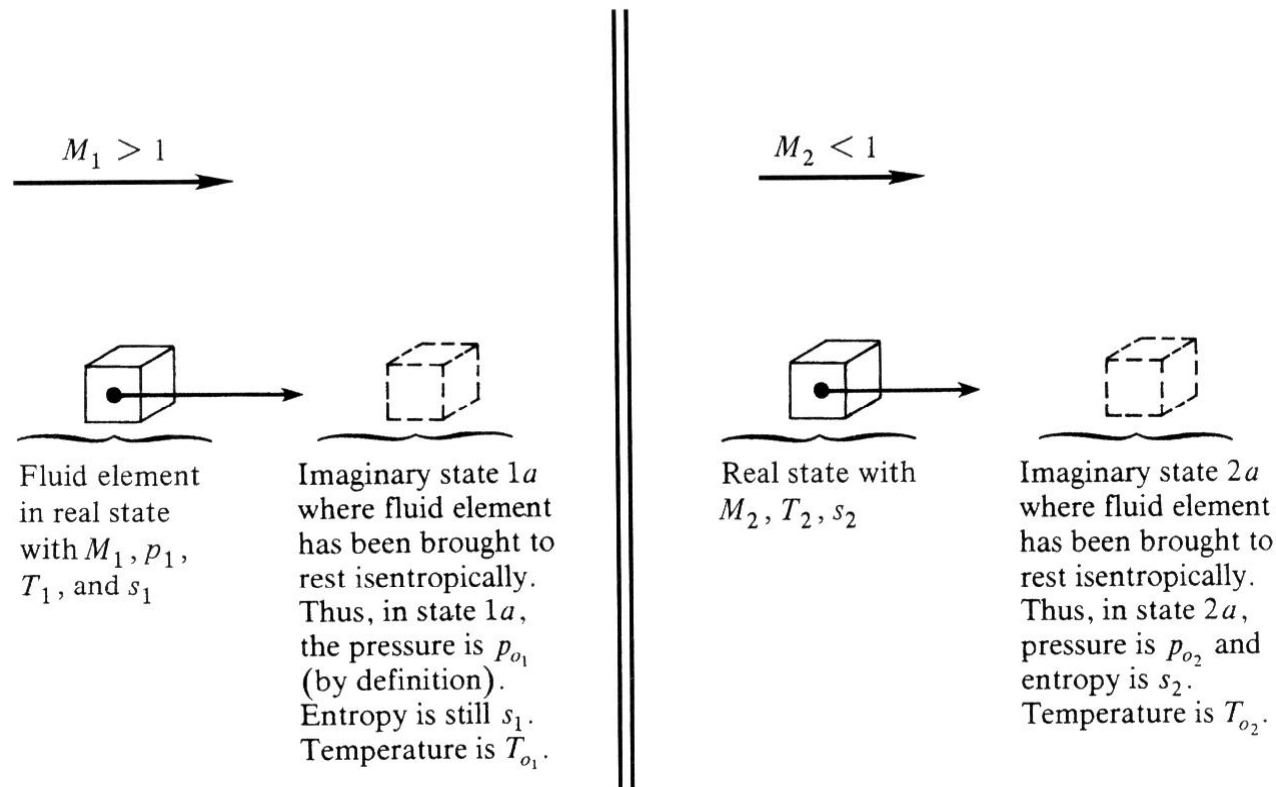
- Nesse caso, a variação de entropia só será positiva se o escoamento a montante for supersônico.

## 3.7 Relações para choques normais

- O aumento de entropia é originado pelos efeitos viscosos (atrito e condução de calor).
- Como as variações de propriedades ocorrem em distâncias muito pequenas, os gradientes originados são elevados e os efeitos viscosos se tornam importantes.

# 3.7 Relações para choques normais

- Propriedades totais ou de estagnação:



## 3.7 Relações para choques normais

- Propriedades totais ou de estagnação:

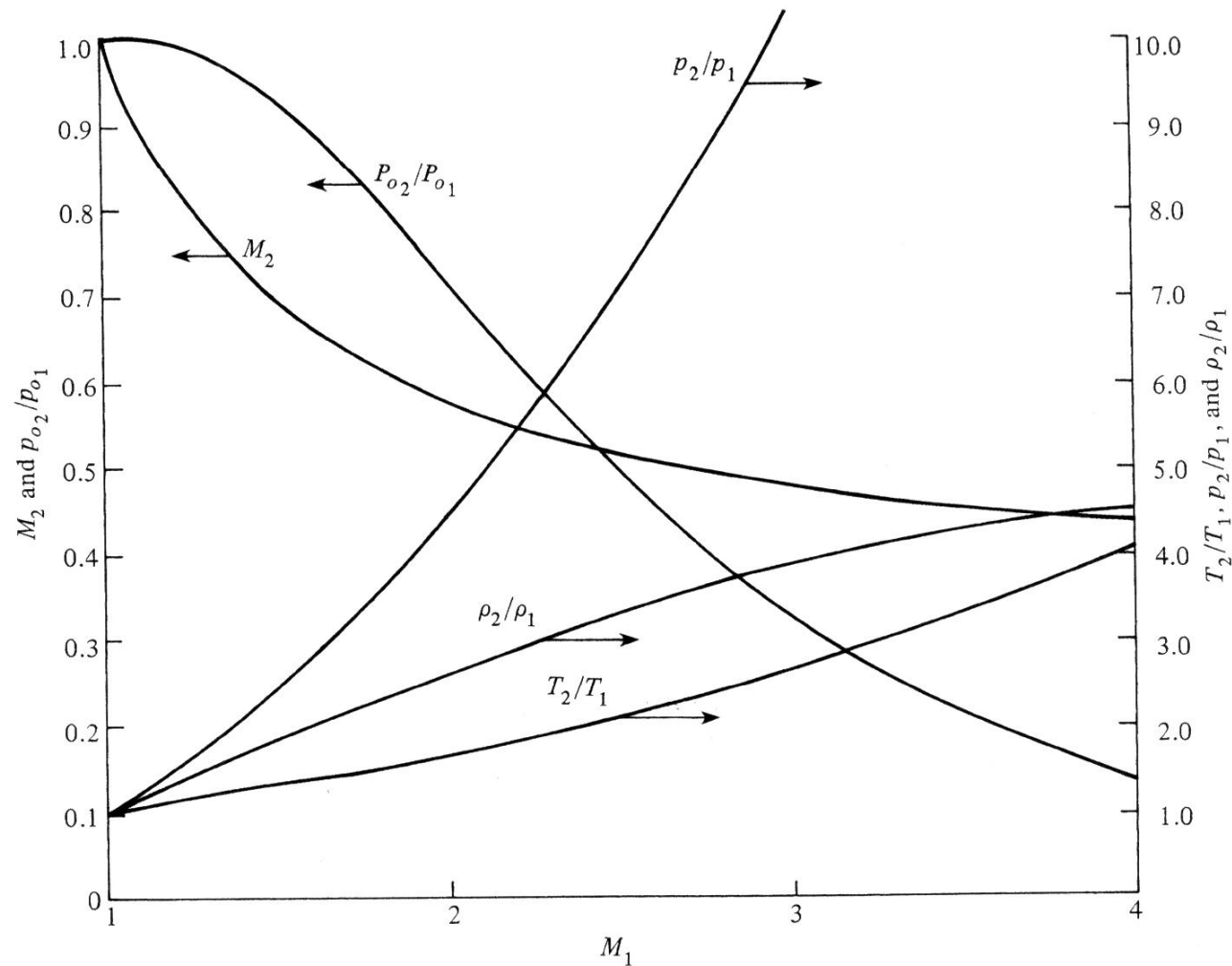
$$T_{01} = T_{02}$$

- A temperatura total é constante através da onda de choque

$$\frac{p_2}{p_1} = \exp\left[-\frac{(s_2 - s_1)}{R}\right]$$

- A pressão total diminui ao se atravessar a onda de choque

# 3.7 Relações para choques normais



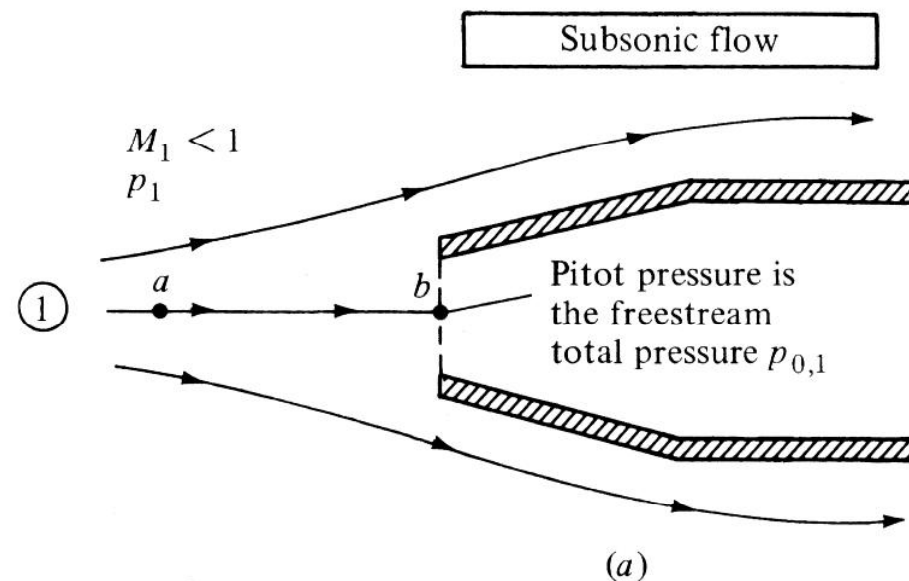
## 3.7 Relações para choques normais

- Medição da velocidade em um escoamento compressível:
  - Como no caso de escoamentos incompressíveis, são necessárias as pressões estática e obtida através de um tubo de Pitot.
  - As fórmulas empregadas para a obtenção da velocidade, contudo, diferem de acordo com o regime de velocidades.

## 3.7 Relações para choques normais

### normais

- Medição da velocidade em um escoamento compressível:
  - Escoamento subsônico.



## 3.7 Relações para choques normais

- Medição da velocidade em um escoamento compressível:
  - Escoamento subsônico.

$$\frac{p_{0,1}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad M_1^2 = \frac{2}{\gamma-1} \left[ \left(\frac{p_{0,1}}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$

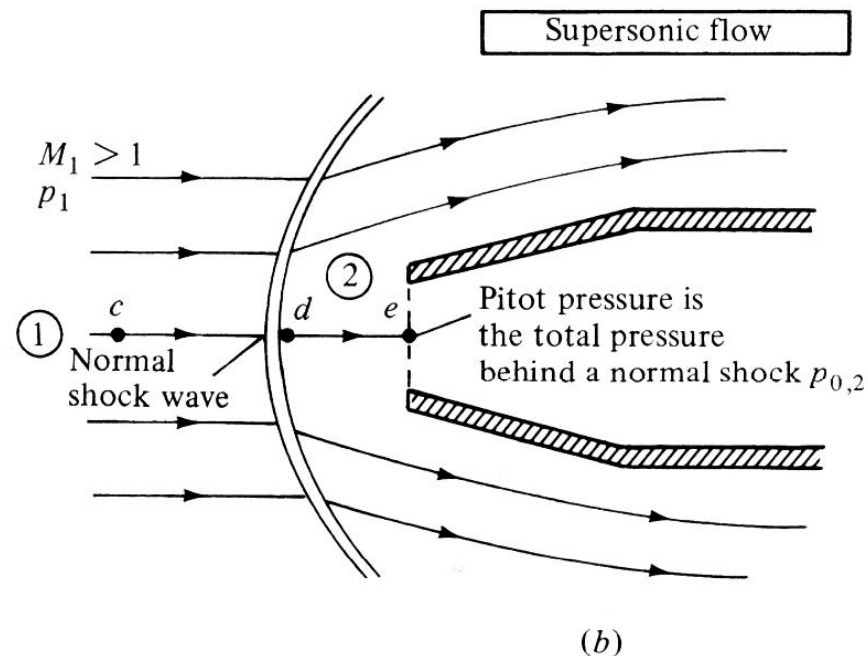
$$u_1^2 = \frac{2a_1^2}{\gamma-1} \left[ \left(\frac{p_{0,1}}{p_1}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$



## 3.7 Relações para choques normais

### normais

- Medição da velocidade em um escoamento compressível:
  - Escoamento supersônico.



## 3.7 Relações para choques normais

- Medição da velocidade em um escoamento compressível:
  - Escoamento supersônico: fórmula de Rayleigh para tubo de Pitot.

$$\frac{p_{0,2}}{p_1} = \left[ \frac{(\gamma + 1)^2 M_1^2}{4\gamma M_1^2 - 2(\gamma - 1)} \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \frac{1 - \gamma + 2\gamma M_1^2}{\gamma + 1}$$

## 3.8 Equação de Hugoniot

- Comparação entre a onda de choque e um dispositivo termodinâmico para compressão de um gás.
- As variações através de uma onda de choque são expressas apenas em termos de variáveis puramente termodinâmicas, sem referências a velocidades ou a números de Mach.

## 3.8 Equação de Hugoniot

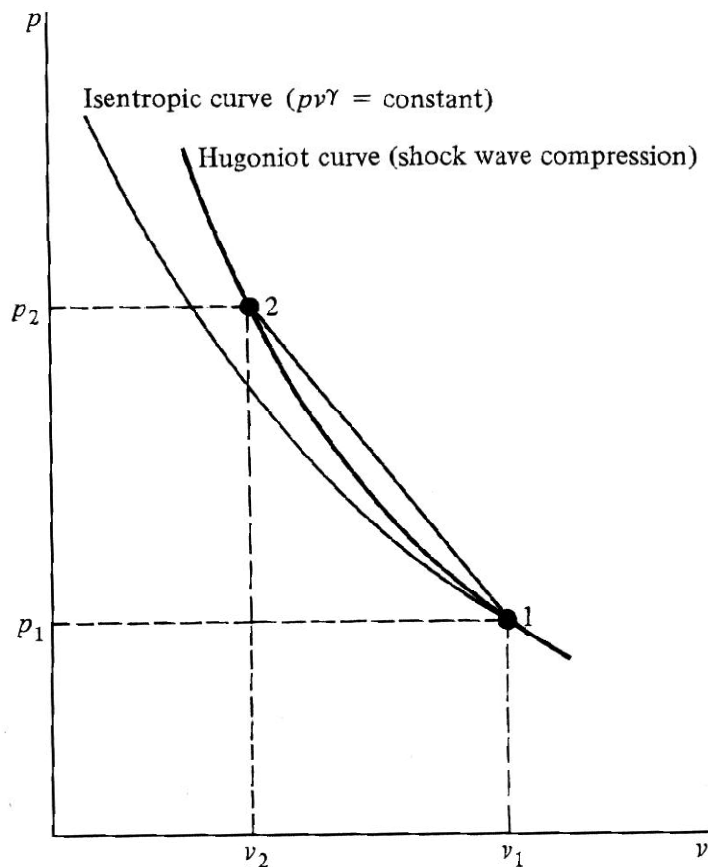
$$u'_2 - u'_1 = \frac{(p_1 + p_2)}{2} (v_1 - v_2)$$

- Relação geral que vale para todos os tipos de gases (perfeitos, reativos...).
- Relação funcional:

$$p_2 = f(p_1, v_1, v_2)$$

# 3.8 Equação de Hugoniot

- Curva de Hugoniot:



$$\frac{p_2 - p_1}{v_2 - v_1} = - \left( \frac{u_1}{v_1} \right)^2$$

Para gás caloricamente perfeito:

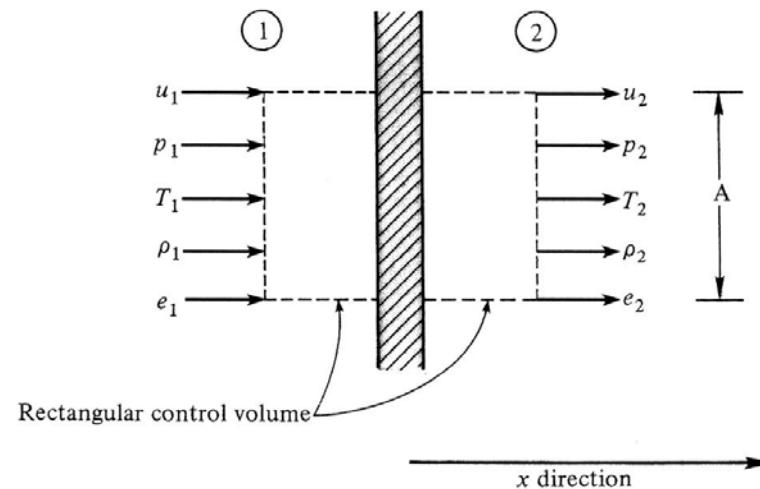
$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \frac{v_1}{v_2} - 1}{\left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) - \frac{v_1}{v_2}}$$

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Exemplos:
  - turbojatos (ou turborreatores), durante o processo de combustão.
  - escoamentos supersônicos em cavidades da dinâmica de gases moderna.
  - lasers químicos (calor efetivamente fornecido por reações químicas e desativação da energia vibracional molecular).
  - gás que absorve um intenso raio de radiação (túneis de vento aquecidos por laser).

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Hipóteses:
  - Gás caloricamente perfeito.



## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Equações governantes:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

$$p = \rho R T$$

$$h = c_p T$$



## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Utilizando o conceito de temperatura de estagnação:

$$q = c_p (T_{02} - T_{01})$$

outras relações:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2$$

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \right)^2 \left( \frac{M_1}{M_2} \right)^2$$

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right)^{\gamma/(\gamma - 1)}$$

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \left( \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \right)^2 \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left( \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2} \right)$$

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Empregando as condições para  $M=1$ :

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M^2} \left( \frac{1 + \gamma M^2}{1 + \gamma} \right)$$

$$\frac{T}{T^*} = M^2 \left( \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \right)^2$$

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Empregando condições para  $M=1$  e de estagnação:

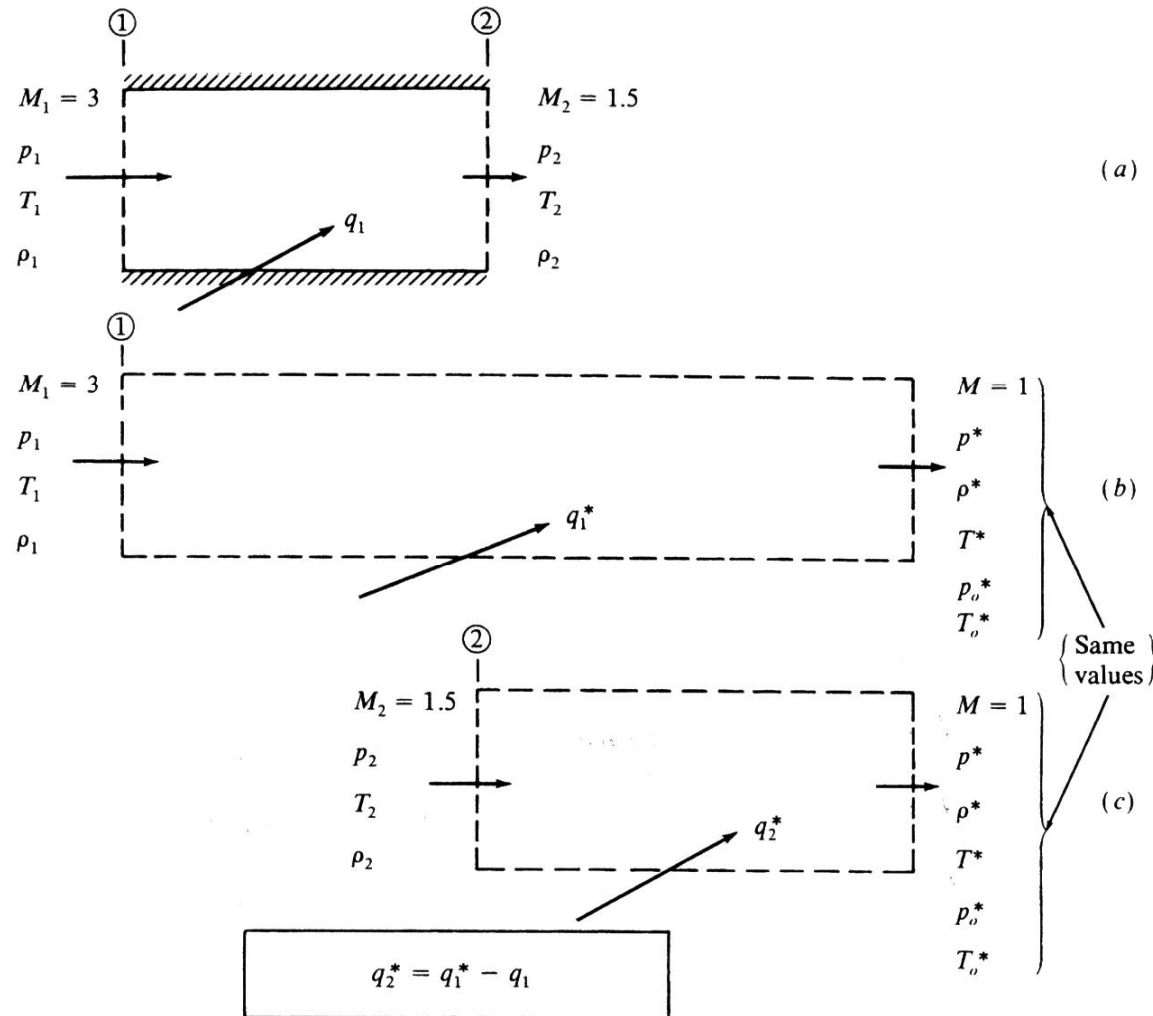
$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1 + \gamma}{1 + \gamma M^2} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{(1 + \gamma)M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} [2 + (\gamma - 1)M^2]$$

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Nota-se que para um dado escoamento, não importando as propriedades locais de escoamento, as condições para  $M=1$  são constantes. Deve-se observar que nesse caso, supõe-se que a quantidade de calor fornecida seja suficiente para que o escoamento passe a ser sônico.

# 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas



## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:

- Da segunda lei da termodinâmica:

$$\frac{s - s_1}{c_p} = \ln \frac{T}{T_1} - \frac{(\gamma - 1)}{\gamma} \ln \frac{p}{p_1}$$

- E da expressão para a determinação da pressão:

$$M^2 = \frac{1}{\gamma} \left[ \left( 1 + \gamma M_1^2 \right) \frac{p_1}{p} - 1 \right]$$

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
  - Combinando-se as expressões para a determinação da pressão e da temperatura:

$$\frac{p_1}{p} = \frac{M_1}{M} \sqrt{\frac{T}{T_1}}$$

– ou seja,

$$\frac{p_1}{p} \sqrt{\frac{1}{\gamma} \left[ \left(1 + \gamma M_1^2\right) \frac{p_1}{p} - 1 \right]} = M_1 \sqrt{\frac{T}{T_1}}$$



## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
  - Elevando-se a expressão anterior ao quadrado:

$$\gamma M_1^2 \frac{T}{T_1} = \left( \frac{p}{p_1} \right)^2 \left[ \left( 1 + \gamma M_1^2 \right) \frac{p_1}{p} - 1 \right]$$

- que pode ser simplificada originando

$$\left( \frac{p}{p_1} \right)^2 - \left( 1 + \gamma M_1^2 \right) \left( \frac{p}{p_1} \right) + \gamma M_1^2 \left( \frac{T}{T_1} \right) = 0$$

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
  - Ao se solucionar a equação anterior para a razão entre pressões obtém-se:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{(1 + \gamma M_1^2)}{2} \pm \frac{\sqrt{(1 + \gamma M_1^2)^2 - 4\gamma M_1^2 (T/T_1)}}{2}$$

- Assim, a segunda lei da termodinâmica pode ser escrita como

$$\frac{s - s_1}{c_p} = \ln \frac{T}{T_1} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \left[ \frac{(1 + \gamma M_1^2)}{2} \pm \frac{\sqrt{(1 + \gamma M_1^2)^2 - 4\gamma M_1^2 (T/T_1)}}{2} \right]$$

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

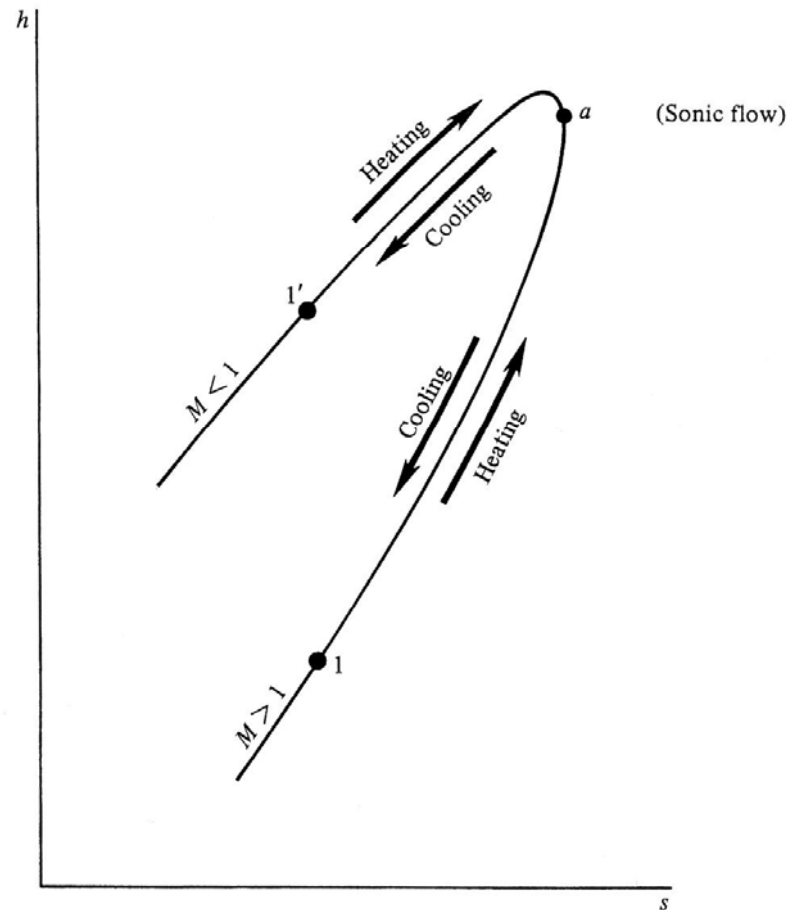
- Curva de Rayleigh:
  - Da expressão anterior, para que a raiz não seja negativa é necessário que:

$$\frac{T}{T_1} \leq \frac{(1 + \gamma M_1^2)^2}{4\gamma M_1^2}$$

- A plotagem da expressão anterior dá origem à chamada curva de Rayleigh, apresentada a seguir.

# 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:



## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
  - Ponto de tangência (ponto A):
    - Da equação da conservação da massa:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} = 0$$

- Associada à equação do momentum:

$$dp + \rho u du = 0$$

- Tem-se:

$$u^2 = \frac{dp}{d\rho}$$

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
  - Ponto de tangência (ponto A):
    - A expressão anterior é válida para qualquer ponto do escoamento. Sabe-se ainda que:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = a^2$$

- Como o ponto A apresenta :

$$\frac{ds}{dT} = 0$$

- Então o escoamento é sônico em tal ponto.

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
  - Ponto de máximo (ponto B):
    - Como o ponto B é um ponto de máximo, tem-se que:

$$\frac{d(T/T_1)}{dM} = 0$$

- Deste modo,

$$\frac{d(T/T_1)}{dM} = \left[ \frac{(1 + \gamma M_1^2)^2}{M_1^2} \right] \frac{(1 + \gamma M^2)^2 2M - M^2 2(1 + \gamma M^2) 2\gamma M^2}{(1 + \gamma M^2)^2} = 0$$

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
  - Ponto de máximo (ponto B):
    - A expressão anterior pode ser simplificada para:

$$1 + \gamma M^2 = 2\gamma M^2$$

- ou seja,

$$M^2 = \frac{1}{\gamma}$$

- Isto significa que

$$M_B = \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$$



## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh:
  - Ponto de máximo (ponto B):
    - Aplicando-se o número de Mach obtido na expressão da razão entre temperaturas, obtém-se:

$$\left(\frac{T}{T_1}\right)_{\max} = \frac{1}{4\gamma} \frac{(1 + \gamma M_1^2)^2}{M_1^2}$$

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh (adição de calor):
- Para escoamentos supersônicos:
  - O número de Mach diminui.
  - A pressão aumenta.
  - A temperatura aumenta.
  - A temperatura total aumenta.
  - A pressão total diminui.
  - A velocidade diminui.

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Curva de Rayleigh (adição de calor):
- Para escoamentos subsônicos:
  - O número de Mach aumenta.
  - A pressão diminui.
  - A temperatura aumenta para  $M_1 < \gamma^{-1/2}$  e diminui para  $M_1 > \gamma^{-1/2}$ .
  - A temperatura total aumenta.
  - A pressão total diminui.
  - A velocidade aumenta.

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- No caso de um escoamento supersônico, o fornecimento de calor move o ponto referente às condições de saída do gás para mais próximas do ponto de escoamento sônico na curva de Rayleigh.
- Quando o fornecimento de calor é tal que o escoamento na saída do gás é sônico, tem-se um escoamento bloqueado.

## 3.9 Escoamento unidimensional com trocas térmicas

- Qualquer fornecimento de calor acima do esperado para as condições de escoamento bloqueado farão com que haja uma revisão drástica do escoamento a montante da região de trocas térmicas. Caso o escoamento a montante fosse supersônico, será transformado em subsônico.

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

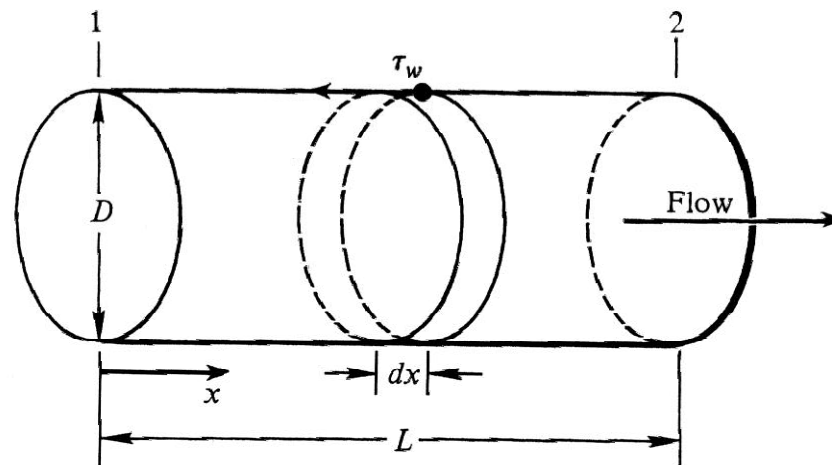
- Hipóteses:
  - Escoamento unidimensional de fluido viscoso compressível em duto de área transversal constante.
  - Regime permanente.
  - Escoamento adiabático.
  - Ausência de ondas de choque.

# 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Equação da conservação do momentum:

$$\oiint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) u = - \oiint_S (\rho dS)_x - \oiint_S \tau_w dS$$

- Aplicando ao volume de controle cilíndrico a seguir:



## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Como resultado da integração para o volume de controle, tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{4 f dx}{D} = \left[ -\frac{1}{\gamma M^2} - \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left( \frac{M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \right) \right]_{M_1}^{M_2}$$



## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Outras relações:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_0/T_1}{T_0/T_2} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{1/2}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \right]^{-1/2}$$

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Relações com propriedades de estagnação e/ou para  $M = 1$ :

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{M_1}{M_2} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}$$

$$\frac{T}{T^*} = \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2}$$

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

$$\frac{p}{p^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{1/2}$$

$$\frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{\gamma + 1} \right]^{1/2}$$

$$\frac{p_0}{p_0^*} = \frac{1}{M} \left[ \frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}$$

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Considerando-se  $x = L^*$  para  $M = 1$

$$\frac{4 \bar{f} L^*}{D} = \frac{1 - M^2}{\gamma M^2} + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[ \frac{(\gamma + 1)M^2}{2 + (\gamma - 1)M^2} \right]$$

sendo o coeficiente de atrito dado por:

$$\bar{f} = \frac{1}{L^*} \int_0^{L^*} f dx$$

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
  - Uma vez que, por hipótese, o escoamento é adiabático, tem-se da equação da energia que:

$$h + \frac{u^2}{2} = \text{const} = h_0$$

- E da equação da continuidade:

$$\rho u = \text{const}$$

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
  - A partir da segunda lei da termodinâmica, sabe-se que:

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho} = du' - \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

- Que, no caso de um gás perfeito, pode ser expressa como:

$$ds = \frac{du'}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}$$

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
  - Mas, sabe-se também que:

$$du' = c_v dT$$

- E, dessa forma, ao se integrar a equação da segunda lei da termodinâmica, obtém-se:

$$s - s_1 = c_v \ln \frac{T}{T_1} - R \ln \frac{\rho}{\rho_1}$$

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
  - Empregando-se a equação da continuidade:

$$s - s_1 = c_v \ln \frac{T}{T_1} + R \ln \frac{u}{u_1}$$

- Da equação da energia tem-se:

$$u = \sqrt{2(h_0 - h)} = \sqrt{2c_p(T_0 - T)}$$



## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
  - De modo que:

$$\frac{s - s_1}{c_v} = \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) + \frac{\gamma - 1}{2} \ln\left(\frac{T_0 - T}{T_0 - T_1}\right)$$

- Uma vez que:

$$c_p = \gamma c_v$$

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
  - Tem-se que a segunda lei da termodinâmica pode ser expressa como:

$$\frac{s - s_1}{c_p} = \frac{1}{\gamma} \ln\left(\frac{T}{T_1}\right) + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \ln\left(\frac{T_0 - T}{T_0 - T_1}\right)$$

- Ou seja,

$$\frac{s - s_1}{c_p} = \frac{1}{\gamma} \ln T + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \ln(T_0 - T) + \text{const}$$

# 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:

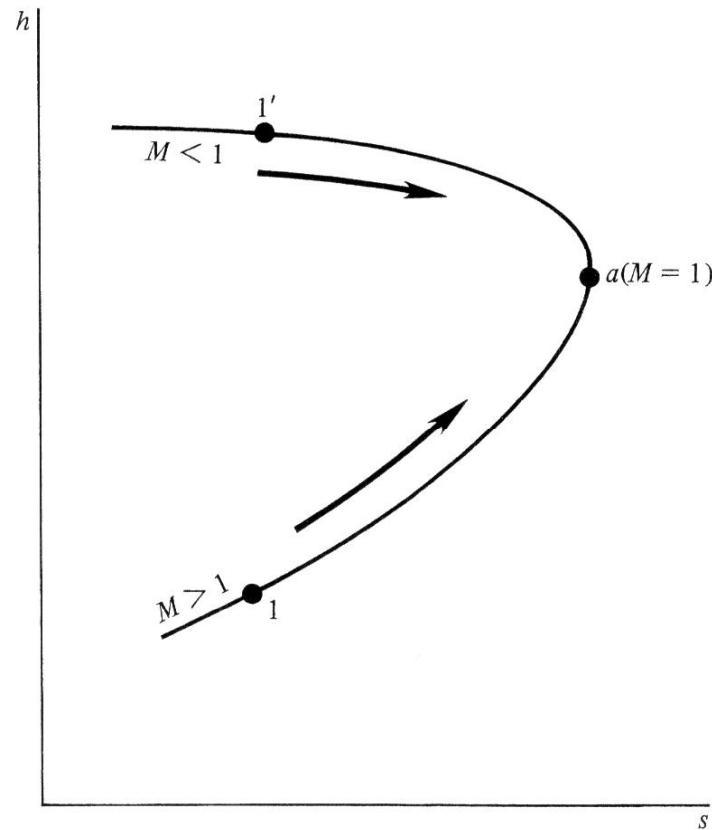


Figure 3.15 | The Fanno curve.

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
  - Ponto de tangência:

$$\frac{d \Delta s}{dT} = 0$$

- Logo:

$$\frac{1}{c_v} \frac{d \Delta s}{dT} = \frac{1}{T} - \frac{\gamma - 1}{2(T_0 - T)} = 0$$

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
  - Contudo, da equação da energia:

$$c_p (T_0 - T) = \frac{u^2}{2}$$

- E, dessa forma:

$$u^2 = c_p (\gamma - 1) T$$

- Uma vez que:

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
  - Tem-se que:

$$u^2 = \gamma RT$$

- Ou seja,

$$u^2 = a^2$$

- Quando

$$ds = 0$$

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
- Para escoamento supersônico:
  - O número de Mach diminui.
  - A pressão aumenta.
  - A temperatura aumenta.
  - A pressão total diminui.
  - A velocidade diminui.

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Curva de Fanno:
- Para escoamento subsônico:
  - O número de Mach aumenta.
  - A pressão diminui.
  - A temperatura diminui.
  - A pressão total diminui.
  - A velocidade aumenta.



## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- No caso de um escoamento supersônico, o crescimento do comprimento da região com atrito move o ponto referente às condições de saída do gás para mais próximas do ponto de escoamento sônico na curva de Fanno.
- Quando o comprimento da região com atrito é tal que o escoamento na saída do gás é sônico, tem-se um escoamento bloqueado.

## 3.10 Escoamento unidimensional com atrito

- Qualquer aumento do comprimento do duto com atrito, acima do esperado para as condições de escoamento bloqueado farão com que haja uma revisão drástica do escoamento a montante da região de atrito. Caso o escoamento a montante fosse supersônico, será transformado em subsônico.