

# Dinâmica de Gases

## Capítulo 06

Forma diferencial das equações de conservação para escoamentos invíscidos

# 6.1 Introdução

- A análise de problemas na dinâmica de fluidos requer três passos iniciais:
  - Determinação de um modelo para o fluido.
  - Aplicação dos princípios básicos da física para esse modelo de modo a obter equações matemáticas apropriadas embasadas nesses princípios.
  - Uso das equações resultantes para resolver um problema específico de interesse.

# 6.1 Introdução

- As equações de conservação na forma integral conduzem a equações algébricas que descrevem as propriedades em diferentes seções transversais do escoamento.
- Tal formulação, contudo, não é prática para o estudo de efeitos complexos, como no caso dos escoamentos transientes e bi e tridimensionais.

# 6.1 Introdução

- Identidades vetoriais úteis:

$$\oiint_S \mathbf{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\mathcal{V}$$

$$\oiint_S \Phi d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} (\nabla \Phi) d\mathcal{V}$$

onde  $\mathbf{A}$  e  $\Phi$  são funções vetorial e escalar, respectivamente, do tempo e do espaço, e  $\mathcal{V}$  é o volume de controle cuja superfície de controle é  $S$ .

## 6.2 Equações diferenciais na forma conservativa

- Equação da continuidade:

– A partir da forma integral:

$$-\oiint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV$$

– Aplicando-se a primeira identidade vetorial e após algumas manipulações obtém-se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

## 6.2 Equações diferenciais na forma conservativa

- Equação do momentum:

– Forma integral:

$$\oiint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) \cdot \vec{V} + \iiint_V \frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} dV = \iiint_V \rho \vec{f} dV - \oiint_S p d\vec{S}$$

– Aplicando-se a segunda identidade vetorial e utilizando-se, por conveniência, um sistema cartesiano de coordenadas, obtém-se:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$$

## 6.2 Equações diferenciais na forma conservativa

- Equação do momentum:
  - As demais componentes são:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z$$

## 6.2 Equações diferenciais na forma conservativa

- Equação da energia:

– Forma integral:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{V}} \dot{q} \rho d\mathcal{V} - \oiint_S p \vec{V} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} \rho (\vec{f} \cdot \vec{V}) d\mathcal{V} = \\ & = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u' + \frac{V^2}{2} \right) \right] d\mathcal{V} + \oiint_S \rho \left( u' + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

– Empregando-se a primeira identidade vetorial, obtém-se:

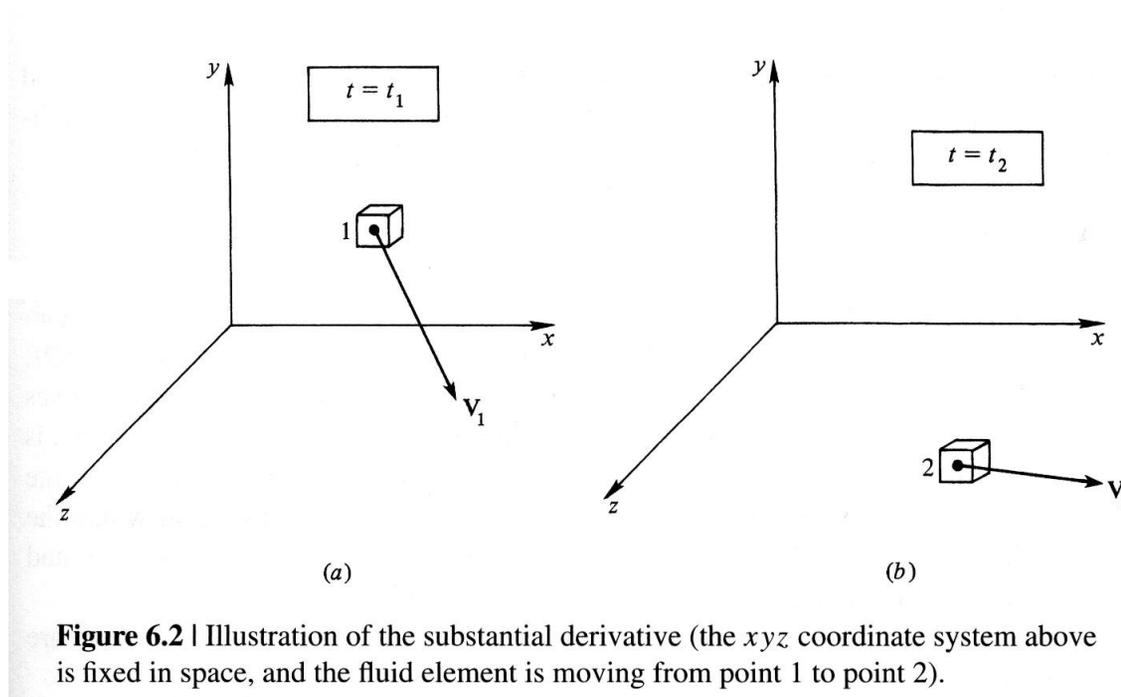
## 6.2 Equações diferenciais na forma conservativa

- Equação da energia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u' + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( u' + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] = -\nabla \cdot (p \vec{V}) + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{V})$$

## 6.3 Derivada substantiva

- Considere um elemento de fluido que se move no espaço cartesiano em dois instantes de tempo diferentes.



## 6.3 Derivada substantiva

- Neste caso, o campo de velocidades é dado por

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$u = u(x, y, z, t)$$

$$v = v(x, y, z, t)$$

$$w = w(x, y, z, t)$$

- E o campo de densidades é dado por

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

## 6.3 Derivada substantiva

- No instante  $t_1$ , a densidade do elemento de fluido é  $\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$ . No instante  $t_2$ , o mesmo elemento de fluido apresenta densidade  $\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2)$ . Como tem-se que  $\rho = \rho(x, y, z, t)$ , é possível expandir-se a função em uma série de Taylor ao redor do ponto 1, originando

$$\rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_1 (x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_1 (y_2 - y_1) +$$
$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)_1 (z_2 - z_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1 (t_2 - t_1) + \text{termos de ordem superior}$$

## 6.3 Derivada substantiva

- Dividindo-se por  $(t_2 - t_1)$  e ignorando-se termos de ordem superior, tem-se

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 \frac{(x_2 - x_1)}{(t_2 - t_1)} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 \frac{(y_2 - y_1)}{(t_2 - t_1)} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 \frac{(z_2 - z_1)}{(t_2 - t_1)} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1$$

- A quantidade  $(\rho_2 - \rho_1)$  é a variação da densidade de um elemento particular de fluido ao se mover do ponto 1 ao ponto 2.

## 6.3 Derivada substantiva

- Tomando-se o limite para o lado esquerdo da igualdade:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left( \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \right) \equiv \frac{D\rho}{Dt}$$

- Esse valor representa a taxa instantânea de variação da densidade de um elemento de fluido particular que se move do ponto 1 ao ponto 2.

## 6.3 Derivada substantiva

- Tal valor é diferente de  $(\partial\rho/\partial t)_1$ , que é a taxa temporal de variação da densidade em um ponto fixo 1.
- Calculando-se o limite para as demais parcelas e lembrando-se que se está seguindo um elemento de fluido:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left( \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \right) \equiv u$$

## 6.3 Derivada substantiva

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left( \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \right) \equiv v$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left( \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \right) \equiv w$$

- Deste modo, tem-se para o limite de  $t_2 \rightarrow t_1$

$$\frac{D\rho}{Dt} = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z}$$

## 6.3 Derivada substantiva

- Define-se, então, a notação

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)$$

como derivada substantiva. A taxa de variação de qualquer quantidade associada ao movimento de um elemento de fluido particular é dado pela derivada substantiva.

## 6.4 Equações diferenciais na forma não conservativa

- Equação da continuidade:

– A partir da equação:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

– Expandido-se o termo que apresenta o divergente e após algumas manipulações tem-se:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

## 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

– Fisicamente, tem-se que a massa de um elemento de fluido constituído por um conjunto fixo de partículas (moléculas ou átomos) é constante ao longo do movimento do fluido através do espaço.

- Equação do momentum:

- A partir da equação:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$$

## 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

- Expandindo-se o termo que apresenta o divergente, bem como a derivada temporal e realizando-se algumas manipulações, obtém-se a relação:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x$$

- Analogamente, obtém-se:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y$$

## 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z$$

– Ou na forma vetorial:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \rho \vec{f}$$

– Essas equações se constituem em formas diferentes das equações de Euler.

## 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

- As equações de Euler representam fisicamente a segunda lei de Newton aplicada a um elemento de fluido de identidade fixa movendo-se em um escoamento.
- Equação da energia:
  - A partir da equação:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( u' + \frac{V^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \rho \left( u' + \frac{V^2}{2} \right) \vec{V} \right] = -\nabla \cdot (p \vec{V}) + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{V})$$

## 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

- Expandido-se o termo que apresenta o divergente e realizando-se manipulações adequadas, obtém-se

$$\rho \frac{D(u' + V^2/2)}{Dt} = -\nabla \cdot (p \vec{V}) + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{V})$$

- Esta é uma forma de se aplicar a primeira lei da termodinâmica a um elemento de fluido de identidade fixa em movimento; nota-se, contudo, que a energia para o elemento em movimento é a energia total.

## 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

- Formas alternativas da equação da energia:

- Baseada na energia interna:

$$\rho \frac{Du'}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{V} + \rho \dot{q}$$

- Baseada na entalpia:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \rho \dot{q}$$

## 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

– Baseada na entalpia total (ou de estagnação):

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{V})$$

– Da formulação anterior, observa-se que a entalpia total de um elemento fluido em movimento em um escoamento invíscido pode sofrer variações devido a:

- Efeitos transientes:  $\partial p / \partial t \neq 0$

## 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

- Transferência de calor:  $\dot{q} \neq 0$
- Forças de corpo:  $\vec{f} \cdot \vec{V} \neq 0$

– No caso de um escoamento compressível, adiabático e sem efeitos de forças de corpo, tem-se:

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

## 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

- A partir da expressão anterior, no caso de regime permanente, um resultado importante é que

$$h_0 = \text{const}$$

- Neste caso, para um escoamento invíscido, adiabático e em regime permanente, a entalpia total é constante ao longo de uma dada linha de corrente.

## 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

– Baseada na energia interna e no volume específico:

$$\frac{De}{Dt} + p \frac{Dv}{Dt} - \dot{q} = 0$$

- As formas não-conservativas das equações governantes envolvem as propriedades de um elemento de fluido que se move ao longo do escoamento, apresentando, por isso, derivadas substantivas.

## 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

- No caso da forma conservativa, as equações foram obtidas para um volume de controle fixo no espaço.
- O termo “não-conservativo” não significa que o princípio físico da conservação de propriedades seja violado. Fisicamente, tanto a forma conservativa quanto a não-conservativa são descrições teóricas válidas e equivalentes de um escoamento.

## 6.4 Equações diferenciais na forma não-conservativa

- Os termos “conservativo” e “não-conservativo” estão relacionados à dinâmica de fluidos computacional (CFD), para a qual a forma conservativa é a mais empregada, pois garante a conservação das propriedades do escoamento na discretização do modelo matemático, algo que não ocorre espontaneamente para as equações na forma não-conservativa.

## 6.5 Equação da entropia

- Combinando-se a primeira e a segunda leis da termodinâmica e aplicando-as a um elemento de fluido em movimento obtém-se

$$T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{Dv}{Dt}$$

- A equação anterior é chamada de equação da entropia e é válida também para escoamentos não-adiabáticos viscosos.

## 6.5 Equação da entropia

- No caso de um escoamento invíscido e adiabático, tem-se

$$\frac{Ds}{Dt} = 0 \quad \text{ou} \quad s = \text{const}$$

- Para a solução da maioria dos problemas de escoamentos compressíveis, as equações da continuidade, do momentum e da energia são suficientes.

## 6.5 Equação da entropia

- A equação da entropia só é necessária para calcular a direção de algum processo que possa ocorrer.
- Para escoamentos isentrópicos, contudo, por conveniência pode ser interessante substituir a equação da energia ou do momentum pela equação da entropia.

## 6.6 Teorema de Crocco

- Considerando-se um elemento de fluido que se move ao longo de um escoamento. Neste caso, o movimento de tal elemento é composto por uma parcela translacional e uma rotacional. A translacional é denotada pela velocidade  $\vec{V}$ . A rotacional é denotada pela velocidade angular  $\omega$ , que se relaciona com a velocidade através da relação

$$\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V}$$

## 6.6 Teorema de Crocco

- O termo  $\nabla \times \vec{V}$  é denominado vorticidade do fluido e é igual ao dobro da velocidade angular.
- Deseja-se obter uma relação entre a vorticidade do fluido e propriedades termodinâmicas do mesmo. Para tanto, emprega-se a equação de Euler, sem efeito de forças de corpo:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p$$

## 6.6 Teorema de Crocco

- Combinando-se, então, a primeira e a segunda leis da termodinâmica, bem como a definição de entalpia total, tem-se

$$T \nabla s = \nabla h_0 - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

- A relação anterior foi originalmente obtida por L. Crocco em 1937, sendo por isso chamada de teorema de Crocco.

## 6.6 Teorema de Crocco

- Para regime permanente, o teorema de Crocco se torna

$$T \cdot \nabla s = \nabla h_0 - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$$

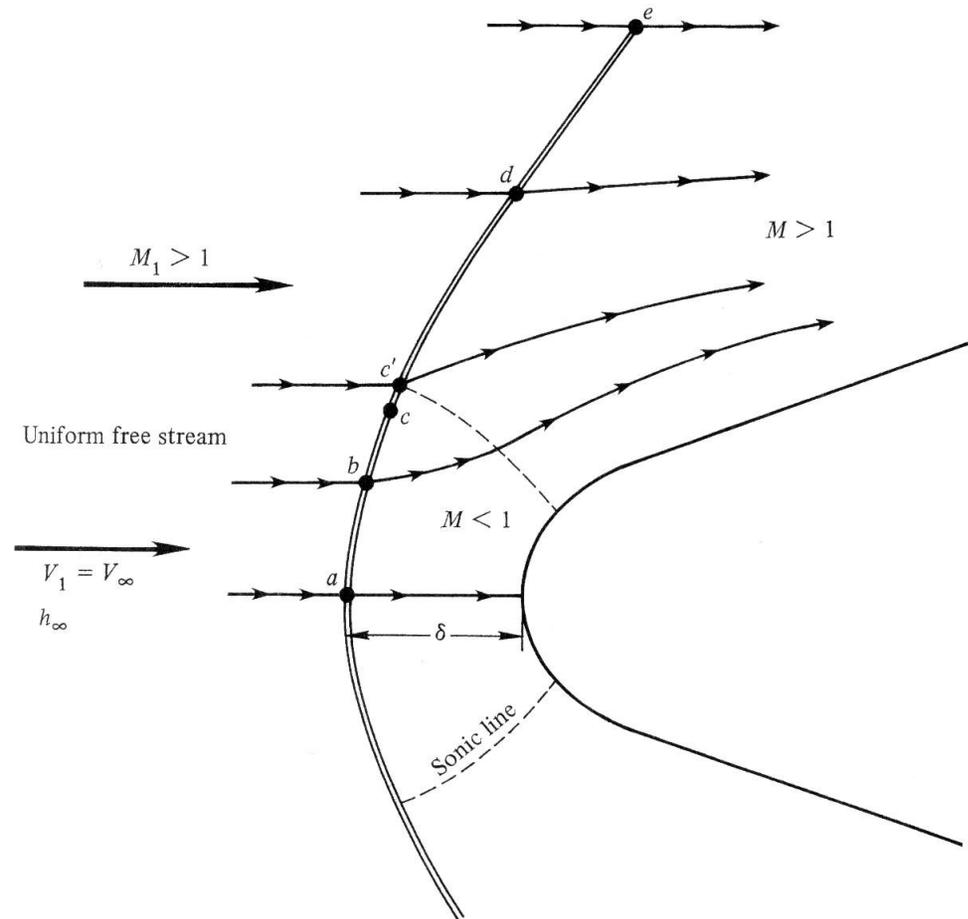
- Rearranjando-se:

$$\vec{V} \times \underbrace{(\nabla \times \vec{V})}_{\text{vorticidade}} = \underbrace{\nabla h_0}_{\text{gradiente de entalpia total}} - \underbrace{T \cdot \nabla s}_{\text{gradiente de entropia}}$$

## 6.6 Teorema de Crocco

- Quando um escoamento em regime permanente apresenta gradientes de entalpia e/ou de entropia, o escoamento é rotacional. Isto tem consequências práticas sobre o escoamento a jusante de uma onda de choque curva.

# 6.6 Teorema de Crocco



## 6.6 Teorema de Crocco

- Na região 1, a montante do choque, todas as linhas de corrente são paralelas e apresentam a mesma entropia total.
- Com relação à entalpia total, nota-se que ela é a mesma nas porções anterior e posterior ao choque. Assim, o gradiente de entalpia deve ser nulo.

## 6.6 Teorema de Crocco

- As linhas de corrente, contudo, passam por diferentes regiões do choque: por exemplo, a linha (b) atravessa uma porção do choque mais curva que a linha (d), que atravessa uma região mais fraca do choque. Assim, a linha de corrente que passa por (b) sofre uma maior variação de entropia que a linha que passa por (d).

## 6.6 Teorema de Crocco

- Deste modo, o gradiente de entropia na região 2 não é nula, ou seja, pelo teorema de Crocco

$$\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) \neq 0$$

ou seja,

$$\nabla \times \vec{V} \neq 0$$

a jusante do choque.

## 6.6 Teorema de Crocco

- Tem-se, assim, pelo teorema de Crocco, que um campo de escoamento a jusante de um choque é rotacional (infelizmente). Isto, pois, um escoamento rotacional é muito mais difícil de ser analisado que um escoamento irrotacional.