

Dinâmica de Gases

Capítulo 07

Movimento de ondas não-estacionárias

7.1 Introdução

- Exemplos de ondas não-estacionárias:
 - Sistema de exaustão de motores recíprocos de combustão interna.
 - Tubos de choque (dispositivos de laboratório para estudos de gases a altas pressões e altas temperaturas).

7.1 Introdução

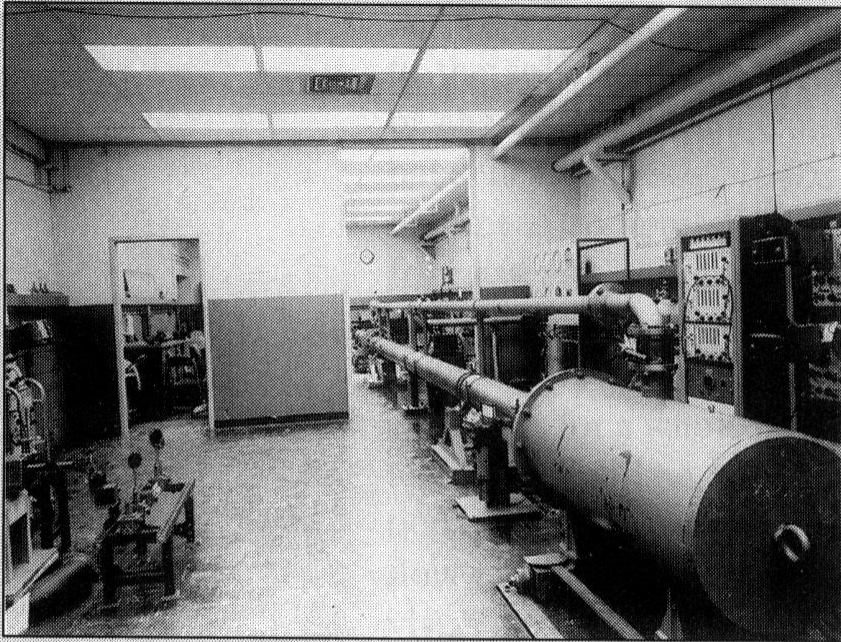


Figure 7.1a | Naval Ordnance Laboratory (NOL) shock tube. Extended view of the shock tube length. (Courtesy of Dr. John S. Vamos, Naval Surface Warfare Center.)

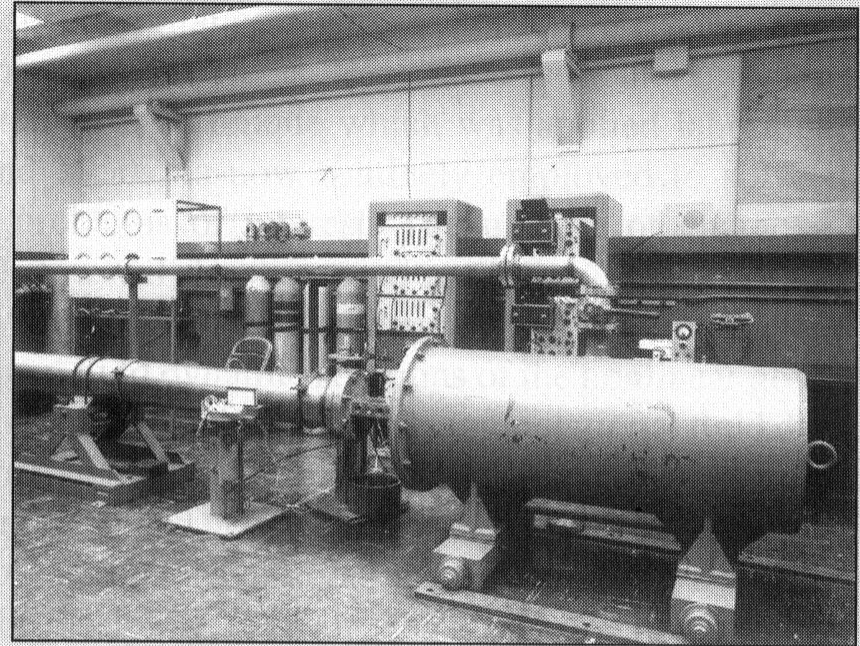


Figure 7.1b | Close-up view of the end-wall flange, rectangular test cavity, and dump tank of the NOL shock tube. With the test cavity and dump tank in this installation, the facility is operating as a shock tunnel. (Dr. John S. Vamos)

7.1 Introdução

- Onda de choque vista como uma onda estacionária, fixa no espaço.

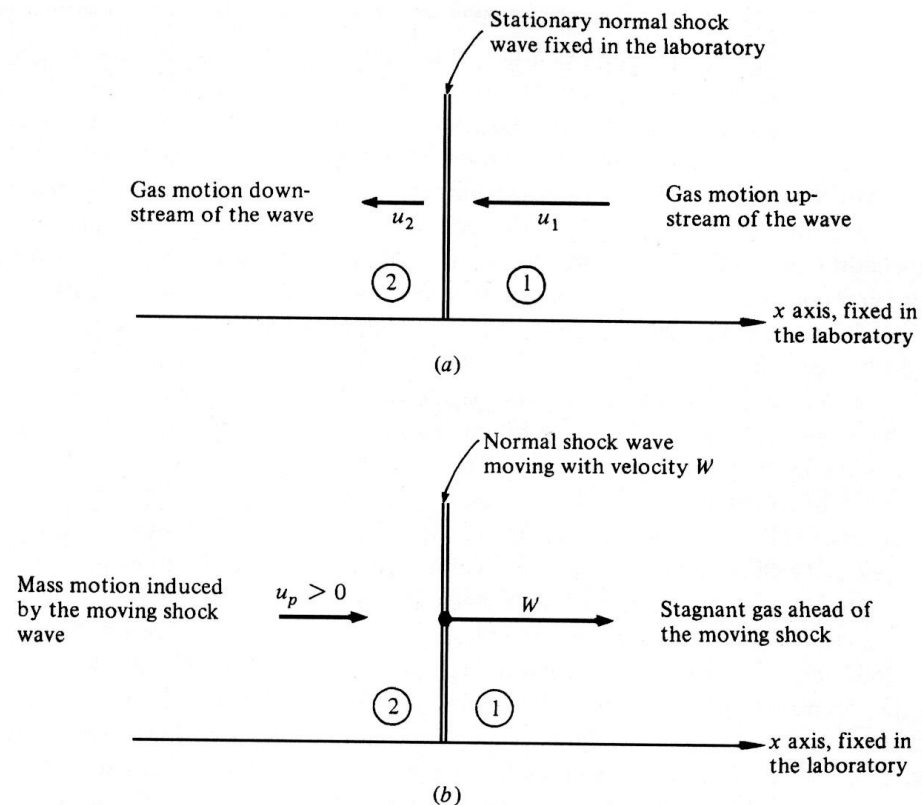


Figure 7.3 | Schematic of stationary and moving shock waves.

7.1 Introdução

- Importante aplicação do movimento de ondas não-estacionárias: tubos de choque.
- Consiste em um tubo, fechado em ambas as extremidades, com um diafragma separando uma região de alta pressão de uma região de baixa pressão.

7.1 Introdução

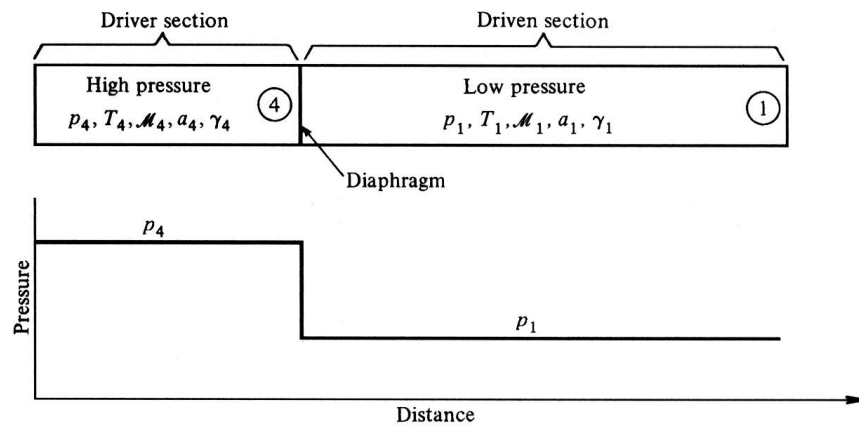


Figure 7.4 | Initial conditions in a pressure-driven shock tube.

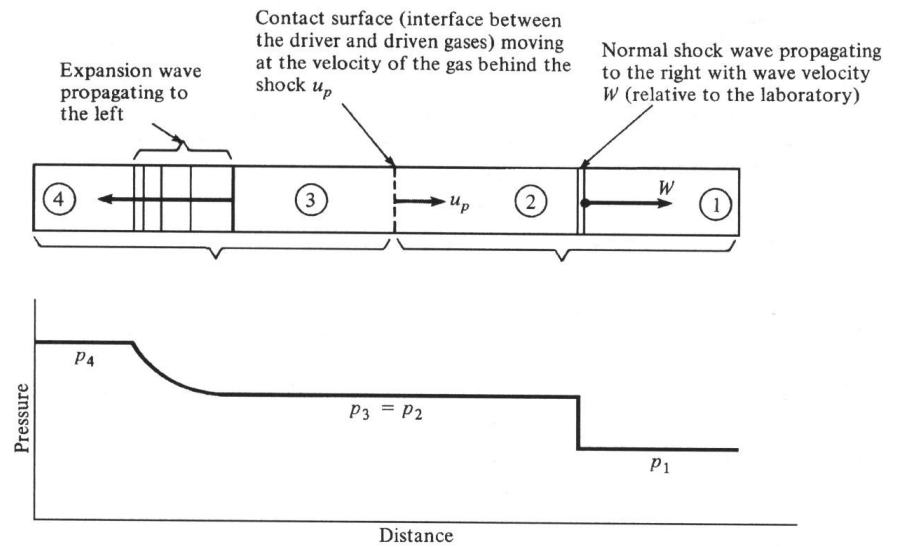


Figure 7.5 | Flow in a shock tube after the diaphragm is broken.

7.1 Introdução

- Quando o diafragma é rompido, uma onda de choque propaga-se na região de baixa (1), enquanto na região de alta pressão (4) há a propagação de ondas de expansão. A região 4 é chamada de seção condutora, enquanto a região 1 é a seção conduzida.

7.1 Introdução

- Tubos de choque são valiosos instrumentos da dinâmica de gases, possuindo importante aplicação ao estudo de gases em altas temperaturas na física e na química, em testes de veículos super e hipersônicos e em lasers químicos.

7.2 Ondas de choque normal em movimento

- Equações para um choque normal estacionário:

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

$$h_1 + u_1^2/2 = h_2 + u_2^2/2$$

- u_1 : velocidade do gás à frente da onda de choque, relativa à onda;
- u_2 : velocidade do gás atrás da onda de choque, relativa à onda;

7.2 Ondas de choque normal em movimento

- Considerando-se, então:
 - W : a velocidade do gás antes da onda de choque, relativa à onda;
 - $W - u_p$: a velocidade do gás após a onda de choque, relativa à onda.

$$\rho_1 W = \rho_2 (W - u_p)$$

$$p_1 + \rho_1 W^2 = p_2 + \rho_2 (W - u_p)^2$$

$$h_1 + W^2 / 2 = h_2 + (W - u_p)^2 / 2$$

7.2 Ondas de choque normal em movimento

- A partir das expressões anteriores e de manipulações adequadas, obtém-se a equação de Hugoniot:

$$u'_2 - u'_1 = \frac{p_1 + p_2}{2} (v_1 - v_2)$$

- Isto era esperado, uma vez que a equação de Hugoniot relaciona apenas propriedades termodinâmicas.

7.2 Ondas de choque normal em movimento

- Em geral, as equações da continuidade, momentum e energia devem ser resolvidas numericamente.
- Contudo, para um gás caloricamente perfeito, tem-se que:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{p_1}}{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1}} \right)$$

7.2 Ondas de choque normal em movimento

- Similarmente:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \frac{p_2}{p_1}}$$

- O parâmetro mais conveniente ao se trabalhar com ondas em movimento é a razão entre p_2 e p_1 .

7.2 Ondas de choque normal em movimento

- Definindo-se o número de Mach para choques em movimento:

$$M_s = \frac{W}{a_1}$$

- Incorporando-se essa definição às relações para gases caloricamente perfeitos:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_s^2 - 1)$$

7.2 Ondas de choque normal em movimento

- Da relação anterior:

$$M_s = \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) + 1}$$

- De onde obtém-se que:

$$W = a_1 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) + 1}$$

7.2 Ondas de choque normal em movimento

- Uma onda de choque que se propaga em um gás em repouso induz o movimento de massa com uma velocidade u_p atrás da onda. Da equação da continuidade:

$$u_p = W \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$$

7.2 Ondas de choque normal em movimento

- De onde obtém-se que:

$$u_p = \frac{a_1}{\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left(\frac{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \right)^{1/2}$$

- Número de Mach do movimento induzido:

$$\frac{u_p}{a_2} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left(\frac{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \right)^{1/2} \left[\frac{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right) + \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2} \right]^{1/2}$$

7.2 Ondas de choque normal em movimento

- No caso de um choque infinitamente forte:

$$\lim_{p_2/p_1 \rightarrow \infty} \left(\frac{u_p}{a_2} \right) = \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}}$$

- Existe uma diferença fundamental entre um choque estacionário e um choque em movimento: as propriedades de estagnação de ambos os escoamentos são diferentes.

7.2 Ondas de choque normal em movimento

- Por exemplo, no caso da entalpia:

$$h_{01} = h_1 \qquad h_{02} = h_2 + u_p^2/2$$

$$h_{02} > h_{01}$$

- Em um escoamento invíscido adiabático transiente, a entalpia total não é constante:

$$\rho \frac{Dh_0}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t}$$

7.3 Onda de choque refletida

- Considerando-se uma onda de choque que se propaga da direita para a esquerda com uma velocidade W e que se move em direção a uma parede sólida. No momento em que o choque atinge a parede, poder-se-ia pensar que a velocidade do escoamento na parede seria igual a u_p , entrando na parede, o que é fisicamente impossível.

7.3 Onda de choque refletida

- De modo a evitar esta impossibilidade, a natureza cria imediatamente uma onda de choque normal refletida, que viaja para a esquerda com velocidade W_R . Assim, tem-se que o movimento da massa atrás do choque refletido apresenta velocidade nula ($u_5 = 0$).

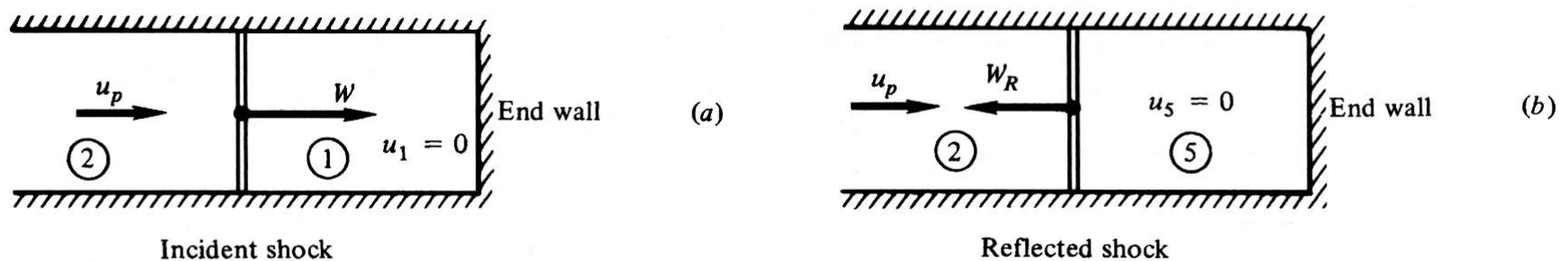


Figure 7.6 | Incident and reflected shock waves.

7.3 Onda de choque refletida

- Diagramas de ondas: gráfico do tipo tempo versus posição, no qual é apresentado o movimento da onda.

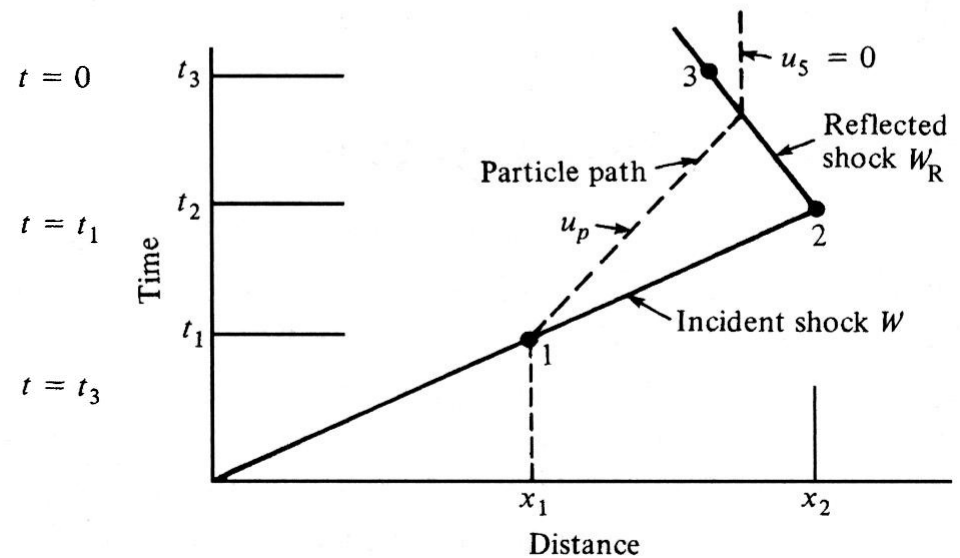
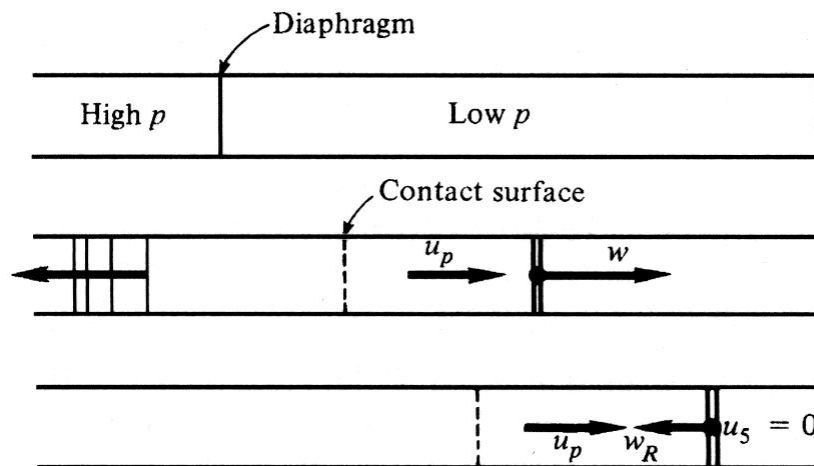


Figure 7.7 | Wave diagram (xt diagram).

7.3 Onda de choque refletida

- Os diagramas de ondas também podem ser utilizados para a observação do movimento de elementos do fluido.
- Choque refletido:
 - $W_R + u_p$: velocidade do gás à frente da onda de choque, relativa à onda.
 - W_R : velocidade do gás atrás da onda de choque, relativa à onda.

7.3 Onda de choque refletida

- Equações da continuidade, momentum e energia para a onda refletida:

$$\rho_2 (W_R + u_p) = \rho_5 W_R$$

$$p_2 + \rho_2 (W_R + u_p)^2 = p_5 + \rho_5 W_R^2$$

$$h_2 + \frac{(W_R + u_p)^2}{2} = h_5 + \frac{W_R^2}{2}$$

7.3 Onda de choque refletida

- Considerando-se um gás caloricamente perfeito, tem-se que

$$\frac{M_R}{M_R^2 - 1} = \frac{M_S}{M_S^2 - 1} \sqrt{1 + \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} (M_S^2 - 1) \left(\gamma + \frac{1}{M_S^2} \right)}$$

$$M_S = \frac{W}{a_1} \qquad M_R = \frac{W_R + u_p}{a_2}$$

7.4 Quadro físico da propagação de ondas

- Considere um longo tubo no qual as propriedades variam somente na direção axial.

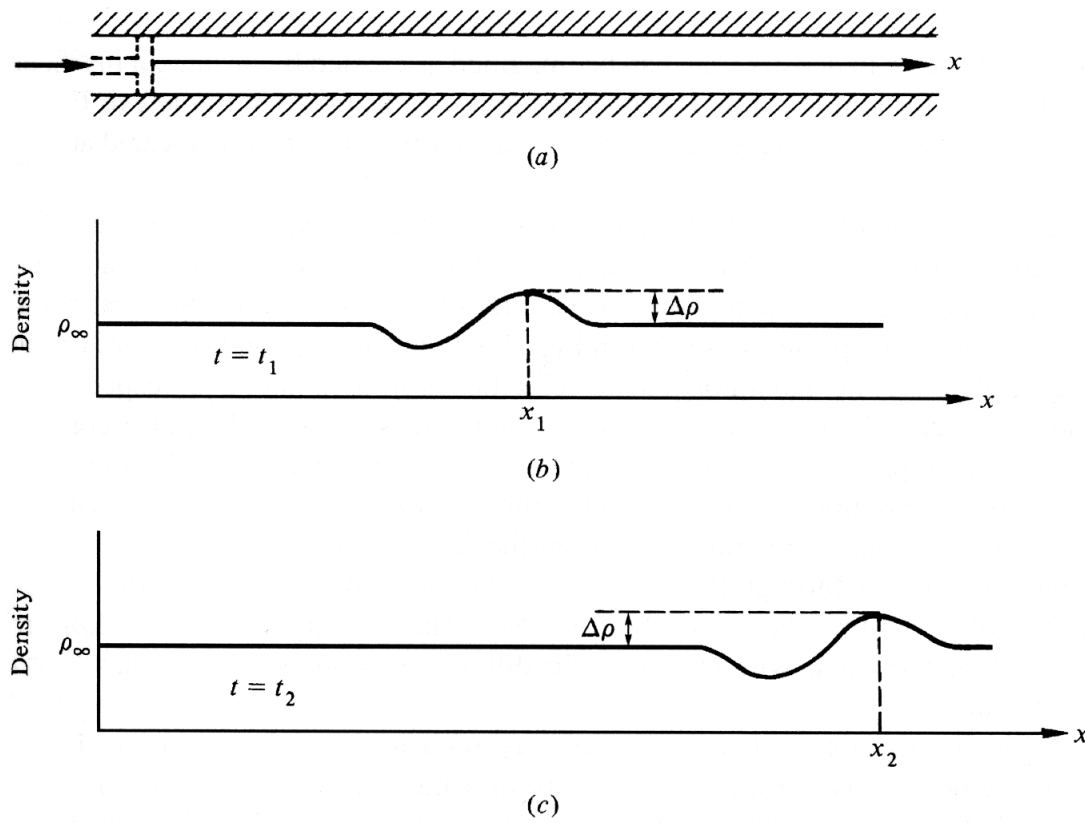


Figure 7.8 | Propagation of a pulse in a one-dimensional tube.

7.4 Quadro físico da propagação de ondas

- Movimento do pulso:
 - x_H : localização do início do pulso.
 - x_T : localização do final do pulso.
 - x_P : localização do valor máximo (pico) do pulso.
 - Em geral:

$$w_H \neq w_T; \quad w_T \neq w_P; \quad w_H \neq w_P$$

- Assim, a onda se deforma ao longo de sua propagação.

7.4 Quadro físico da propagação de ondas

- Como o distúrbio $\Delta\rho$ se propaga ao longo do eixo x , a região em que $\Delta\rho \neq 0$ é chamada de onda finita. A velocidade com a qual um elemento desta onda se move é chamada de velocidade local de onda w . Em geral, o valor de w varia através da onda.

7.5 Elementos da teoria acústica

- Equações da conservação da massa, momentum e energia:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p$$

$$\frac{Ds}{Dt} = 0$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- Perturbações: $\Delta\rho$, Δu .

$$\rho = \rho_{\infty} + \Delta\rho$$

$$u = u_{\infty} + \Delta u = \Delta u$$

- escoamento unidimensional (eq. da continuidade):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- Que origina

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + \rho_{\infty} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \Delta \rho \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \Delta u \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} = 0$$

- Escoamento unidimensional (eq. do momentum):

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- Expressando a pressão em função de outras propriedades termodinâmicas:

$$p = p(\rho, s)$$

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds$$

- Contudo, a entropia é constante para o movimento de onda invíscida e adiabática. Assim:

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho$$

7.5 Elementos da teoria acústica

– Considerando-se que p e ρ variam com x :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

– Fazendo-se, então:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s = a^2$$

– Tem-se que:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

7.5 Elementos da teoria acústica

– Retornando-se à equação do momentum:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

– Empregando-se as perturbações:

$$\rho_{\infty} \frac{\partial \Delta u}{\partial t} + \Delta \rho \frac{\partial \Delta u}{\partial t} + \rho_{\infty} \Delta u \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \Delta \rho \Delta u \frac{\partial \Delta u}{\partial x} = -a^2 \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x}$$

– Neste ponto, ainda tem-se equações exatas para escoamentos unidimensionais isentrópicos.

7.5 Elementos da teoria acústica

- Considerando-se, então, uma onda muito fraca, de modo que $\Delta\rho$ e Δu sejam perturbações muito pequenas. Neste caso, por definição, a onda se torna uma onda sonora, e assim,

$$\Delta\rho \ll \rho_\infty \qquad \Delta u \ll a$$

- Deste modo, pode-se escrever

$$a^2 = a^2(\rho, s)$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- Mas como $s = const.$, tem-se que $a^2 = a^2(\rho)$
- Expandindo-se em uma série de Taylor:

$$a^2 = a_\infty^2 + \left(\frac{\partial a^2}{\partial \rho} \right) (\rho - \rho_\infty) + \dots$$

$$a^2 = a_\infty^2 + \left(\frac{\partial a^2}{\partial \rho} \right) \Delta\rho + \dots$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- Substituindo-se a série na equação do momentum:

$$\rho_{\infty} \frac{\partial \Delta u}{\partial t} + \Delta \rho \frac{\partial \Delta u}{\partial t} + \rho_{\infty} \Delta u \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \Delta \rho \Delta u \frac{\partial \Delta u}{\partial x} =$$
$$- \left[a_{\infty}^2 + \left(\frac{\partial a^2}{\partial \rho} \right) (\rho - \rho_{\infty}) + \dots \right] \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x}$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- Como $\Delta\rho$ e Δu são quantidades muito pequenas, produtos dessas quantidades e suas derivadas são extremamente pequenos. Assim, os termos de segunda ordem e ordem superior são muito pequenos quando comparados aos termos de primeira ordem.

7.5 Elementos da teoria acústica

- Neste caso, tem-se:

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + \rho_{\infty} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} = 0$$

$$\rho_{\infty} \frac{\partial \Delta u}{\partial t} = -a_{\infty}^2 \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x}$$

- Estas equações são chamadas de equações acústicas, pois descrevem o movimento de um gás induzido pela passagem de uma onda sonora.

7.5 Elementos da teoria acústica

- As equações acústicas são equações aproximadas, válidas para pequenas perturbações: quanto menores as perturbações, mais acurados são seus resultados. Sua grande vantagem, contudo, reside no fato de que são equações lineares.

7.5 Elementos da teoria acústica

- Solução das equações da continuidade e do momentum:
 - Diferenciando-se a equação da continuidade em relação ao tempo:

$$\frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial t^2} = -\rho_\infty \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x \partial t}$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- Diferenciando-se a equação do momentum em relação à posição:

$$\rho_{\infty} \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x \partial t} = -a_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial x^2}$$

- Substituindo-se então na equação anterior, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial t^2} = a_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \Delta \rho}{\partial x^2}$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- A equação anterior constitui-se na clássica equação da onda, cuja solução é da forma

$$\Delta\rho = F(x - a_{\infty}t) + G(x + a_{\infty}t)$$

- De modo análogo, as equações da continuidade e do momentum podem ser convenientemente manipuladas para obter-se uma solução para u .

7.5 Elementos da teoria acústica

- Neste caso, tem-se

$$\Delta u = f(x - a_{\infty}t) + g(x + a_{\infty}t)$$

- Em ambos os casos, F , G , f e g são funções arbitrárias de seus argumentos. Contudo, uma interpretação física muito forte surge das soluções gerais apresentadas.

7.5 Elementos da teoria acústica

- Considerando-se, por exemplo, que $G = 0$:

$$\Delta\rho = F(x - a_\infty t)$$

- Se a onda propaga-se ao longo do eixo x , seja $\Delta\rho_1$ característica da propagação dessa onda. Assim:

$$\Delta\rho_1 = F(x - a_\infty t) = \text{const}$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- Neste caso, deve-se ter que

$$x = a_{\infty} t + \text{const}$$

- Deste modo, um valor fixo de distúrbio $\Delta\rho_1$ deve-se mover de tal modo que

$$dx/dt = a_{\infty}$$

- Assim, da equação da onda

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- Tem-se que o coeficiente a_∞^2 representa sempre o quadrado da velocidade de propagação da quantidade geral Φ .

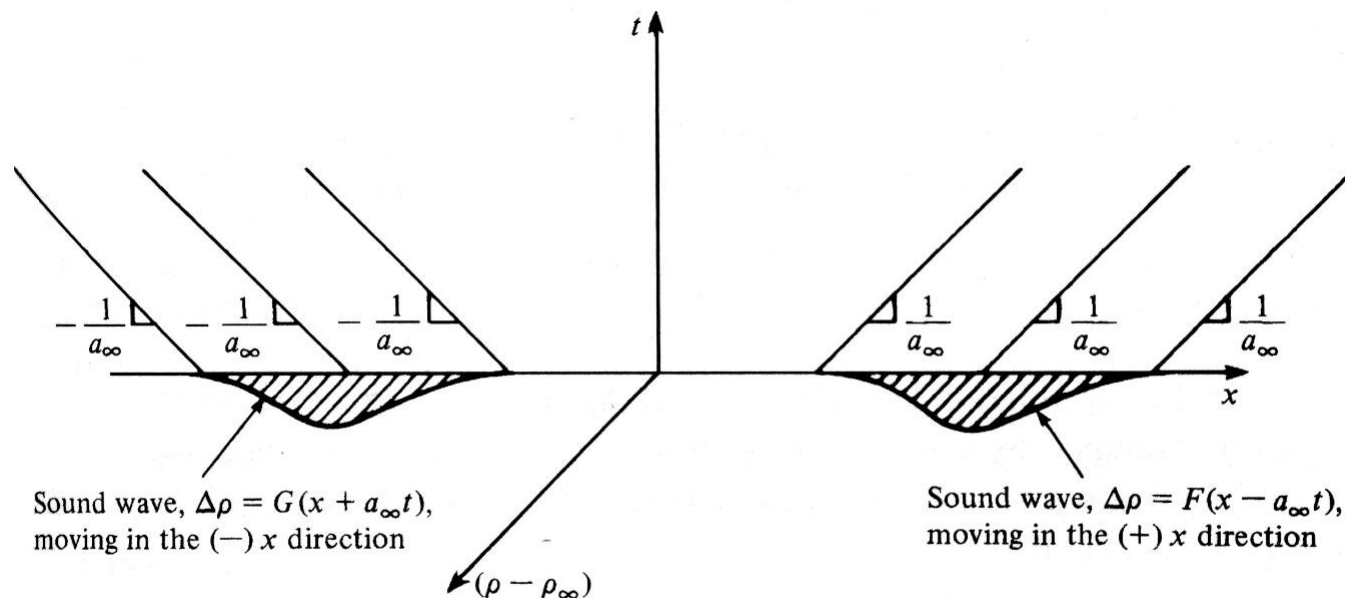


Figure 7.10 | Left- and right-running sound waves.

7.5 Elementos da teoria acústica

- Da análise anterior, tem-se que a quantidade a_∞ , definida como $[(\partial p / \partial \rho)_s]_\infty$, é a velocidade de propagação da onda. Além disso, considera-se que a mesma seja uma onda sonora. Tem-se então que a velocidade do som pode ser definida como $(\partial p / \partial \rho)_s$.

7.5 Elementos da teoria acústica

- Relação entre Δu e Δp :
 - Tomando-se a relação

$$\Delta u = f(x - a_{\infty}t) + g(x + a_{\infty}t)$$

- E fazendo-se $g=0$, tem-se:

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x} = f'$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial t} = -a_{\infty} f'$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- Desta maneira, tem-se

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x} = -\frac{1}{a_\infty} \frac{\partial \Delta u}{\partial t}$$

- Que, substituída na equação da continuidade linearizada resulta em

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} - \frac{\rho_\infty}{a_\infty} \frac{\partial \Delta u}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \rho - \frac{\rho_\infty}{a_\infty} \Delta u \right) = 0$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- Nesse caso, deve-se ter que

$$\Delta\rho - \frac{\rho_\infty}{a_\infty} \Delta u = \text{const}$$

- Considerando-se, então, o gás não perturbado, observa-se que

$$\Delta\rho = \Delta u = 0$$

- E, dessa forma

$$\Delta u = \frac{a_\infty}{\rho_\infty} \Delta\rho$$

7.5 Elementos da teoria acústica

- No caso de se trabalhar com variações de pressão, obtém-se

$$\Delta u = \frac{\Delta p}{\rho_{\infty} a_{\infty}}$$

- Como as equações anteriores foram obtidas ao se fazer $g = 0$, elas se aplicam para ondas que se movem para a direita.

7.5 Elementos da teoria acústica

- Se forem empregadas ondas que se movem para a esquerda (fazendo-se $f=0$), os resultados obtidos são similares aos anteriores, exceto pelo sinal que será negativo. Desta forma, os resultados podem ser generalizados como

$$\Delta u = \pm \frac{a_{\infty}}{\rho_{\infty}} \Delta \rho = \pm \frac{\Delta p}{\rho_{\infty} a_{\infty}}$$

sendo os sinais + e – associados às ondas que correm à direita e à esquerda, respectivamente.

7.5 Elementos da teoria acústica

- Na terminologia acústica, a parte de uma onda sonora em que $\Delta\rho > 0$ é chamada de condensação, enquanto a região em que $\Delta\rho < 0$ é a rarefação.
- Para uma condensação, o movimento induzido de massa é sempre na mesma direção do movimento da onda.
- Para a rarefação, o movimento é sempre na direção oposta ao do movimento da onda.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Ondas finitas são aquelas para as quais a perturbação $\Delta\rho$ pode ser grande.
- Considere uma onda finita que se propaga para a direita. Neste caso, a densidade, a temperatura, a velocidade do som local e o movimento da massa podem ser escritos como uma função da posição x em um dado instante de tempo.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Porções da onda em que a densidade aumenta são regiões de compressão, enquanto porções em que a densidade diminui são regiões de expansão.

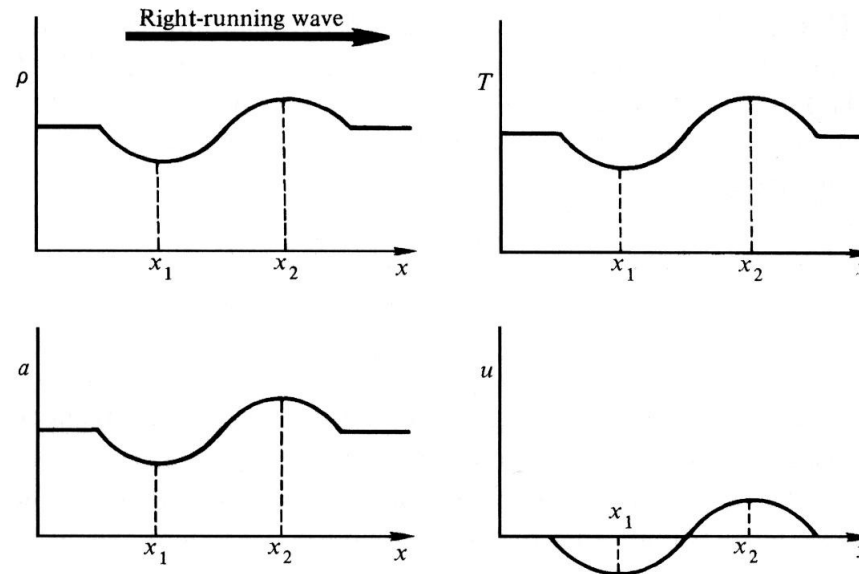


Figure 7.11 | Schematic of property variations in a finite wave.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Diferentemente das ondas sonoras linearizadas, partes diferentes de uma onda finita propagam-se a velocidades diferentes com relação ao laboratório.
- Para cada ponto da onda, a velocidade de propagação (local) em relação ao laboratório é

$$w = u + a$$

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Fisicamente, a propagação de uma parte local de uma onda finita é a velocidade do som local sobreposta ao movimento local da massa de gás.
- Ao se comparar as velocidades dos pontos 1 e 2, tem-se que

$$u_2 + a_2 > u_1 + a_1$$

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Se u_1 for negativa e sua magnitude for grande o suficiente para superar o de a_1 , então a porção 1 da onda se propagará para a esquerda.
- Neste caso, a onda de compressão será ampliada até que coalesça em uma onda de choque.
- A onda de expansão, por outro lado, espalhar-se-á e tornar-se-á mais gradual.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Para uma onda acústica:
 - $\Delta\rho$, ΔT , Δu são pequenos.
 - Todas as partes da onda propagam-se com a mesma velocidade em relação ao laboratório, isto é, com a velocidade a_∞ .
 - A forma da onda permanece constante.
 - As variáveis do escoamento são governadas por equações lineares.
 - Esta é uma situação ideal, que corresponde a uma aproximação das ondas sonoras audíveis.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Para uma onda finita:
 - $\Delta\rho$, ΔT , Δu podem ser grandes.
 - Cada parte local de uma onda se propaga a uma velocidade local $u+a$ relativa ao laboratório.
 - A forma da onda varia com o tempo.
 - As variáveis do escoamento são governadas por equações não-lineares.
 - Esta é uma situação real, seguida por todas as ondas reais.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Equação da continuidade:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \vec{V}) = 0$$

- Da termodinâmica, tem-se que

$$\rho = \rho(p, s)$$

$$d\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s dp + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p ds$$

7.6 Ondas finitas não-lineares

- No caso de um escoamento isentrópico, tem-se que $ds=0$. Deste modo:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{a^2} \frac{Dp}{Dt}$$

- E a equação da continuidade será escrita como

$$\frac{1}{a^2} \frac{Dp}{Dt} + \rho (\nabla \cdot \vec{V}) = 0$$

7.6 Ondas finitas não-lineares

– No caso de um escoamento unidimensional:

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Equação do momentum, sem forças de corpo:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p$$

7.6 Ondas finitas não-lineares

– Para um escoamento unidimensional

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

– Adicionando-se a equação da continuidade

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{1}{\rho a} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0$$

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Subtraindo-se a equação da continuidade

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{1}{\rho a} \left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0$$

- Examinando-se as duas equações anteriores, tem-se que

$$u = u(x, t) \qquad p = p(x, t)$$

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Da definição de um diferencial

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

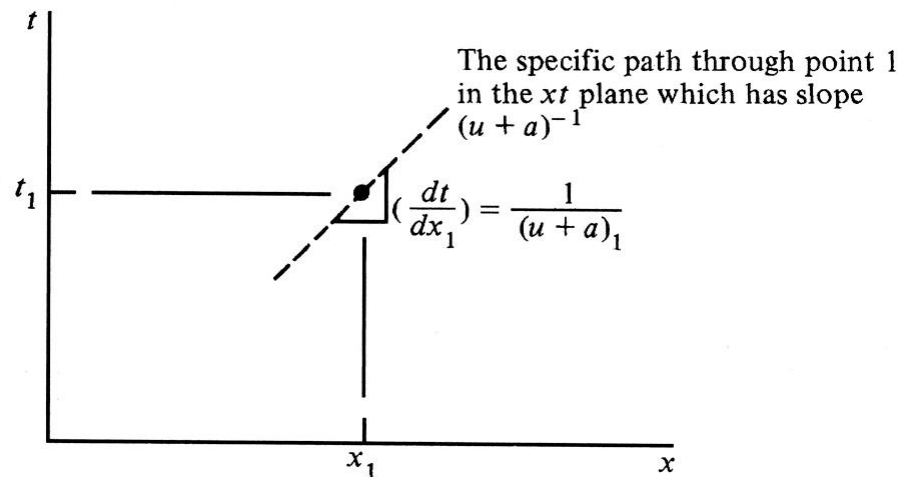


Figure 7.12 | A preferred path in the xt plane.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Escolhendo-se um caminho específico que passe pelo ponto 1 deve-se ter que a seguinte equação seja satisfeita

$$dx = (u + a) dt$$

- Ou seja, deve-se ter que a derivada da função no ponto 1 é dada por

$$\left(\frac{dt}{dx} \right)_1 = \frac{1}{u_1 + a_1}$$

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Combinando as relações anteriores, tem-se que o valor de du que corresponde a dt e dx , restrito ao caminho escolhido é

$$du = \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} (u + a) \right] dt$$

- Similarmente, para dp

$$dp = \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} (u + a) \right] dt$$

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Substituindo-se a relação anterior na relação obtida ao se somar as equações da continuidade e do momentum, tem-se

$$du + \frac{dp}{\rho a} = 0$$

- Onde du e dp são variações ao longo de um caminho específico definido pela inclinação $dx/dt = u + a$ no plano xt .

7.6 Ondas finitas não-lineares

- A análise anterior é um exemplo específico de uma técnica muito poderosa em escoamentos compressíveis: o método das características.
- Neste caso, a equação diferencial parcial governante do fenômeno é reduzida a uma equação diferencial ordinária ao longo de um caminho.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- O caminho é chamado de uma linha característica C_+ no plano xt enquanto a equação diferencial ordinária resultante é chamada de equação de compatibilidade ao longo da característica C_+ .
- A equação originada é válida apenas ao longo da linha característica.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Da equação obtida da subtração entre a equação do momentum e a equação da continuidade pode-se encontrar uma outra linha característica, C_- , cuja inclinação é dada por $dx/dt = u - a$ e ao longo da qual a seguinte equação de compatibilidade é válida:

$$du - \frac{dp}{\rho a} = 0$$

7.6 Ondas finitas não-lineares

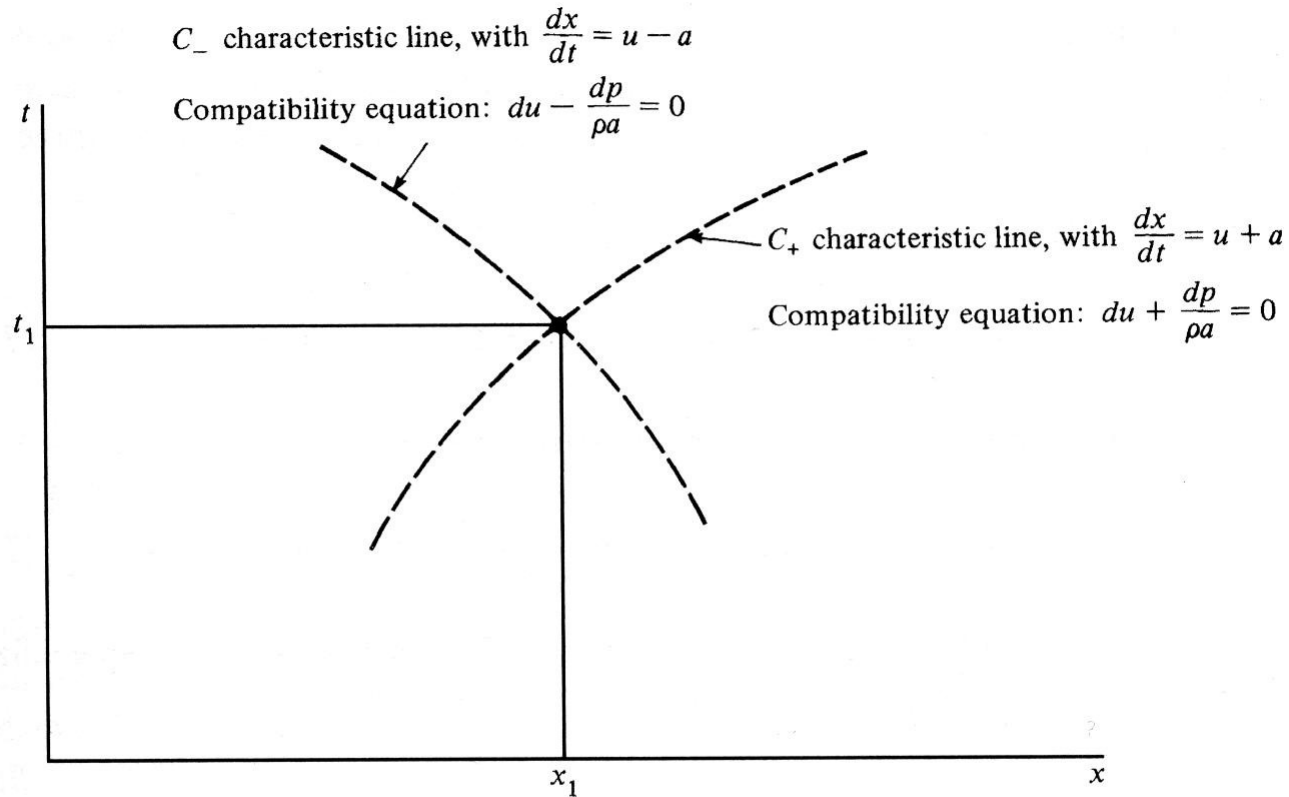


Figure 7.13 | Illustration of the characteristic lines through point 1 in the xt plane.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Nota-se que as linhas características C_+ e C_- são fisicamente os caminhos de ondas sonoras que correm à direita e à esquerda, respectivamente, no plano xt .
- Integrando-se a equação de compatibilidade ao longo da linha característica C_+ tem-se

$$J_+ = u + \int \frac{dp}{\rho a} = \text{const}$$

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Integrando-se a equação de compatibilidade ao longo da linha característica C_- tem-se

$$J_- = u - \int \frac{dp}{\rho a} = \text{const}$$

- Os valores J_+ e J_- são chamados de invariantes de Riemann.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- No caso de um gás caloricamente perfeito

$$a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$$

- E para um processo isentrópico, tem-se que

$$p = c_1 T^{\gamma/(\gamma-1)} = c_2 a^{2\gamma/(\gamma-1)}$$

- sendo c_1 e c_2 constantes.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- Diferenciando a equação anterior

$$dp = c_2 \left(\frac{2\gamma}{\gamma-1} \right) a^{[2\gamma/(\gamma-1)-1]} da$$

- Tem-se, então, que

$$\rho = c_2 \gamma a^{[2\gamma/(\gamma-1)-2]}$$

7.6 Ondas finitas não-lineares

- As invariantes de Riemann podem ser escritas então como

$$J_+ = u + \frac{2a}{\gamma-1} = \text{const}$$

$$J_- = u - \frac{2a}{\gamma-1} = \text{const}$$

- que são válidas para gases caloricamente perfeitos.

7.6 Ondas finitas não-lineares

- A utilidade das invariantes de Riemann fica clara na solução das equações para as velocidades a e u :

$$a = \frac{\gamma - 1}{4} (J_+ - J_-)$$

$$u = \frac{1}{2} (J_+ + J_-)$$

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Considere regiões de alta e de baixa pressões separadas por um diafragma em um tubo. Quando o diafragma é removido, uma onda de expansão viaja para a esquerda, como se houvesse um pistão que se movimentasse para a direita com uma velocidade u_3 . Na realidade, u_3 corresponde à velocidade do gás atrás da onda de expansão.

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

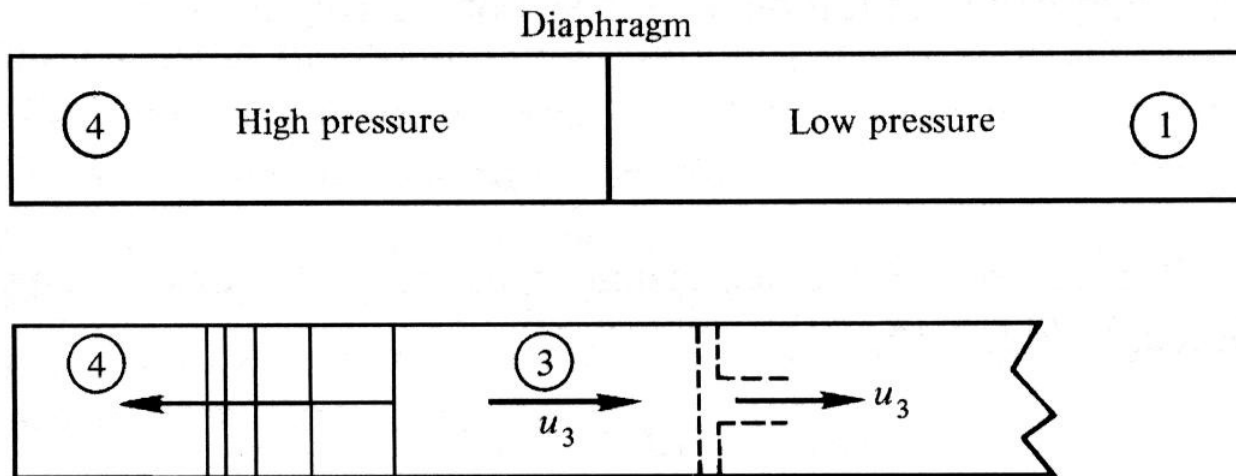


Figure 7.14 | Generation of an expansion wave.

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- A frente da onda de expansão se move para a esquerda dentro da região 4.
- Lembrando-se que qualquer onda finita que se move para direita apresenta velocidade local $u+a$ e que uma onda que se move para a esquerda possui velocidade local $u-a$, a onda de expansão, por se tratar de uma onda que se propaga à esquerda apresenta velocidade $u-a$.

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

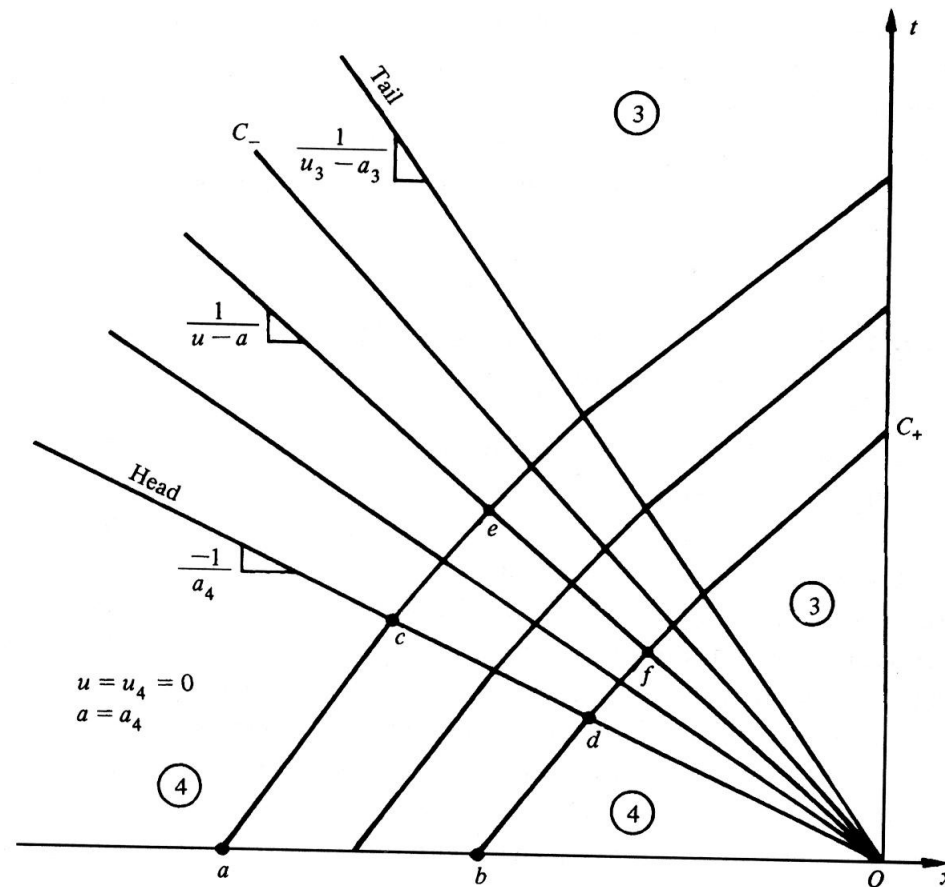


Figure 7.15 | The C_+ and C_- characteristics for a centered expansion wave (on an $x-t$ diagram).

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Na região 4, a velocidade da massa é nula. Assim, a frente de onda se propaga para a esquerda com uma velocidade

$$u_4 - a_4 = 0 - a_4 = -a_4$$

- Desta forma, tem-se

$$\frac{dx}{dt} = u_4 - a_4 = -a_4$$

- que é uma característica C_- .

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Dentro da onda de expansão, a velocidade induzida da massa é u , sendo orientada para a direita.
- A temperatura e, por conseguinte, a velocidade a são reduzidas dentro da onda. Assim, enquanto a frente da onda se propaga na região 4 com a velocidade do som, outras partes da onda se propagam a velocidades menores (referentes ao laboratório).

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Deste modo, a onda de expansão se espalha com sua propagação dentro do duto.
- Nota-se que as linhas características C_- são retas. Para provar isto, serão empregadas as linhas características C_+ .
- Na região 4, tem-se que $u_4 = 0$ e a_4 é constante. Assim, todas as características C_+ possuem uma mesma inclinação.

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Deste modo, para dois pontos a e b na região 4

$$(J_+) _a = (J_+) _b$$

- Contudo, um valor constante de J_+ ocorre ao longo de uma característica C_+ . Assim

$$(J_+) _a = (J_+) _c = (J_+) _e$$

$$(J_+) _b = (J_+) _d = (J_+) _f$$

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Comparando-se as expressões anteriores, tem-se que

$$(J_+)_e = (J_+)_f$$

- Os pontos e e f estão por definição sobre a mesma característica C_- . Deste modo

$$(J_-)_e = (J_-)_f$$

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Obtém-se, então, que as velocidades são

$$u_e = u_f \qquad a_e = a_f$$

- Deste modo, como os pontos arbitrários e e f estão sobre a mesma característica C_- e apresentam a inclinação dx/dt igual, então as linhas características C_- devem ser retas. Além disso, como u e a são constantes em C_- , as propriedades termodinâmicas também o serão.

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Uma onda que se propaga em uma região de propriedades constantes (como no caso da região 4) é chamada de onda simples. Neste caso, uma família de características é formada por linhas retas.
- Quando uma onda se origina em um dado ponto (como na origem do plano xt), tem-se uma onda centrada.

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Quando ambas as famílias de características são linhas curvas, tem-se uma onda não-simples. Como exemplo, cita-se a uma onda de expansão refletida, durante parte do processo de reflexão. Neste caso, a região em que ocorre a mistura de ondas que se propagam à esquerda e à direita é chamada de região não-simples.

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

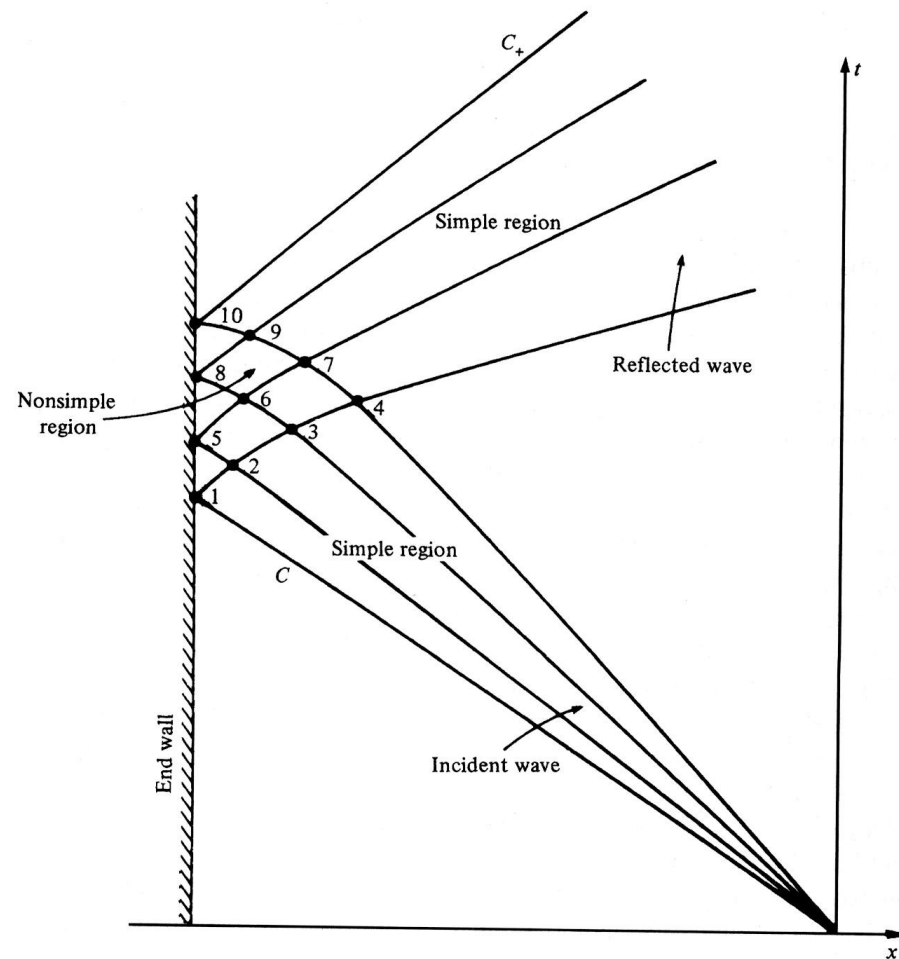


Figure 7.16 | Reflected expansion wave on an xt diagram.

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- As propriedades da onda de expansão refletida para as regiões simples e não-simples podem ser obtidas através do método das características e da condição de contorno de $u=0$ na parede.
- Isto se torna um procedimento numérico (ou gráfico), no qual as linhas características e as condições de compatibilidade (invariantes de Riemann) são empregadas ponto a ponto.

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Em contraste, a solução para uma onda de expansão simples centrada pode ser obtida em uma forma analítica fechada.
- Neste caso, retornando-se à Fig. 7.15, tem-se que J_+ é igual em todos os pontos (a, b, c, d, e, f) através da onda de expansão. Assim:

$$u + \frac{2a}{\gamma - 1} = \text{const}$$

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Empregando-se a relação anterior à região 4, tem-se

$$u_4 + \frac{2a_4}{\gamma-1} = 0 + \frac{2a_4}{\gamma-1} = \text{const}$$

- Combinando-se as relações anteriores

$$\frac{a}{a_4} = 1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{a_4} \right)$$

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Sabendo-se que $a = \sqrt{\gamma RT}$ tem-se

$$\frac{T}{T_4} = \left[1 - \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{u}{a_4} \right) \right]^2$$

- Como o escoamento é isentrópico, sabe-se ainda que

$$\frac{p}{p_4} = \left(\frac{\rho}{\rho_4} \right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_4} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Deste modo,

$$\frac{p}{p_4} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{a_4} \right) \right]^{2\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho}{\rho_4} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{a_4} \right) \right]^{2/(\gamma-1)}$$

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Para obter a variação das propriedades em uma onda de expansão centrada como função de x e t , deve-se considerar a linha característica C_-

$$\frac{dx}{dt} = u - a$$

- Como ela é uma reta que deve passar pela origem, tem-se

$$x = (u - a)t$$

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Deste modo, pode-se obter

$$x = \left(u - a_4 + \frac{\gamma - 1}{2} u \right) t$$

- De onde se tem

$$u = \frac{2}{\gamma + 1} \left(a_4 + \frac{x}{t} \right)$$

- que é válida para a região entre o início e o final da onda de expansão, isto é, para

$$-a_4 \leq x/t \leq u_3 - a_3$$

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

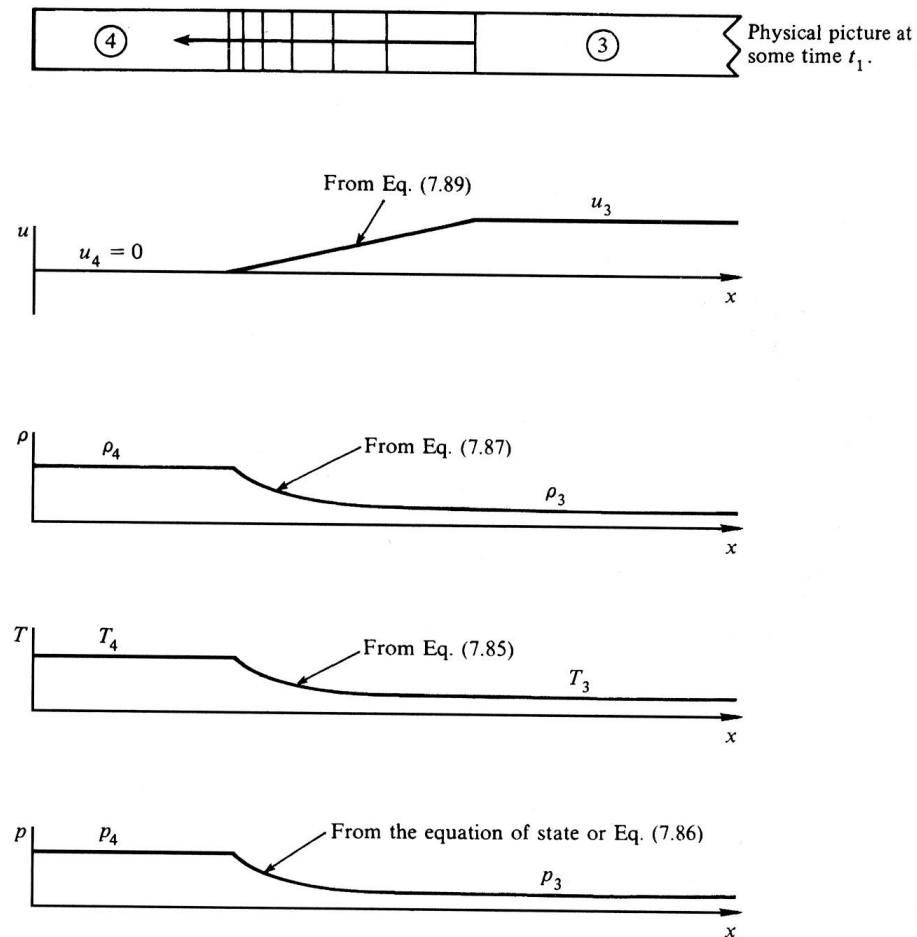


Figure 7.17 | Variation of physical properties within a centered expansion wave.

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Observa-se que o valor de u varia linearmente com x através de uma onda de expansão centrada. Para uma onda que corre para a esquerda, observa-se também que u é positiva, ou seja, o movimento da massa é para a direita, na direção oposta da propagação da onda.

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- No caso de ondas de expansão refletidas, as propriedades dos pontos de malha definidas como a intersecção das características C_+ e C_- na região não-simples são obtidas através das relações

$$du = \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} (u + a) \right] dt \quad du + \frac{dp}{\rho a} = 0$$

$$dp = \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} (u + a) \right] dt \quad du - \frac{dp}{\rho a} = 0$$

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Por exemplo, os valores de J_+ e J_- nos pontos 1, 2, 3 e 4 são conhecidos a partir da onda de expansão incidente.
- No ponto 5, tem-se que $(J_-)_5 = (J_-)_2$, além da condição de contorno, $u_5 = 0$, de modo que a_5 pode ser determinado.
- No ponto 6, os valores de a_6 e u_6 podem ser determinados sabendo-se que

$$(J_-)_6 = (J_-)_3 \qquad (J_+)_6 = (J_+)_5$$

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- A localização do ponto 6 no espaço xt é encontrada pela intersecção da característica C_- que passa pelo ponto 3 com a característica C_+ que passa pelo ponto 5. As linhas características podem ser desenhadas como linhas retas com inclinações que são médias entre os pontos conectados.

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- Para a linha 3-6:

$$\tan^{-1}\left(\frac{dt}{dx}\right) = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{u-a}\right)_3 + \tan^{-1}\left(\frac{1}{u-a}\right)_6 \right]$$

- Para a linha 5-6:

$$\tan^{-1}\left(\frac{dt}{dx}\right) = \frac{1}{2} \left[\tan^{-1}\left(\frac{1}{u+a}\right)_5 + \tan^{-1}\left(\frac{1}{u+a}\right)_6 \right]$$

7.7 Ondas de expansão incidentes e refletidas

- As propriedades nos demais pontos da região não-simples é obtida de modo análogo ao do ponto 6.
- As propriedades atrás da onda de expansão refletida, quando ela deixa completamente a região de interação, são iguais às propriedades calculadas para o ponto 10.

7.8 Relações de tubos de choque

- Considere um tubo de choque na qual um gás com massa molecular M_4 , a alta pressão, e razão entre calores específicos γ_4 encontra-se separado de um gás a baixa pressão com massa molecular M_1 e razão de calores específicos γ_1 através de um diafragma.

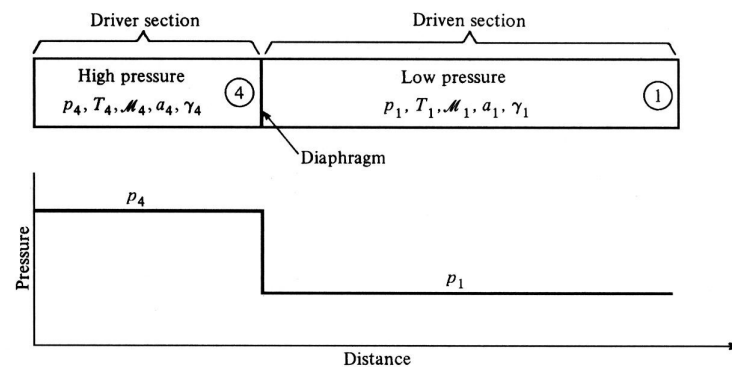


Figure 7.4 | Initial conditions in a pressure-driven shock tube.

7.8 Relações de tubos de choque

- As intensidades do choque incidente e das ondas de expansão formadas quando o diafragma é removido são funções apenas das condições iniciais de pressão dos gases condutor e conduzido (p_4/p_1).
- Observa-se que

$$u_3 = u_2 = u_p$$

$$p_2 = p_3$$

7.8 Relações de tubos de choque

- O movimento de massa induzido pelo choque incidente é dado por

$$u_p = u_2 = \frac{a_1}{\gamma_1} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left(\frac{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + 1}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}} \right)^{1/2}$$

7.8 Relações de tubos de choque

- No caso da relação para ondas de expansão, entre o início e o final, tem-se

$$\frac{p_3}{p_4} = \left[1 - \frac{\gamma_4 - 1}{2} \left(\frac{u_3}{a_4} \right) \right]^{2\gamma_4/(\gamma_4 - 1)}$$

- que, solucionado para u_3 resulta em

$$u_3 = \frac{2a_4}{\gamma_4 - 1} \left[1 - \left(\frac{p_3}{p_4} \right)^{(\gamma_4 - 1)/(2\gamma_4)} \right]$$

7.8 Relações de tubos de choque

- Contudo, como $p_3 = p_2$, tem-se que

$$u_3 = \frac{2a_4}{\gamma_4 - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_4} \right)^{(\gamma_4 - 1)/(2\gamma_4)} \right]$$

- E, diante do fato que $u_2 = u_3$, obtém-se

$$\frac{a_1}{\gamma_1} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left(\frac{\frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + 1}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_1 + 1}} \right)^{1/2} = \frac{2a_4}{\gamma_4 - 1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_4} \right)^{(\gamma_4 - 1)/(2\gamma_4)} \right]$$

7.8 Relações de tubos de choque

- A equação anterior pode ser rearranjada, obtendo-se

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \left\{ 1 - \frac{(\gamma_4 - 1)(a_4/a_1)(p_2/p_1 - 1)}{\sqrt{2\gamma_1[2\gamma_1 + (\gamma_1 + 1)(p_2/p_1 - 1)]}} \right\}^{-2\gamma_4/(\gamma_4 - 1)}$$

- Observa-se, então, que a intensidade do choque incidente p_2/p_1 é fornecida como uma função implícita da razão de pressões do diafragma p_4/p_1 .

7.8 Relações de tubos de choque

- Apesar de difícil notar por observação da equação anterior, tem-se que, para uma dada razão de pressões p_4/p_1 no diafragma, a intensidade do choque incidente p_2/p_1 será maior quando a razão a_1/a_4 diminui.
- Como $a = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{\gamma(\mathfrak{R}/M)T}$, a velocidade do som em um gás leve é maior que a de um gás pesado.

7.8 Relações de tubos de choque

- Assim, para maximizar a intensidade do choque incidente para dada razão p_4/p_1 , o gás condutor deve possuir baixo peso molecular e estar a alta temperatura, enquanto o gás conduzido deve possuir alto peso molecular e estar a baixa temperatura.

7.8 Relações de tubos de choque

- Deste modo, muitos tubos de choque empregam na prática H_2 ou He como gás condutor, aquecendo-o através de meios elétricos (tubos de choque conduzidos por arco) ou de combustão (tubos de choque conduzidos por combustão).

7.8 Relações de tubos de choque

- Considerando-se, então, uma razão de pressões no diafragma de p_4/p_1 tem-se:
 - O valor de p_2/p_1 pode ser obtido através da relação

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_2}{p_1} \left\{ 1 - \frac{(\gamma_4 - 1)(a_4/a_1)(p_2/p_1 - 1)}{\sqrt{2\gamma_1[2\gamma_1 + (\gamma_1 + 1)(p_2/p_1 - 1)]}} \right\}^{-2\gamma_4/(\gamma_4 - 1)}$$

- que define a intensidade da onda de choque incidente.

7.8 Relações de tubos de choque

- As demais propriedades do choque incidente são obtidas através das relações

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} + 1}{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1}} \right)$$

$$W = a_1 \sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) + 1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1}}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{p_1} + 1}$$

$$u_p = \frac{a_1}{\gamma} \left(\frac{p_2}{p_1} - 1 \right) \left(\frac{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}{\frac{p_2}{p_1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \right)^{1/2}$$

7.8 Relações de tubos de choque

– Calcula-se

$$\frac{p_3}{p_4} = \frac{p_3/p_1}{p_4/p_1} = \frac{p_2/p_1}{p_4/p_1}$$

– Tal valor define a intensidade da onda de expansão incidente.

– Todas as propriedades termodinâmicas imediatamente atrás da onda de expansão podem ser obtidas através de relações isentrópicas

$$\frac{p_3}{p_4} = \left(\frac{\rho_3}{\rho_4} \right)^\gamma = \left(\frac{T_3}{T_4} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

7.8 Relações de tubos de choque

- As propriedades locais dentro da onda de expansão podem ser obtidas através das relações

$$\frac{T}{T_4} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{a_4} \right) \right]^2$$

$$\frac{a}{a_4} = 1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{a_4} \right)$$

$$\frac{p}{p_4} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{a_4} \right) \right]^{2\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\frac{\rho}{\rho_4} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{u}{a_4} \right) \right]^{2/(\gamma-1)}$$

$$u = \frac{2}{\gamma+1} \left(a_4 + \frac{x}{t} \right)$$

7.9 Ondas de compressão finitas

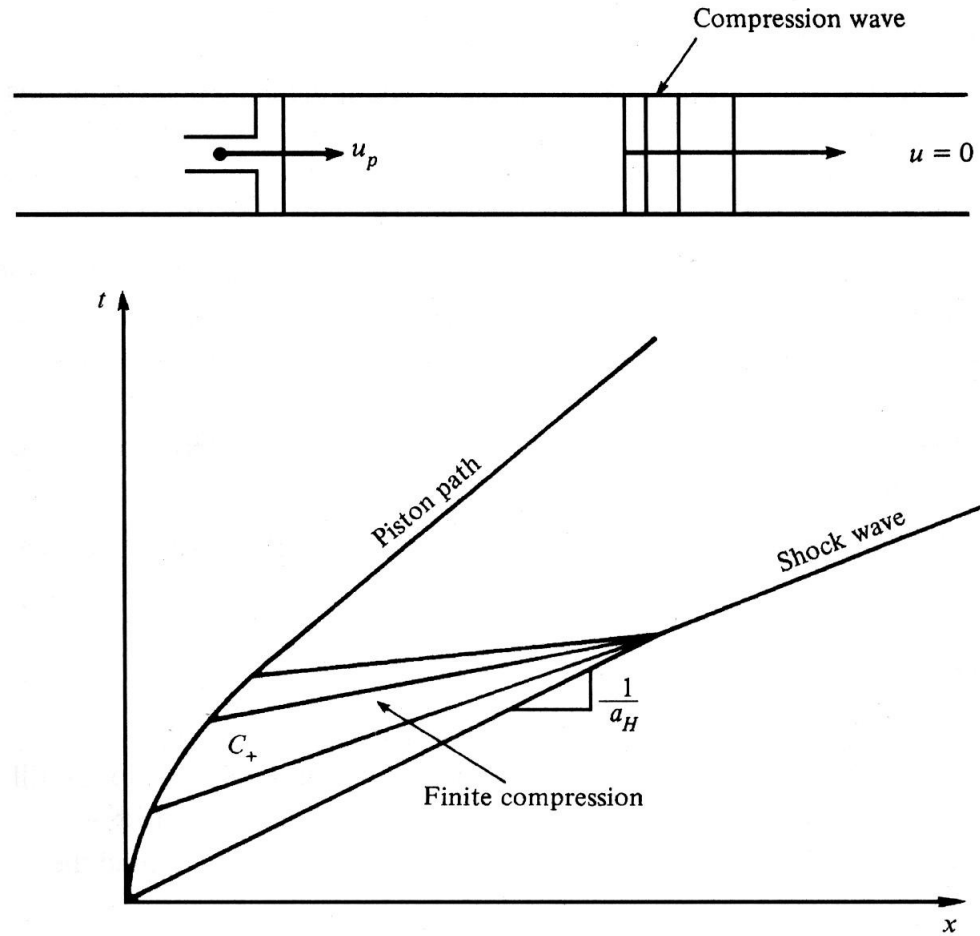


Figure 7.18 | Finite compression wave.

7.9 Ondas de compressão finitas

- A frente de onda de compressão causa um aumento local da pressão e da temperatura do gás. Assim

$$a > a_{\infty}$$

- Neste caso, dentro da onda tem-se que

$$u + a > w_H$$

7.9 Ondas de compressão finitas

- Como as linhas características são dadas por

$$dx/dt = u + a$$

- Tem-se que as linhas características C_+ progressivamente se aproximam, coalescendo em uma onda de choque.