

Universidade Federal do Paraná

Setor de Tecnologia

Departamento de Engenharia Mecânica

Ano 2000

Apostila de TM-119 - Dinâmica e Controle de Sistemas

Cap. 1 - Introdução

- 1.1 - Objetivos dos sistemas automáticos
- 1.2 - Histórico
- 1.3 - Definições
- 1.4 - Tipos e exemplos de sistemas de controle
- 1.5 - Princípios de projeto de sistemas de controle
- 1.6 - Revisão de Transformada de Laplace
- 1.7 - Diagramas de blocos

Cap. 2 - Modelos

- 2.1 - Modelamento de sistemas físicos
- 2.2 - Sistemas mecânicos
- 2.3 - Sistemas elétricos
- 2.4 - Sistemas eletromecânicos
- 2.5 - Sistemas térmicos
- 2.6 - Sistemas hidráulicos
- 2.7 - Sensores e outros dispositivos
- 2.8 - Sistemas multi-variáveis

Cap.3 - Análise da resposta dos sistemas no domínio do tempo

- 3.1 - Introdução
- 3.2 - Sistemas de primeira ordem
- 3.3 - Sistemas de segunda ordem
- 3.4 - Sistemas de ordem superior
- 3.5 - Gráfico do lugar das raízes
- 3.6 - Estabilidade de sistemas / Critério de Routh-Hurwitz

Cap.4 - Ações de controle

- 4.1 - Introdução
- 4.2 - Ação de controle proporcional
- 4.3 - Ação de controle integral
- 4.4 - Ação de controle derivativo
- 4.5 - Ação de controle proporcional mais derivativo
- 4.6 - Ação de controle proporcional mais integrativo

Capítulo 1 - Introdução

Este curso aborda a análise e projeto de sistemas de controle em malha fechada. Na análise dos sistemas de malha fechada desejamos conhecer suas características dinâmicas. No projeto dos sistemas de controle, especificamos as características desejadas e devemos configurar ou sintetizar o sistema, de forma que este apresente um comportamento de acordo com as necessidades desejadas.

1.1 - Objetivos dos sistemas automáticos

O controle automático de sistemas representa um papel vital na engenharia e na ciência de hoje. Possui grande importância, por exemplo, em sistemas de pilotagem de avião, em sistemas de controle de veículos terrestres e outras aplicações. É parte integrante dos processos industriais e de fabricação modernos: em controle de pressão, temperatura, umidade, vazão e outras grandezas.

Os avanços na teoria e na prática de controles automáticos propiciam meios para atingir desempenho ótimo de sistemas dinâmicos e contribuem para a melhoria na qualidade e na diminuição de custos de produção, bem como favorecem o aumento da produtividade e diminuem o número de operações manuais repetitivas e o risco de acidentes.

1.2 - Histórico

- James Watt (Séc. XVIII) - Inventou o primeiro controlador centrífugo de massa para controle automático de velocidade de uma máquina a vapor;
- Minorsky (1922) - Desenvolveu controladores automáticos para pilotagem de navios e mostrou como poderia ser determinada a estabilidade a partir das equações diferenciais que descrevem o sistema;
- Nyquist (1932) - Criou procedimento relativamente simples para determinar a estabilidade de sistemas de malha fechada;
- Hazen (1934) - Introduziu o termo servomecanismos para sistemas de controle de posição;
- Anos 40 - Surgem os métodos de resposta em frequência, utilizado também para projetar os sistemas de controle lineares realimentados;
- Anos 50 - O método do lugar das raízes em projeto de sistemas de controle é desenvolvido;
- Desde 1960 - Sistemas cada vez mais complexos (múltiplas entradas e saídas);
- Atualmente - Utilização crescente de computadores digitais on-line na operação de sistemas de controle.

1.3 - Definições

- Planta: É uma parte do sistema, que pode ser um grupo de elementos de uma máquina, que funcionam em conjunto, cuja finalidade é desempenhar uma dada função.

- Processos:

1. Uma operação ou desenvolvimento natural, que evolui progressivamente, caracterizado por uma série de mudanças graduais que se sucedem, umas em relação às outras, objetivando um particular resultado ou meta.

2. Uma operação artificial ou voluntária, que evolui progressivamente e se constitui por uma série de atividades controladas ou movimentos sistematicamente dirigidos, objetivando um particular resultado ou meta.

- Sistema: É uma combinação de componentes que atuam em conjunto e realizam um certo objetivo;

- Entrada e Saída: Entrada é a grandeza de referência do sistema (sinal de entrada) e saída é a grandeza do sistema que se deseja controlar (sinal de saída);

- Distúrbios: Um distúrbio é um sinal que tende a afetar adversamente o valor da saída de um sistema. Se um distúrbio é gerado dentro do sistema, ele é denominado interno; ao passo

que um distúrbio externo é gerado fora do sistema e constitui uma entrada;

- Sistema de controle realimentado: É uma operação que, na presença de distúrbios não previsíveis, deverá tender a reduzir a diferença entre a saída de um sistema e a entrada de referência, e que opera com base nesta diferença; ou é aquele sistema que tende a manter uma relação prescrita entre a saída e a entrada de referência;
- Servomecanismos: É um sistema de controle realimentado no qual a saída é alguma posição mecânica, velocidade ou aceleração;
- Sistemas reguladores automáticos: É um sistema de controle realimentado no qual a entrada de referência, ou a saída desejada, ou é constante ou varia lentamente no tempo;
- Sistemas de controle de processos: É um sistema de controle realimentado no qual se deseja que a saída seja variável no tempo de acordo com uma determinada necessidade.

1.4 - Tipos e exemplos de sistemas de controle

1.4.1 - Sistemas de controle em malha-fechada

É um sistema de controle no qual o sinal de saída possui um efeito direto na ação de controle, ou seja, são os sistemas de controle realimentados.

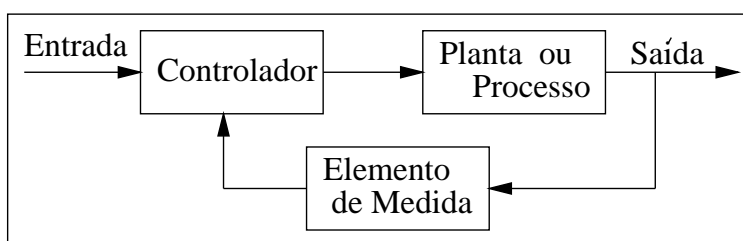


Figura 1.1 - Diagrama de blocos de um sistema de controle em malha-fechada

O sinal erro atuante, que é a diferença entre o sinal de entrada (referência) e o sinal realimentado (que pode ser o sinal de saída ou uma função do sinal de saída) é alimentado no controlador e mantém a saída do sistema em um valor desejado.

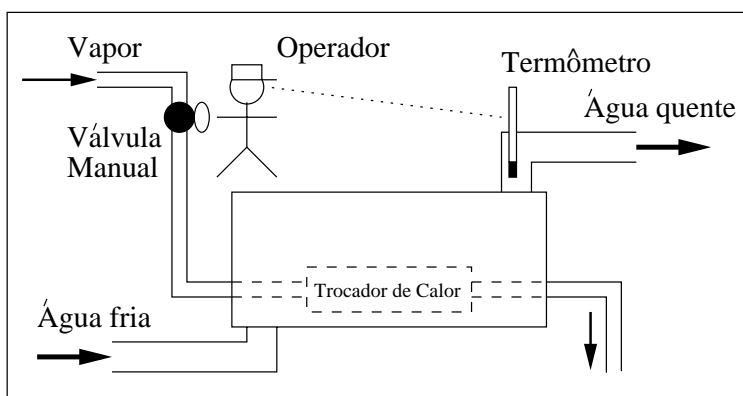


Figura 1.2 - Controle realimentado manual de um sistema térmico

Se for usado um controlador para substituir o operador humano, o sistema torna-se sistema de controle em malha-fechada automático. A posição do sensor de temperatura no sistema seleciona a temperatura de saída.

A saída, ou seja, a temperatura real da água quente no exemplo da figura 1.3, que é medida pelo sensor, é comparada com a temperatura desejada, de modo a gerar um sinal erro atuante.

O sinal erro produzido no controlador automático é amplificado, e a saída do controlador é enviada a uma válvula de controle para alterar o fluxo de vapor de modo a corrigir

a temperatura real da água.

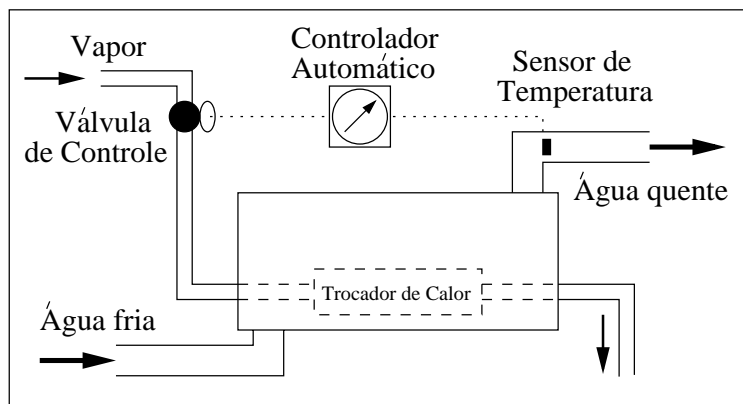


Figura 1.3 - Controle realimentado automático de um sistema térmico

Se não houver erro, nenhuma variação é necessária na abertura da válvula. No sistema aqui considerado, as variações de temperatura ambiente, a temperatura de água fria na entrada, e outras grandezas podem ser considerados sinais de distúrbios externos.

1.4.2 - Sistemas de controle em malha-aberta

São sistemas de controle nos quais o sinal de saída não tem efeito na ação de controle, ou seja, nos sistemas de controle em malha aberta, a saída não é realimentada para comparação com a entrada. Um exemplo é uma máquina de lavar roupa. As operações de molhar, lavar e enxaguar em uma máquina deste tipo são efetuadas sem a medição do sinal de saída, por exemplo, a limpeza das roupas.

Nos sistemas de controle em malha aberta a saída não é comparada com a entrada, conseqüentemente, a cada entrada de referência corresponde uma condição de operação; nestes casos, a precisão do sistema depende de uma calibração mecânica.

Os sistemas de controle em malha aberta devem ser cuidadosamente calibrados e devem manter este ajuste para serem úteis. Na presença de distúrbios, um sistema de controle em malha aberta pode não desempenhar a tarefa desejada.

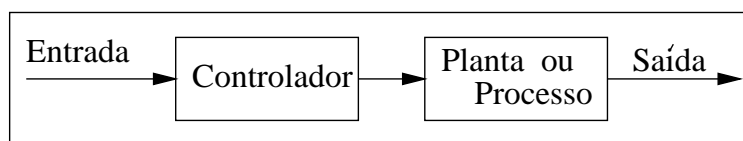


Figura 1.4 - Sistema de Controle em malha-aberta

1.4.3 - Sistemas de controle adaptativos

As características dinâmicas da maioria dos sistemas de controle não são constantes devido a várias razões, tais como deterioração dos componentes ao longo do tempo ou variações em parâmetros e do ambiente.

Embora os efeitos de pequenas variações sobre as características dinâmicas sejam atenuados em um sistema de controle realimentado, se as variações forem significativas, um sistema satisfatório deverá possuir a habilidade de adaptação.

A adaptação implica a habilidade de se auto-ajustar ou auto-modificar de acordo com variações imprevisíveis nas condições de ambiente ou de estrutura. Os sistemas de controle que possuem a capacidade de adaptação são denominados sistemas de controle adaptativos.

Em um sistema de controle adaptativo, as características dinâmicas devem ser identificadas em todos os instantes de modo que os parâmetros do controlador possam ser ajustados de maneira a manter desempenho ótimo.

1.4.4 - Exemplos de sistemas de controle

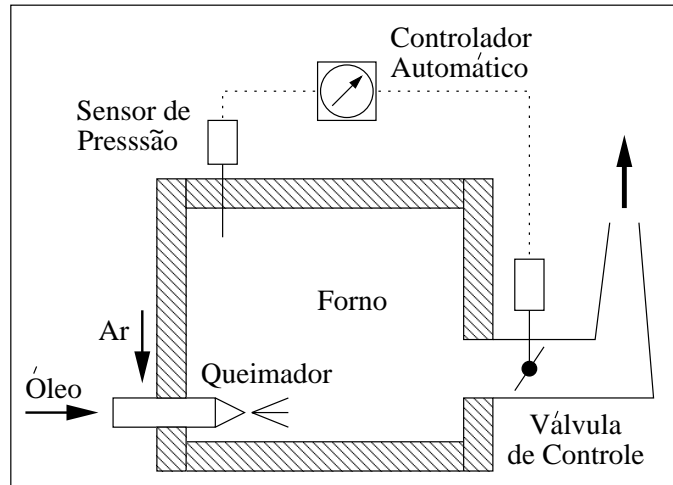


Figura 1.5 - Sistema de controle de pressão em fornos

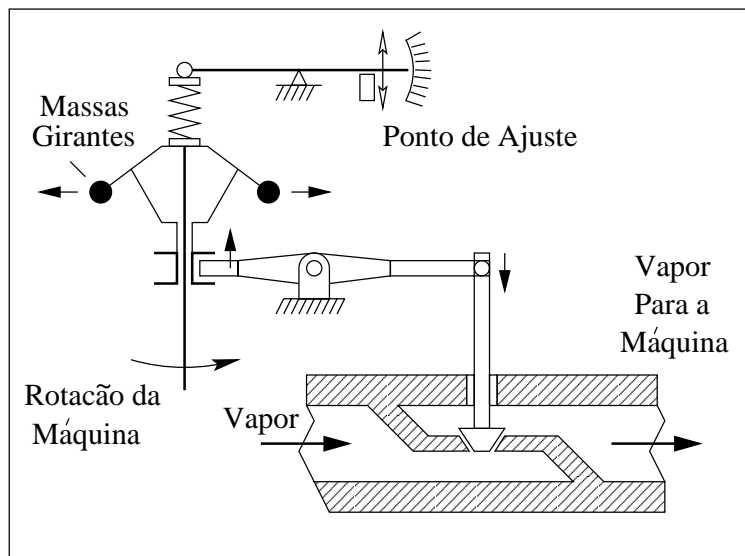


Figura 1.6 - Sistema de controle de velocidade (Regulador de Watt)

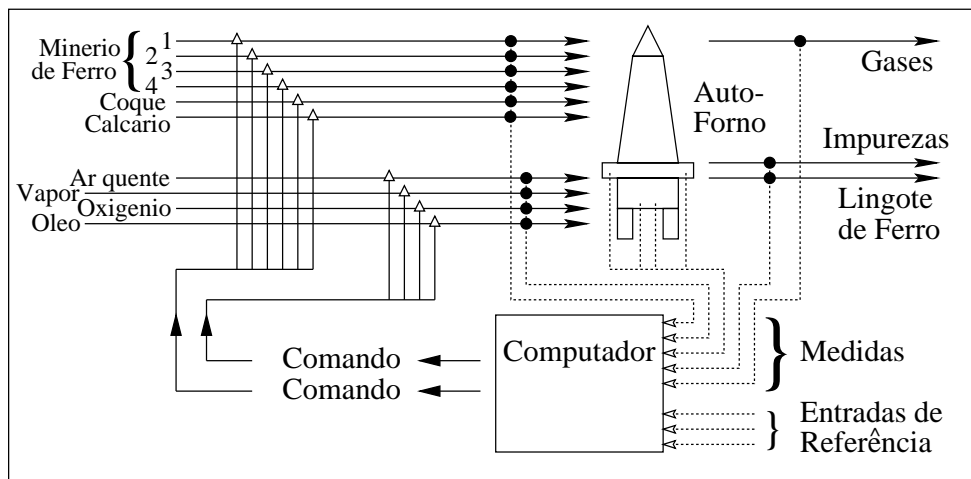


Figura 1.7 - Diagrama de blocos de um sistema de controle multi-variável

1.5 - Princípios de projeto de sistemas de controle

1.5.1 - Requisitos gerais de um sistema de controle

1. Qualquer sistema de controle deve ter estabilidade absoluta.
2. Os sistemas devem possuir uma estabilidade relativa compatível com a resposta desejada.
3. Os sistemas devem ser capazes de reduzir erros a zero ou a algum valor pequeno compatível com a necessidade.

1.5.2 - Problemas básicos no projeto de sistemas de controle

Nas situações práticas sempre haverá alguns distúrbios agindo sobre a planta ou processo. Estes podem ser de origem externa ou interna, aleatórios ou previsíveis. O projeto do controlador deve levar em consideração quaisquer distúrbios que possam afetar as variáveis de saída.

1.5.3 - Análise

Por análise de um sistema de controle designamos a investigação do sistema cujo modelo matemático pode ser obtido. Como qualquer sistema é constituído por componentes, a análise deve iniciar com uma descrição matemática de cada componente.

Uma vez que o modelo matemático do sistema completo foi obtido, a maneira pela qual a análise é conduzida independe do tipo de sistema físico: pneumático, elétrico, mecânico e etc (sistemas análogos).

1.6 - Revisão de Transformada de Laplace

O método da Transformada de Laplace é um método operacional que pode ser usado com vantagens para resolver equações diferenciais lineares. Usando transformadas de Laplace, podem-se converter muitas funções comuns, tais como $\sin\omega t$, $\cos\omega t$, $e^{-t}\sin\omega t$ em funções algébricas de uma variável complexa s .

Não será revisto detalhes matemáticos da Transformada de Laplace, simplesmente recordaremos operações que serão úteis para controle de sistemas, tanto para modelagem quanto para análise dos modelos obtidos.

1.6.1 - Variáveis e funções complexas

Uma variável complexa s tem uma componente real σ e uma componente imaginária $j\omega$, ou $s = \sigma + j\omega$. Uma função complexa $G(s)$ é um mapeamento da variável s , portanto, seu resultado também pode ser mostrado no plano complexo, no plano $G(s)$.

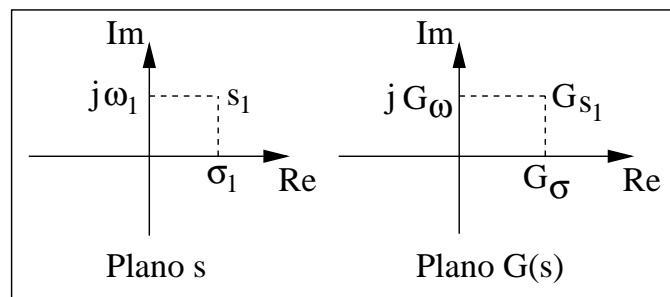


Figura 1.8 - Plano complexo s e $G(s)$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{(s+1)}} \text{ e } \boxed{G(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 3)}} \text{ são exemplos de funções complexas.}$$

1.6.2 - Definição da Transformada de Laplace

A transformada de Laplace de uma função no tempo, $f(t)$, é a integral:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

1.6.3 - Exemplos da Transformada de Laplace

Exemplo 1 - Função Exponencial. Considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ f(t) &= A.e^{-\alpha t} && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

onde A e α são constantes. A transformada de Laplace de $f(t)$ será:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{A}{s + \alpha}$$

Exemplo 2 - Função degrau. Considere a seguinte função degrau:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ f(t) &= A = \text{constante} && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

A transformada de Laplace desta função degrau será:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{A}{s}$$

A função degrau cuja amplitude, A , é igual a 1, é chamada função degrau unitária, expressa por $1(t)$.

A transformada de Laplace da função degrau unitária é:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s}$$

Exemplo 3 - Função rampa. Considere a seguinte função:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ f(t) &= A.t && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

A transformada de Laplace desta função será:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{A}{s^2}$$

Exemplo 4 - Função seno:

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 && \text{para } t < 0 \\ f(t) &= A.\text{sen}(\omega.t) && \text{para } t \geq 0 \end{aligned}$$

A transformada de Laplace desta função será:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{A.\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Transformada de Laplace de algumas funções:

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$
$f(t) = A.e^{-\alpha t}$	$\frac{A}{s + \alpha}$	$f(t) = A.\text{sen}(\omega.t)$	$\frac{A.\omega}{s^2 + \omega^2}$
$f(t) = A$	$\frac{A}{s}$	$f(t) = A.t$	$\frac{A}{s^2}$

1.6.4 - Teoremas importantes da Transformada de Laplace

Teorema da diferenciação:

Primeira derivada:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = s.F(s) - f(0)$$

Segunda derivada:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2.F(s) - s.f(0) - \dot{f}(0)$$

Derivada de ordem n:

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n.F(s) - s^{n-1}.f(0) - s^{n-2}.\dot{f}(0) - \dots - s.f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Teorema da integral:

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} - \frac{\left[\int f(t)dt\right]_{t=0\pm}}{s}$$

Teorema do valor final:

Se $f(t)$ e sua derivada primeira são transformáveis segundo Laplace, se $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existe, e se $s.F(s)$ é analítica no semiplano direito do plano s incluindo o eixo $j\omega$, exceto por um pólo simples na origem (que significa que $f(t)$ tende para um valor bem definido quando $t \rightarrow \infty$, então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s.F(s)$$

1.7 - Diagramas de blocos

Diagrama de blocos é um método gráfico de representação de sistemas de equações lineares, particularmente útil em controle de sistemas. É através de diagrama de blocos que são implementados os sistemas no “software” Simulink-Matlab.

1.7.1 - Função de transferência

Função de transferência é uma função em (s) que multiplicado pela entrada de um sistema (ou um sub-sistema) nos fornece a saída deste sistema (ou sub-sistema). A função de transferência entre dois sinais pode também ser um valor constante, como por exemplo $G(s) = K$ ou $G(s) = s^2 + s$.

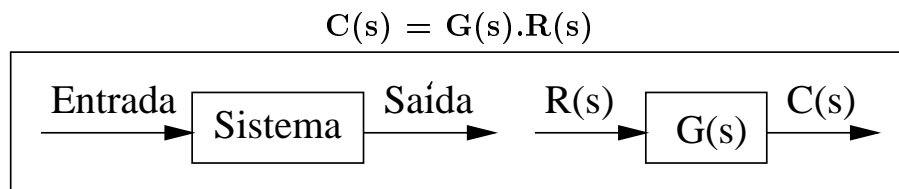


Figura 1.9 - Função de transferência $G(s)$

1.7.2 - Detector de erro

Detector de erro é a forma gráfica para representar a soma (ou subtração, dependendo

do sinal dentro do símbolo \otimes . Em sistemas de controle o detector de erro pode nos fornecer a diferença entre entrada e saída do sistema.

$$E(s) = R(s) - C(s)$$

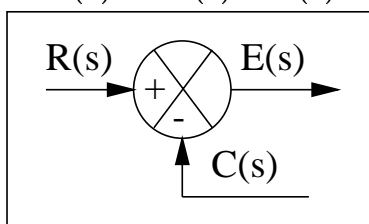


Figura 1.10 - Detector de erro

1.7.3 - Sistema de malha fechada com realimentação

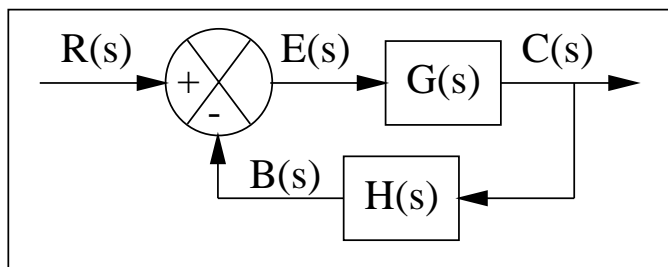


Figura 1.11 - Sistema de malha-fechada com realimentação

Determinação da função de transferência (F.T.) do sistema:

$$C(s) = G(s) \cdot E(s)$$

$$E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - C(s) \cdot H(s)$$

$$\text{logo: } C(s) = G(s) \cdot [R(s) - C(s) \cdot H(s)]$$

$$C(s) + G(s) \cdot H(s) \cdot C(s) = G(s) \cdot R(s)$$

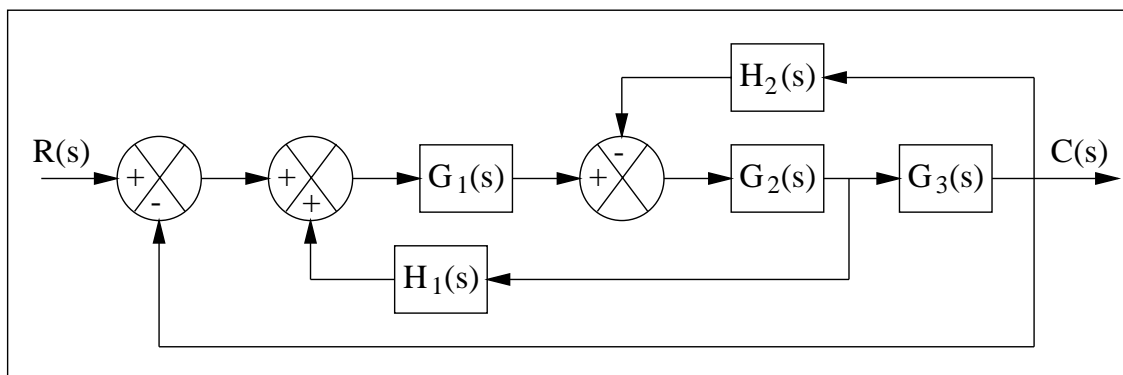
Função de transferência (F.T.) do sistema:

$$F.T. = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

Regra para redução de diagrama de blocos para um único bloco:

$$F.T. \text{ única} = \frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}} = \frac{\text{Produto das F.T. do Numerador}}{1 - \sum (\text{Produto das F.T. de todos laços})}$$

Exemplo 1.7.1: Reduzir o diagrama de blocos abaixo a uma única função de transferência:



Devemos aplicar a regra para três laços:

$$F.T. = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s).G_2(s).G_3(s)}{1 + G_2(s).G_3(s).H_2(s) - G_1(s).G_2(s).H_1(s) + G_1(s).G_2(s).G_3(s)}$$

1.7.4 - Sistema de malha fechada sujeito a um distúrbio

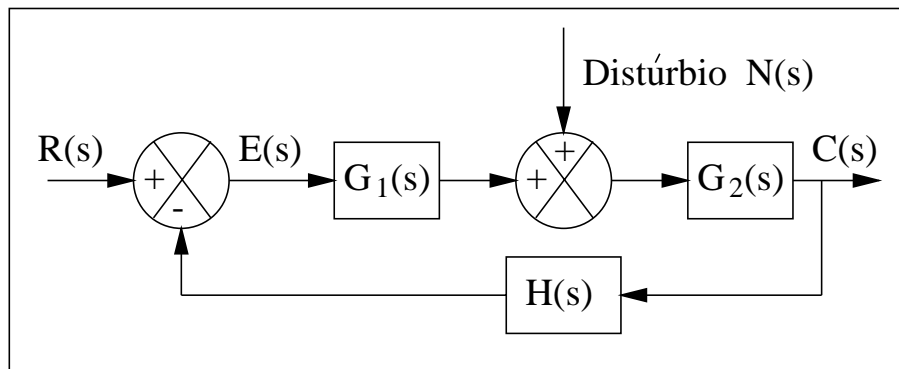
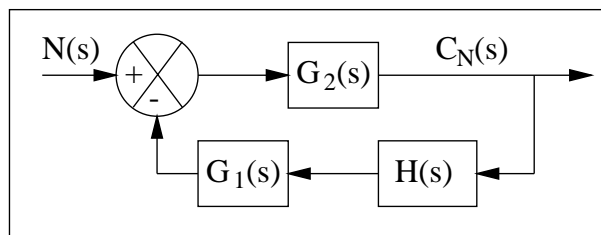


Figura 1.12 - Sistema de malha-fechada com distúrbio

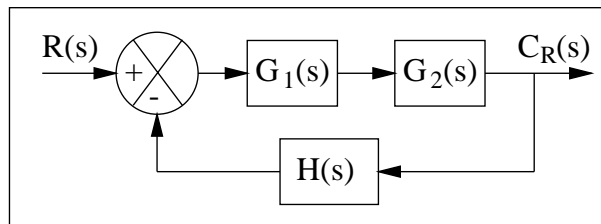
Fazendo $R(s)=0$, teremos a saída com relação somente ao distúrbio, ou seja $C_N(s)$, o que gera o diagrama de blocos (com $R(s) = 0$), representado ao lado, fornecendo $C_N(s)$

$$C_N(s) = \left[\frac{G_2(s)}{1 + G_2(s).H(s).G_1(s)} \right] .N(s)$$



Repetindo o procedimento para $N(s)=0$, agora obtemos a saída com relação somente a referência, ou seja, $C_R(s)$:

$$C_R(s) = \left[\frac{G_1(s).G_2(s)}{1 + G_1(s).G_2(s).H(s)} \right] .R(s)$$



Para sistemas lineares a saída, $C(s)$, será a soma dos termos relativos a entrada de referência e ao distúrbio:

$$C(s) = C_R(s) + C_N(s) = \left[\frac{G_1(s).G_2(s)}{1 + G_1(s).G_2(s).H(s)} \right] .R(s) + \left[\frac{G_2(s)}{1 + G_2(s).H(s).G_1(s)} \right] .N(s)$$

Capítulo 2 - Modelos de Sistemas Físicos

Neste capítulo trataremos da representação dos sistemas físicos através do equacionamento em modelos matemáticos.

Modelo matemático: Define as relações entre saída e entrada de um sistema físico.

Sistema linear São aqueles nos quais as equações diferenciais do modelo são lineares, ou seja, possui coeficientes constantes ou apenas funções da variável independente. Neste sistemas pode-se aplicar o princípio da superposição.

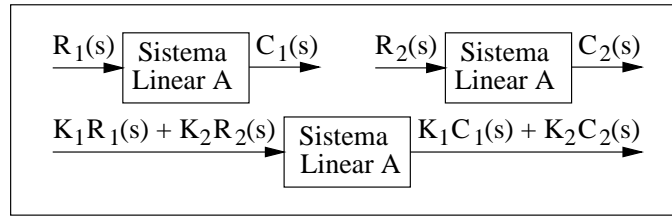


Figura 2.1 - Princípio da superposição

2.1 - Modelamento de sistemas físicos

Os modelos dos sistemas serão obtidos utilizando os princípios físicos básicos: Primeira e segunda lei de Newton, Primeira lei da termodinâmica (conservação da energia) e outras na forma de equações diferenciais em conjunto com equações particulares dos elementos de cada sistema.

Como regras gerais para os modelos a serem desenvolvidos podemos destacar:

- Nenhum modelo matemático de um sistema físico é exato;
- Pode-se melhorar a precisão de um modelo aumentando a complexidade das equações;
- Deve-se procurar desenvolver um modelo que seja adequado ao problema.

2.2 - Sistemas mecânicos

2.2.1 - Sistemas mecânicos de translação

Nestes sistemas desejamos conhecer, por exemplo, a aceleração, a velocidade ou o deslocamento de massa(s) montadas em mola(s) e amortecedor(s), quando sujeitas a forças ou deslocamentos externos. Os elementos mecânicos e seus parâmetros são:

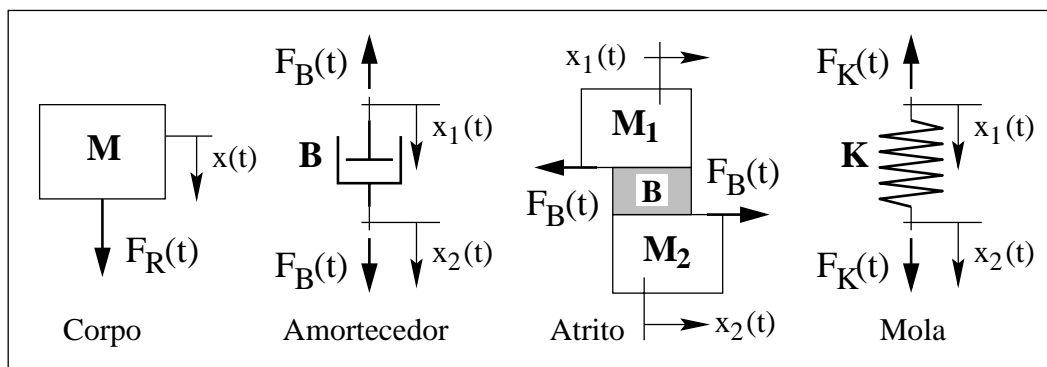


Figura 2.2 - Elementos isolados e forças atuantes

Segunda Lei de Newton e equações particulares para os elementos		
Corpo	Amortecedor ou Atrito	Mola
$F_R(t) = M.a(t) = M.\ddot{x}(t)$	$F_B(t) = B.[\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)]$	$F_K(t) = K.[x_2(t) - x_1(t)]$
M = Massa	B = Coef. de Atrito	K = Coef. de Elasticidade

Exemplo 2.2.1: Seja o sistema massa, amortecedor e mola abaixo. Determine a função de transferência $\bar{X}(s)/F(s)$.

Solução:

Deve-se aplicar a segunda lei de Newton para o único corpo do sistema em questão, adotando, por exemplo, o sentido positivo das forças e do deslocamento, $x(t)$, para baixo, e montar o diagrama de corpo livre para os elementos:

$$F_R(t) = F(t) - F_B(t) - F_K(t) = M.\ddot{x}(t)$$

Adotando o sinal positivo das forças sobre o amortecedor e sobre a mola quando estes são esticados, teremos:

$$F_B(t) = B.\dot{x}(t) \quad \text{e} \quad F_K(t) = K.x(t)$$

Portanto, a equação diferencial para o deslocamento, $x(t)$, do corpo será:

$$M.\ddot{x}(t) = F(t) - B.\dot{x}(t) - K.x(t)$$

Rearranjando:

$$F(t) = M.\ddot{x}(t) + B.\dot{x}(t) + K.x(t)$$

Aplicando Transformada de Laplace na equação diferencial acima, considerando condições iniciais nulas, $x(0)=0$ e $\dot{x}(0) = 0$, temos:

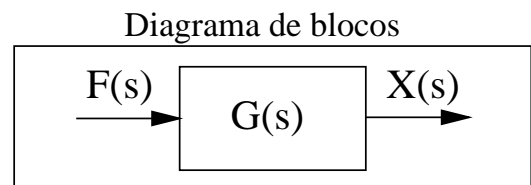
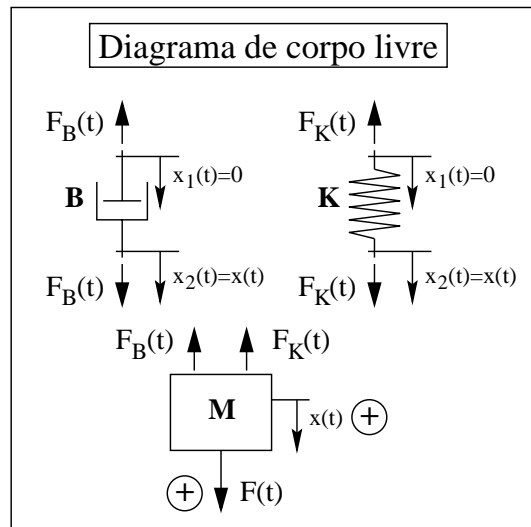
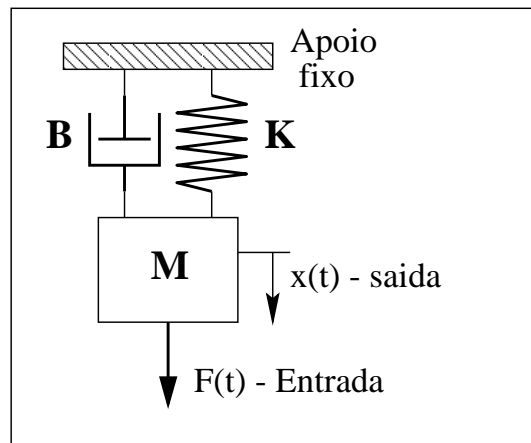
$$F(s) = M.s^2.X(s) + B.s.X(s) + K.X(s)$$

ou

$$F(s) = X(s).[M.s^2 + B.s + K]$$

Função de transferência:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{(M.s^2 + B.s + K)}$$

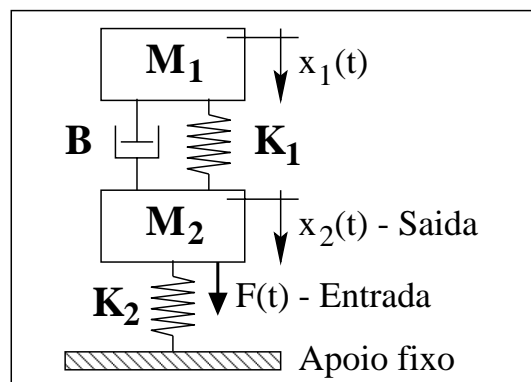


A função de transferência, $G(s)$, caracteriza o sistema massa-mola-amortecedor com relação a entrada, $F(s)$ e a saída, $X(s)$.

Exemplo 2.2.2: Seja o sistema massa, amortecedor e mola abaixo. Determine a função de transferência $X_1(s)/F(s)$.

Solução:

Neste caso deve-se aplicar a segunda lei de Newton para os dois corpos do sistema, M_1 e M_2 , e montar o diagrama de corpo livre para os elementos, adotando as mesmas convenções do exemplo anterior.



Lei de Newton para M_1 :

$$F_{R_1}(t) = F_B(t) + F_{K_1}(t) = M_1 \cdot \ddot{x}_1(t)$$

Lei de Newton para M_2 :

$$F_{R_2}(t) = F(t) + F_{K_2}(t) - F_B(t) - F_{K_1}(t) = M_2 \cdot \ddot{x}_2(t)$$

Forças sobre o amortecedor e molas:

$$F_B(t) = B \cdot [\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)]$$

$$F_{K_1}(t) = K_1 \cdot [x_2(t) - x_1(t)]$$

$$F_{K_2}(t) = K_2 \cdot [0 - x_2(t)] = -K_2 \cdot x_2(t)$$

Utilizando as equações acima nas equações da lei de Newton para as duas massas, omitindo-se o símbolo (t), obtem-se:

$$M_1 \cdot \ddot{x}_1 = B \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + K_1 \cdot (x_2 - x_1)$$

$$M_2 \cdot \ddot{x}_2 = F - K_2 \cdot x_2 - B \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - K_1 \cdot (x_2 - x_1)$$

Considerando condições iniciais nulas e aplicando a Transformada de Laplace omitindo-se o símbolo (s), temos:

$$M_1 \cdot s^2 \cdot X_1 = B \cdot s \cdot (X_2 - X_1) + K_1 \cdot (X_2 - X_1)$$

$$M_2 \cdot s^2 \cdot X_2 = F - K_2 \cdot X_2 - B \cdot s \cdot (X_2 - X_1) - K_1 \cdot (X_2 - X_1)$$

Isolando os termos que contém X_1 e X_2 , temos:

$$(M_1 \cdot s^2 + B \cdot s + K_1) \cdot X_1 = (B \cdot s + K_1) \cdot X_2$$

$$(M_2 \cdot s^2 + B \cdot s + K_1 + K_2) \cdot X_2 = F(s) + (B \cdot s + K_1) \cdot X_1$$

Observa-se que as duas equações formam um sistema de equações lineares com incógnitas X_1 e X_2 , sendo $F(s)$ uma entrada portanto conhecida (será definida como um sinal de teste no Capítulo 3). Precisamos agora isolar as incógnitas X_1 e X_2 e resolver o problema de forma usual ou na forma de diagrama de blocos.

Da primeira equação:

$$X_1(s) = X_2(s) \cdot \frac{(B \cdot s + K_1)}{(M_1 \cdot s^2 + B \cdot s + K_1)}$$

ou $X_1(s) = X_2(s) \cdot G_1(s)$

E da segunda equação:

$$X_2(s) = F(s) \cdot \frac{1}{(M_2 \cdot s^2 + B \cdot s + K_1 + K_2)} + X_1(s) \cdot \frac{(B \cdot s + K_1)}{(M_2 \cdot s^2 + B \cdot s + K_1 + K_2)}$$

ou $X_2(s) = F(s) \cdot G_2(s) + X_1(s) \cdot G_3(s)$

Manipulando as equações:

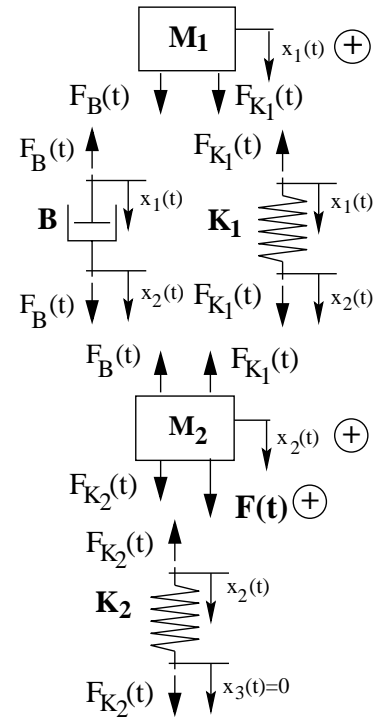
$$X_1(s) = [F(s) \cdot G_2(s) + X_1(s) \cdot G_3(s)] \cdot G_1$$

$$X_1(s) \cdot [1 - G_3(s) \cdot G_1(s)] = F(s) \cdot G_2(s) \cdot G_1(s)$$

Função de transferência:

$$G(s) = \frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{G_2(s) \cdot G_1(s)}{[1 - G_3(s) \cdot G_1(s)]}$$

Diagrama de corpo livre

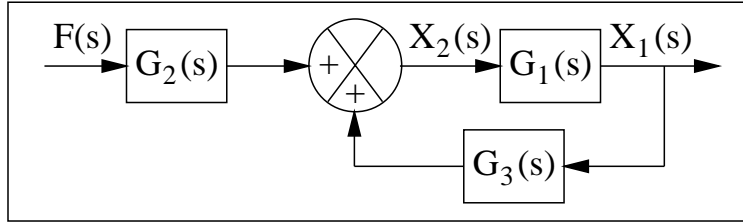


Utilizando as expressões de $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $G_3(s)$, temos:

$$G(s) = \frac{B \cdot s + K_1}{M_1 M_2 \cdot s^4 + B \cdot (M_1 + M_2) \cdot s^3 + (K_1 M_1 + K_1 M_2 + K_2 M_1) \cdot s^2 + K_2 B \cdot s + K_1 K_2}$$

É importante obter o diagrama de blocos do sistema onde aparecem as variáveis intermediárias, no caso $X_2(s)$. Este é obtido utilizando as convenções de representação de operações matemáticas (soma, subtração, multiplicação) na forma de blocos.

Diagrama de blocos



2.2.2 - Sistemas mecânicos de rotação

Nestes sistemas desejamos conhecer a aceleração, a velocidade ou o deslocamento angular de corpos de momento de inércia conhecidos montadas em eixo(s) e acoplamento(s) ou mancal(ais), quando sujeitas a torques externos.

Os elementos mecânicos e seus parâmetros neste caso são:

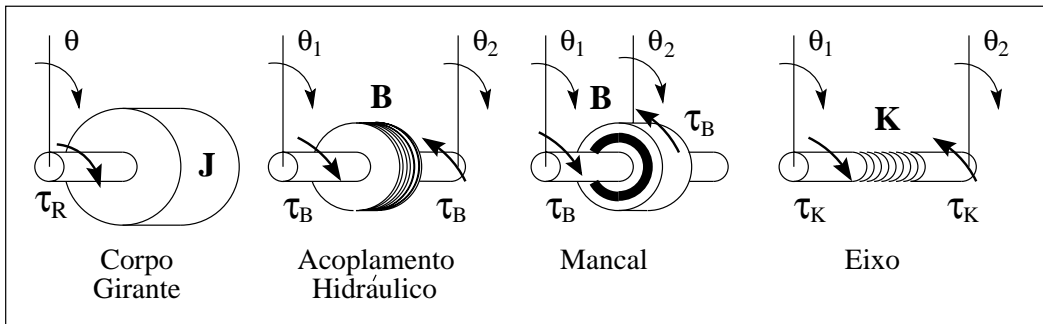
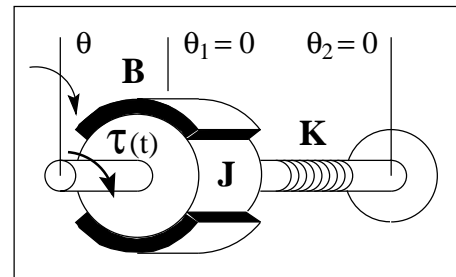


Figura 2.3 - Elementos isolados e forças atuantes

Segunda Lei de Newton e equações particulares para os elementos girantes		
Corpo Girante	Acoplamento ou Mancal	Eixo
$\tau_R(t) = J \cdot \alpha(t) = J \cdot \ddot{\theta}(t)$	$\tau_B(t) = B \cdot [\dot{\theta}_2(t) - \dot{\theta}_1(t)]$	$\tau_K(t) = K \cdot [\theta_2(t) - \theta_1(t)]$
J = Momento de Inércia	B = Coef. de Atrito Angular	K = Coef. de Elasticidade Torcional

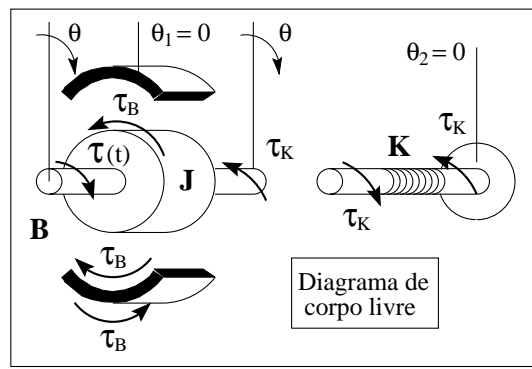
Exemplo 2.2.3: Seja um sistema composto por um corpo preso através de um eixo de elasticidade torcional a um apoio fixo, sujeito a um atrito angular (São representadas somente duas partes do mancal). No corpo é aplicado um torque externo $\tau(t)$, como na figura ao lado.

Determine a função de transferência $\theta(s)/\tau(s)$.



Solução:

Aplicando a segunda lei de Newton para o único corpo girante do sistema, adotando o sentido horário, do ponto de vista da esquerda para a direita, como positivo dos torques e do deslocamento angular, $\theta(t)$, e com referência no diagrama de corpo livre para os elementos, escrevemos:



$$\tau_R(t) = \tau(t) - \tau_B(t) - \tau_K(t) = J.\ddot{\theta}(t)$$

Adotando o sinal positivo dos torques sobre o mancal e sobre o eixo quando estes são torcidos no sentido horário, lembrando que $\theta_1 = 0$ (lado externo do mancal fixo) e $\theta_2 = 0$ (apoio fixo do eixo), temos :

$$\begin{aligned} \tau_B(t) &= B.[\dot{\theta}(t) - \dot{\theta}_1(t)] = B.\dot{\theta}(t) \\ \tau_K(t) &= K.[\theta(t) - \theta_2(t)] = K.\theta(t) \end{aligned}$$

A equação diferencial para o deslocamento angular, $\theta(t)$, do corpo girante será:

$$J.\ddot{\theta}(t) = \tau(t) - B.\dot{\theta}(t) - K.\theta(t)$$

Rearranjando:

$$\tau(t) = J.\ddot{\theta}(t) + B.\dot{\theta}(t) + K.\theta(t)$$

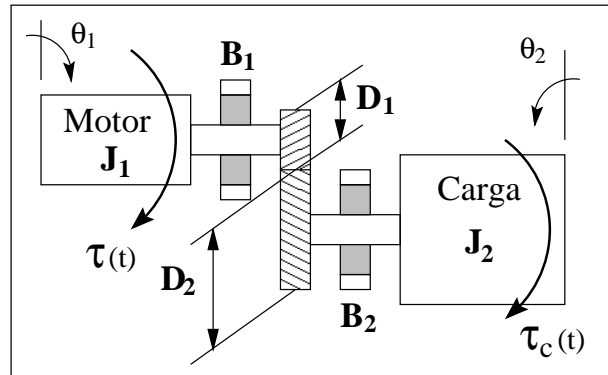
Aplicando Transformada de Laplace, considerando condições iniciais nulas, $\theta(0)=0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$, temos:

$$\tau(s) = J.s^2.\theta(s) + B.s.\theta(s) + K.\theta(s) \quad \text{ou} \quad \tau(s) = \theta(s).[J.s^2 + B.s + K]$$

Função de transferência: F.T. =
$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{(J.s^2 + B.s + K)}$$

Exemplo 2.2.4: Considere o par de engrenagens da figura ao lado acoplando um motor a uma carga, sendo:

- $\tau(t)$ = Torque eletromagnético aplicado sobre o motor;
- $\tau_c(t)$ = Torque resistivo sobre a carga;
- J_1 = Momento de inércia do motor mais engrenagem 1;
- J_2 = Momento de inércia da carga mais engrenagem 2.



Determine a função de transferência $\theta_2(s)/\tau(s)$, sendo dada a relação $D_2/D_1 = N$; e considerando $\tau_c(t) = 0$ (carga livre).

Solução:

Lei de Newton aplicada a dois corpos girantes ($\dot{\theta}_1 = \omega_1$ e $\dot{\theta}_2 = \omega_2$) :

$$\begin{aligned} \tau_{R-1}(t) &= J_1.\ddot{\theta}_1(t) = \tau(t) - B_1.\omega_1(t) - \tau_1(t) \\ \tau_{R-2}(t) &= J_2.\ddot{\theta}_2(t) = \tau_2(t) - B_2.\omega_2(t) - \tau_c(t) \end{aligned}$$

onde:

$\tau_1(t)$ é o torque que a engrenagem 2 aplica sobre a engrenagem 1 e $\tau_2(t)$ é o torque que a engrenagem 1 aplica sobre a engrenagem 2. Estes torque são causados pela mesma força

de contato entre as engrenagens, $F(t)$. Assim escrevemos:

$$\tau_1(t) = F(t).(D_1/2) \quad \text{e} \quad \tau_2(t) = F(t).(D_2/2)$$

Como a velocidade tangencial das engrenagens também é igual tal como a força de contato, temos

$$V_t(t) = \omega_1(t).(D_1/2) \quad \text{e} \quad V_t(t) = \omega_2(t).(D_2/2)$$

logo:

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{D_2}{D_1} = \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} = \frac{\theta_1(t)}{\theta_2(t)} = N$$

Aplicando Transformada de Laplace e considerando carga livre ($\tau_c(t) = 0$) temos as duas equações para os corpos girantes.

$$\begin{aligned} J_1.s^2.\theta_1(s) &= \tau(s) - B_1.s.\theta_1(s) - \tau_1(s) \\ J_2.s^2.\theta_2(s) &= \tau_2(s) - B_2.s.\theta_2(s) \end{aligned}$$

Rearranjando, e utilizando as relações cinemáticas e dinâmicas do par de engrenagens:

$$\begin{aligned} \tau(s) &= (J_1.s^2 + B_1.s).\theta_1(s) + \tau_1(s) = (J_1.s^2 + B_1.s).N.\theta_2(s) + \tau_1(s) \\ \tau_2(s) &= N.\tau_1(s) = (J_2.s^2 + B_2.s).\theta_2(s) \end{aligned}$$

Isolando $\tau_1(t)$ na segunda equação e substituindo na primeira, temos:

$$\tau(s) = (J_1.s^2 + B_1.s).N.\theta_2(s) + \frac{(J_2.s^2 + B_2.s).\theta_2(s)}{N}$$

ou

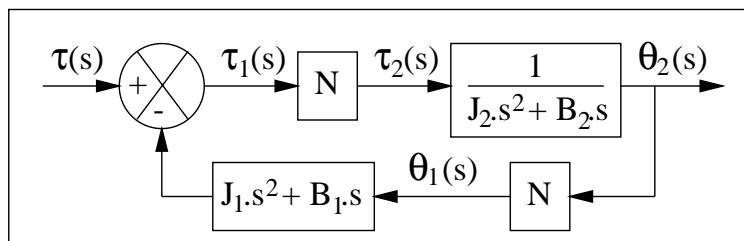
$$\tau(s) = \left[(J_1.N + \frac{J_2}{N}).s^2 + (B_1.N + \frac{B_2}{N}).s \right] \theta_2(s)$$

Portanto, a função de transferência será:

$$G(s) = \frac{\theta_2(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{(J_1.N + J_2/N).s^2 + (B_1.N + B_2/N).s} = \frac{1}{J_{eq}.s^2 + B_{eq}.s}$$

O Diagrama de blocos completo é obtido escrevendo as equações principais de modo conveniente e utilizando as relações cinemáticas e dinâmicas para engrenagens:

$$\begin{aligned} \tau_1(s) &= \tau(s) - (J_1.s^2 + B_1.s).\theta_1(s) \\ \theta_2(s) &= \tau_2(s) \cdot \left[\frac{1}{(J_2.s^2 + B_2.s)} \right] \end{aligned}$$



2.2.3 - Acoplamento entre movimento de translação e rotação

Em problemas de controle de movimento é frequente a conversão do movimento de rotação em movimento de translação e vice-versa. Uma massa pode ter seu movimento controlado através de um motor acoplado a um conjunto mecânico como nos exemplos es-

quematizados nas figuras abaixo.

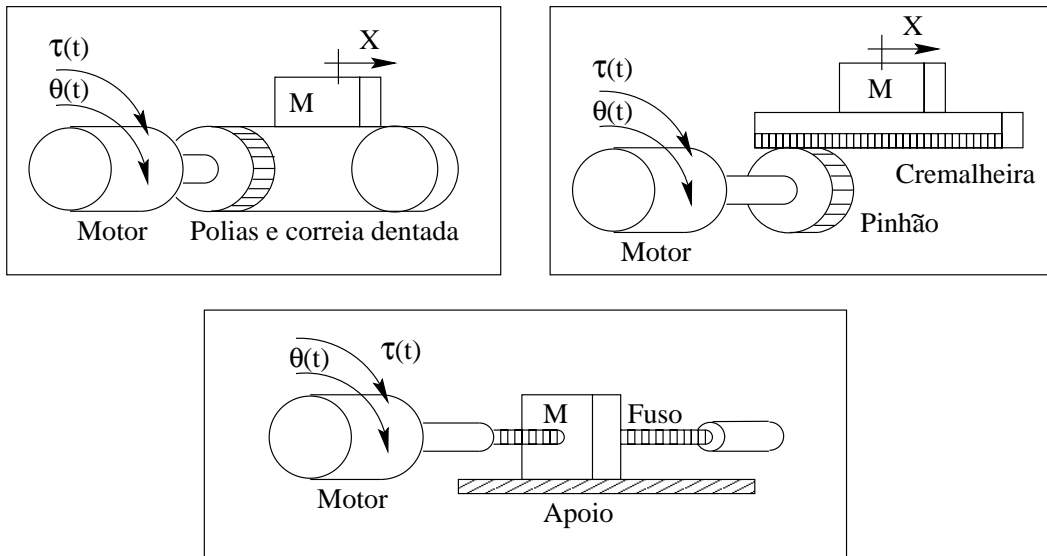


Figura 2.4 - Conjuntos de conversão rotação / translação

Exemplo 2.2.5: Considere o sistema motor, polias e correias dentada, com um corpo preso na correia dentada, sujeito a atrito nos rolamentos das polias, B1 e B2. O motor e polia 1 possuem momento de inércia J_1 , e a polia 2 possui momento de inércia J_2 . Determine a F.T. $= X(s)/\tau(s)$, sendo $\tau(t)$, o torque eletromagnético aplicado no motor, e $X(t)$ o movimento da massa M1 presa na correia.

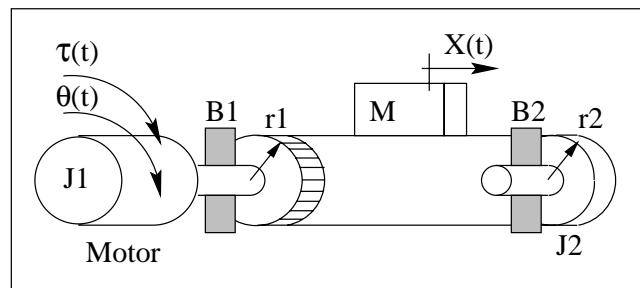
Solução:

Lei de Newton aplicada a massa M:

$$F(t) = M.\ddot{x}(t)$$

Lei de Newton aplicada a polia J2:

$$J_2.\ddot{\theta}_2(t) = F_2(t).r_2 - B_2.\omega_2(t)$$



Lei de Newton aplicada a polia J1:

$$J_1.\ddot{\theta}_1(t) = \tau(t) - F(t).r_1 - F_2(t).r_1 - B_1.\omega_1(t)$$

Precisamos da relação entre $X(t)$, $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ para diminuir número de incógnitas. Considerando $r_1 = r_2 = r$, temos:

$$\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta(t) \text{ e}$$

$$X(t) = r_1.\theta_1(t) = r_2.\theta_2(t) = r.\theta(t)$$

Aplicando Transformada de Laplace para as três equações:

$$F(s) = M.s^2.X(s)$$

$$J_2.s^2.\theta(s) = F_2(s).r - B_2.s.\theta(s)$$

$$J_1.s^2.\theta(s) = \tau(s) - F(s).r - F_2(s).r - B_1.s.\theta(s)$$

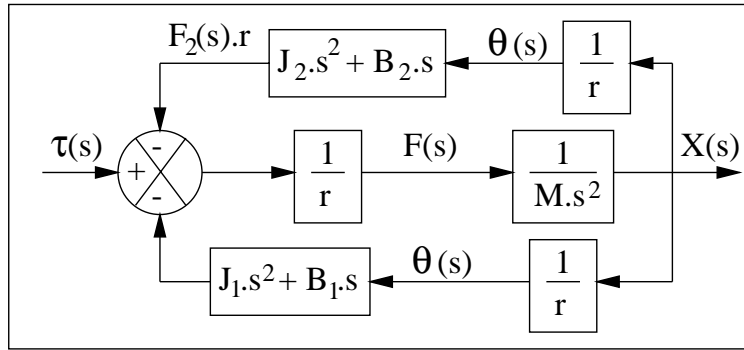
Rearranjando as equações para montagem do diagrama de blocos:

$$X(s) = \frac{F(s)}{M.s^2}$$

$$F_2(s).r = (J_2.s^2 + B_2.s).\theta(s)$$

$$F(s) = \frac{\tau(s) - F_2(s).r - (J_1.s^2 + B_1.s).\theta(s)}{r}$$

Diagrama de blocos do problema:



Aplicando a primeira regra de diagrama de blocos para obter a F.T. única:

$$\frac{X(s)}{\tau(s)} = \frac{\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{M.s^2}}{1 + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{M.s^2} \cdot (J_1.s^2 + B_1.s) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{M.s^2} \cdot (J_2.s^2 + B_2.s)}$$

Multiplicando numerador e denominador por $r.M.s^2$, obtemos a F.T. desejada.

$$G(s) = \frac{X(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{[r.M + (J_1 + J_2)/r].s^2 + [(B_1 + B_2)/r].s} = \frac{1}{J_{eq}.s^2 + B_{eq}.s}$$

2.3 - Sistemas elétricos

Nestes sistemas desejamos conhecer a(s) corrente(s) em um circuito composto dos elementos elétricos, quando sujeitos a tensões externas.

Os elementos elétricos e seus parâmetros são:

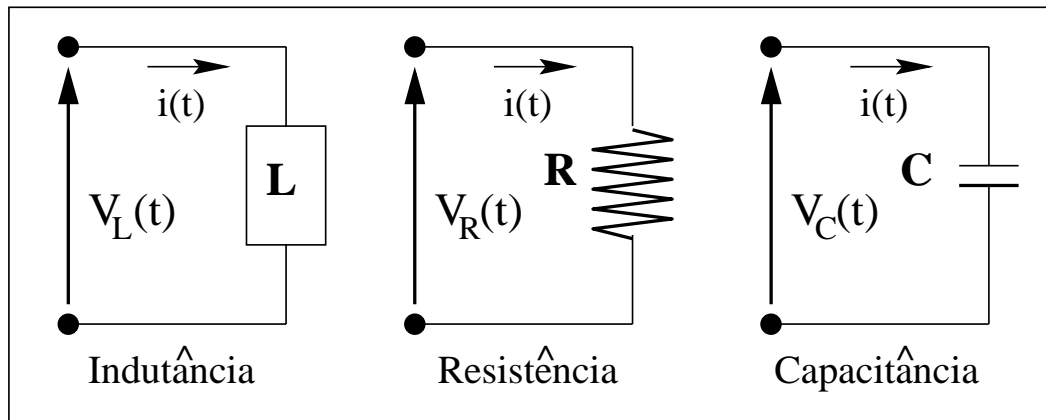


Figura 2.5 - Elementos isolados e tensões atuantes

Equações particulares para os elementos elétricos		
Indutância	Resistância	Capacitância
$V_L(t) = L \cdot \frac{d i(t)}{dt}$	$V_R(t) = R \cdot i(t)$	$V_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)$
L = Indutância	R = Resistância	C = Capacitância

Exemplo 2.3.1: Determine a F.T. = $V_2(s)/V_1(s)$ para o circuito abaixo:

Solução:

Aplicando a Lei de Kirchoff ao circuito:

$$\sum V(t) = 0$$

$$\sum V(t) = V_1 - V_{R_1} - V_{R_2} - V_C = 0$$

Aplicando as equações particulares dos elementos:

$$V_1(t) - R_1.i(t) - R_2.i(t) - \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = 0$$

ou

$$V_1(t) = R_1.i(t) + R_2.i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

A tensão nos terminais de saída, $V_2(t)$ será:

$$V_2(t) = R_2.i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$$

Utilizando transformada de Laplace para as duas equações acima, considerando condições iniciais nulas ($V_1(t) = 0$ e $i(t) = 0$), temos:

$$V_1(s) = R_1.I(s) + R_2.I(s) + \frac{1}{C.s}I(s)$$

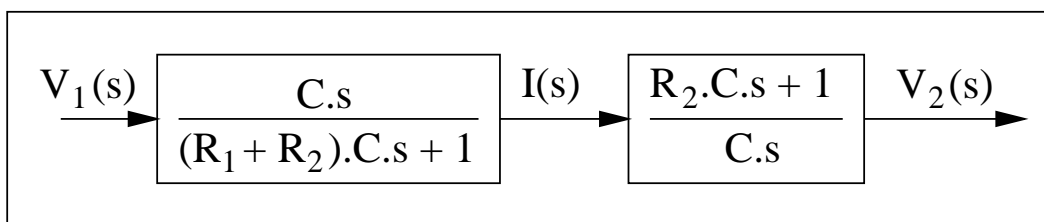
$$V_2(s) = R_2.I(s) + \frac{1}{C.s}I(s)$$

Reescrevendo:

$$I(s) = \left[\frac{C.s}{(R_1 + R_2).C.s + 1} \right].V_1(s)$$

$$V_2(s) = \left[\frac{R_2.C.s + 1}{C.s} \right].I(s)$$

Diagrama de blocos do problema:



A F.T. única será: $G(s) = \frac{R_2.C.s + 1}{(R_1 + R_2).C.s + 1}$

Exemplo 2.3.2: Determine a F.T. = $V_2(s)/V_1(s)$ para o circuito RLC abaixo:

Solução:

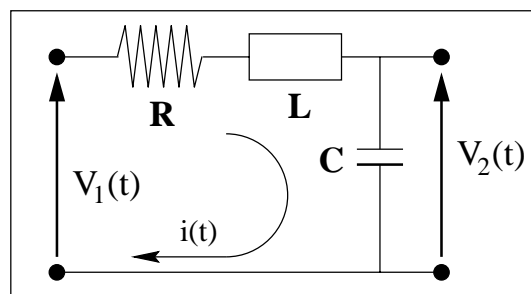
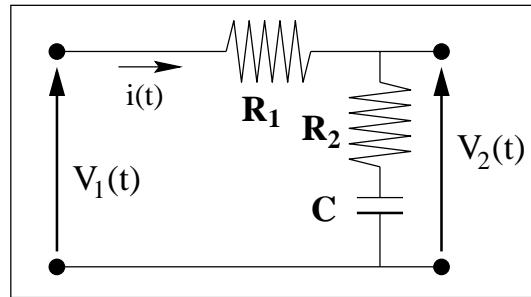
Aplicando a Lei de Kirchoff ao circuito:

$$\sum V(t) = V_1 - V_R - V_L - V_C = 0$$

Aplicando as equações particulares dos elementos:

$$V_1(t) - R.i(t) - L.\frac{di(t)}{dt} - \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = 0$$

ou



$$V_1(t) = R.i(t) + L.\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t)$$

A tensão nos terminais de saída, $V_2(t)$ será:

$$V_2(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t)$$

Utilizando transformada de Laplace nas equações diferenciais:

$$V_1(s) = R.I(s) + L.s.I(s) + \frac{1}{C.s}I(s)$$

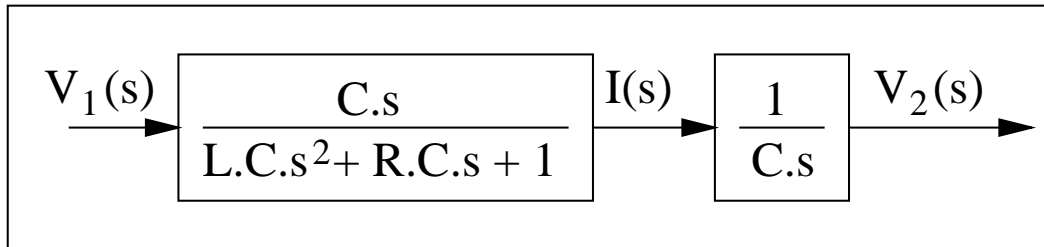
$$V_2(s) = \frac{1}{C.s}I(s)$$

Reescrevendo:

$$I(s) = \left[\frac{C.s}{L.C.s^2 + R.C.s + 1} \right].V_1(s)$$

$$V_2(s) = \frac{1}{C.s}.I(s)$$

Diagrama de blocos do problema:



A F.T. única será:
$$G(s) = \frac{1}{L.C.s^2 + R.C.s + 1}$$

2.4 - Sistemas eletromecânicos

São os sistemas que possuem elementos elétricos e mecânicos funcionando em conjunto, como por exemplo os motores e geradores elétricos. Neste curso estudaremos o funcionamento dos motores de corrente contínua (Motor CC) por serem os motores mais utilizados para controle de posição (servomecanismos). Estudaremos também os potenciômetros pelo fato destes elementos serem capazes de gerar um sinal erro elétrico.

2.4.1 - Princípios de funcionamento básicos

O motor de corrente contínua é um conversor de energia elétrica em energia mecânica. O torque desenvolvido no eixo do rotor é diretamente proporcional ao fluxo magnético no campo e a corrente da armadura.

$$T_m(t) = K_m.\phi.i_a(t)$$

onde:

$$T_m(t) = \text{Torque eletromagnético [N.m]}$$

$$K_m = \text{Constante do motor}$$

$$\phi = \text{Fluxo magnético [Weber]}$$

$$i_a(t) = \text{Corrente na armadura [A]}$$

Além do torque desenvolvido, quando um condutor move-se em um campo magnético, uma tensão é gerada nos terminais deste condutor. Esta tensão, que é proporcional a veloci-

dade do eixo e ao fluxo magnético, se opõe a corrente da armadura (i_a).

A expressão desta tensão, chamada de força contra-eletromotriz, V_b , é:

$$V_b(t) = K_b \cdot \phi \cdot \omega_m(t)$$

onde:

$V_b(t)$ = Força contra-eletromotriz [V]

K_b = Constante de proporcionalidade

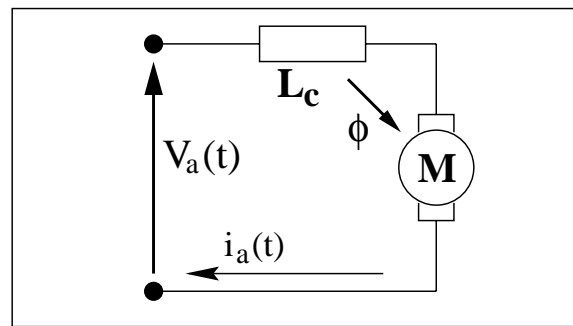
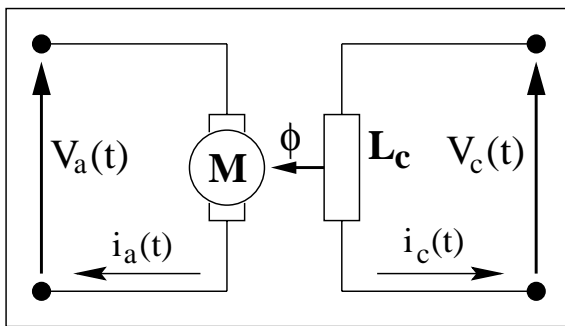
ϕ = Fluxo magnético [Weber]

$\omega_m(t)$ = Rotação do eixo do motor [rd/s]

2.4.2 - Classificação dos motores CC

Os motores CC podem ser classificados em termos do campo magnético: motor CC de campo magnético variável ou de campo magnético constante.

Nos motores CC de campo magnético variável, o campo magnético é produzido por enrolamentos de campo (Indutância L_c) que são conectados a fontes externas, e destacam-se os dois tipos mostrados na figura abaixo:



A) Motor de campo excitado separadamente B) Motor de conexão em série

Os motores CC de campo magnético constante são também conhecidos como motores CC de ímã-permanente (ou PM = permanent-magnet). Neste caso, o campo magnético produzido por um ímã permanente é constante, e permite que as características de torque-rotação do motor sejam praticamente lineares.

2.4.3 - Modelo de motores CC de ímã-permanente

Desenvolveremos o modelo para este tipo de motor através do exemplo a seguir.

Exemplo 2.4.1: Determine a F.T. para o motor CC tendo como variável de entrada $V_a(t)$ (tensão na armadura) e a variável de saída $\theta_m(t)$ (deslocamento angular do motor + carga) sendo dados:

R_a = Resistência da armadura

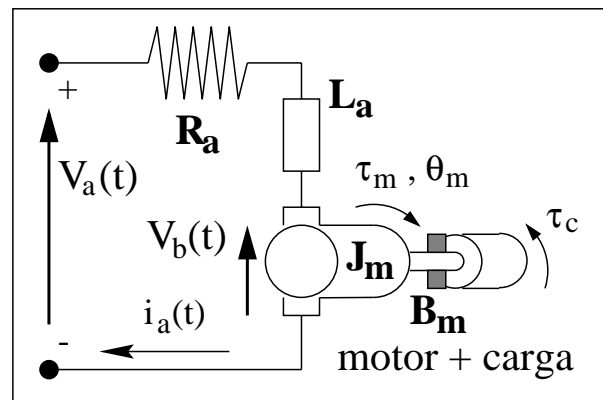
L_a = Indutância da armadura

J_m = Momento de inércia do motor + carga

B_m = Atrito do mancal do motor + carga

K_m, K_b = Constantes do motor

ϕ = fluxo magnético (constante)



Solução:

Começando pela equação do conjunto rotativo motor + carga, tem-se :

$$J_m \cdot \ddot{\theta}_m(t) = \tau_m(t) - B_m \cdot \omega_m(t) - \tau_c(t)$$

onde:

$\tau_m(t)$ = Torque eletromagnético desenvolvido pelo motor.

$\tau_c(t)$ = Torque resistivo da carga

$\omega_m(t)$ = Rotação do conjunto motor + carga

$\ddot{\theta}_m(t)$ = Aceleração angular do conjunto motor + carga

O torque eletromagnético desenvolvido pelo motor é proporcional ao fluxo magnético e à corrente da armadura:

$$\tau_m(t) = K_m \cdot \phi \cdot i_a(t)$$

Como o fluxo ϕ é constante, escrevemos a equação com uma única constante K_i :

$$\tau_m(t) = K_i \cdot i_a(t)$$

No circuito elétrico da armadura, a tensão aplicada na armadura, $V_a(t)$, é dissipada na indutância, na resistência, e também para vencer a força contra-eletromotriz:

$$V_a(t) = L_a \cdot \frac{di_a(t)}{dt} + R_a \cdot i_a(t) + V_b(t)$$

Por último a força contra-eletromotriz é proporcional ao fluxo ϕ e à rotação:

$$V_b(t) = K_b \cdot \phi \cdot \omega_m(t)$$

Como o fluxo magnético é constante usaremos a constante K_B :

$$V_b(t) = K_B \cdot \omega_m(t)$$

Utilizando a expressão de V_b na equação do circuito da armadura, e aplicando a transformada de Laplace com condições iniciais nulas, teremos três equações que modelam o motor + carga :

$$\tau_m(s) = K_i \cdot I(s)$$

$$J_m \cdot s^2 \cdot \theta_m(s) = \tau_m(s) - B_m \cdot s \cdot \theta_m(s) - \tau_c(t)$$

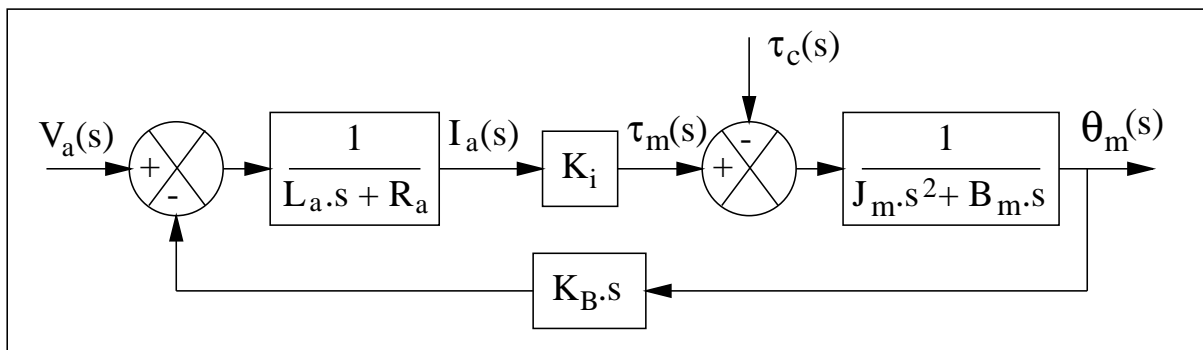
$$V_a(s) = L_a \cdot s \cdot I_a(s) + R_a \cdot I_a(s) + K_B \cdot s \cdot \theta_m(s)$$

Reescrevendo as duas últimas equações para montar o diagrama de blocos:

$$\theta_m(s) = \left(\frac{1}{J_m \cdot s^2 + B_m \cdot s} \right) \cdot [\tau_m(s) - \tau_c(s)]$$

$$I_a(s) = \left(\frac{1}{L_a \cdot s + R_a} \right) \cdot [V_a(s) - K_B \cdot s \cdot \theta_m(s)]$$

Tem-se o diagrama de blocos:



Pode-se observar que τ_c aparece como distúrbio (ou uma segunda entrada) no modelo. Para obter a função de transferência do motor sem carga fazemos $\tau_c = 0$, e aplicamos a regra dada no estudo de diagramas de blocos:

A F.T. única será:

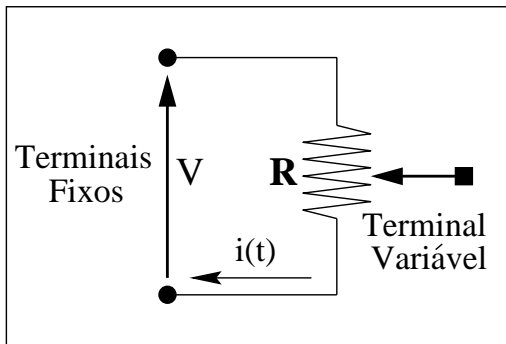
$$G(s) = \frac{K_i}{J_m \cdot L_a \cdot s^3 + (R_a \cdot J_m + B_m \cdot L_a) \cdot s^2 + (R_a \cdot B_m + K_B \cdot K_i) \cdot s}$$

Considerando a indutância desprezível, $L_a \equiv 0$, obtemos a função de transferência de segunda ordem:

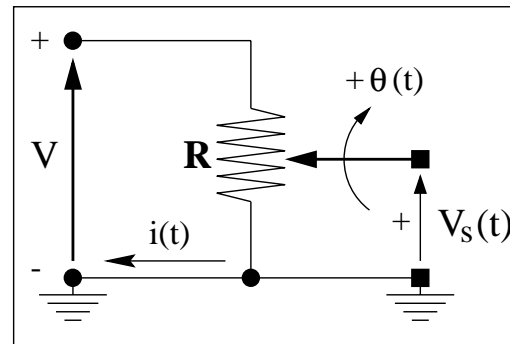
$$G(s) = \frac{K_i}{R_a \cdot J_m \cdot s^2 + (R_a \cdot B_m + K_B \cdot K_i) \cdot s}$$

2.4.4 - Potenciômetros

Um potenciômetro converte movimento de rotação ou translação em sinal elétrico a partir de uma fonte de tensão. Aplicando esta fonte sobre os terminais fixos do potenciômetro, pode-se medir uma tensão de saída que é proporcional ao deslocamento angular ou linear do elemento mecânico do potenciômetro.



Representação do circuito do potenciômetro



Potenciômetro usado como indicador de posição

A tensão de saída, $V_s(t)$, será proporcional (potenciômetros lineares) a posição do eixo, $\theta(t)$, no caso de movimento rotativo: $V_s(t) = K_s \cdot \theta(t)$

Para um potenciômetro de N voltas, o deslocamento total do terminal variável é $2\pi N$ [rd]. Então a constante K_s será, $K_s = V/2 \cdot \pi \cdot N$ [V/rd], onde V é a tensão constante aplicada sobre os terminais fixos.

2.4.5 - Gerador de sinal erro elétrico

Uma montagem com dois potenciômetros em paralelo permite comparar duas posições de eixos em locais distintos, conforme esquema abaixo:

Equações:

$$V_{s-1} = K_s \cdot \theta_1$$

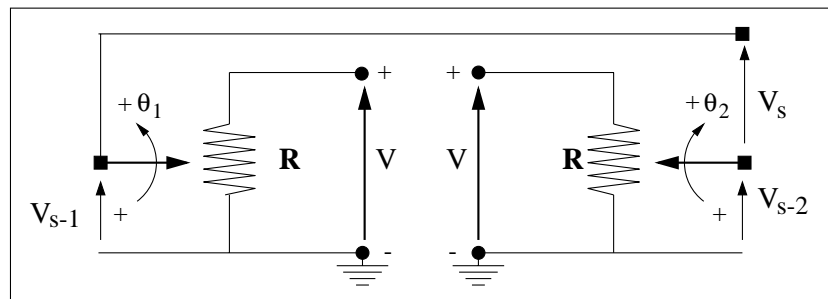
$$V_{s-2} = K_s \cdot \theta_2$$

θ_1 = Posição de referência

θ_2 = Posição de saída

$$V_s(t) = (V_{s-1} - V_{s-2})$$

$$V_s(t) = K_s \cdot (\theta_1 - \theta_2)$$



Esta é a implementação física de um gerador de sinal erro elétrico. Os potenciômetros em paralelo são então utilizados para comparar a posição que se deseja controlar (posição de saída) com a posição de referência. Este arranjo gera um sinal erro que é tratado pelo controlador.

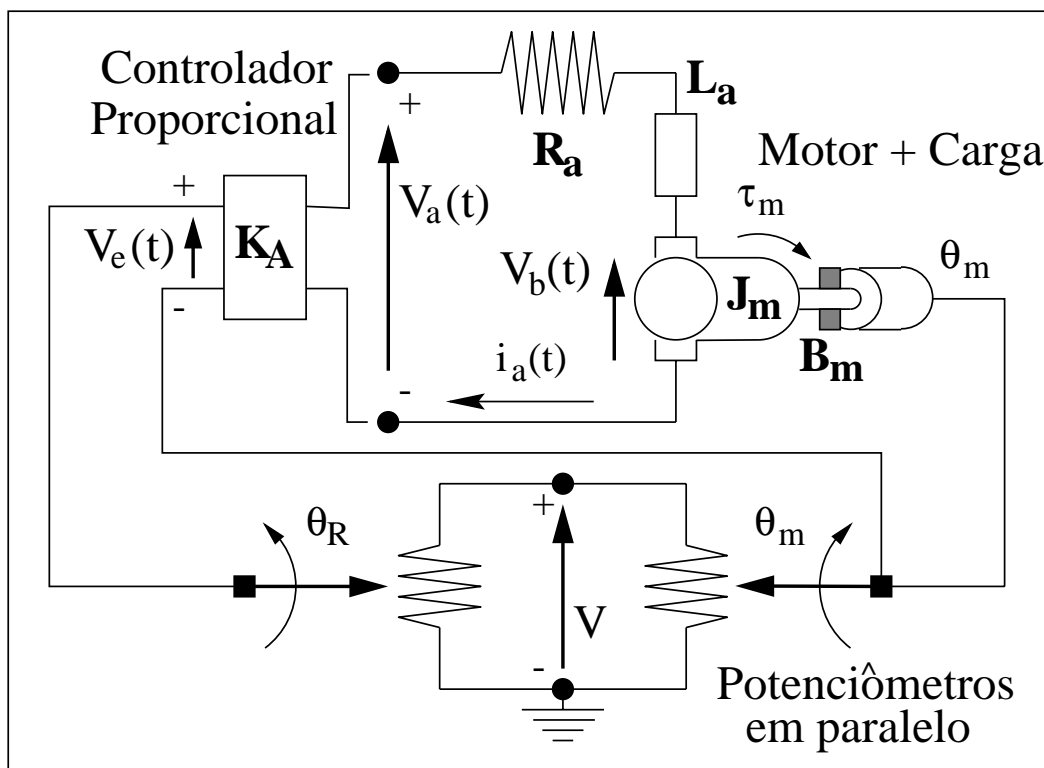
2.4.6 - Servomecanismo simples com Controle Proporcional

Utilizando um motor CC de ímã permanente, adicionando um gerador de sinal erro (dois potenciômetros em paralelo) e um amplificador de potência de ganho ajustável, K , que faz o papel do controlador proporcional podemos construir um servomecanismo simples.

O amplificador de potência é necessário também para aumentar o valor do sinal erro, que normalmente é pequeno e alimentar o motor com a tensão da armadura.

Desenvolveremos o exemplo a seguir para modelar este servomecanismo.

Exemplo 2.4.2: Determine a F.T. para o servomecanismo abaixo, sendo o sinal de entrada θ_R , a posição do potenciômetro de referência, e o sinal de saída θ_m , a posição do eixo do motor + carga.



Solução:

Para este exemplo podemos utilizar a função de transferência obtida no modelo do motor, ou seja, a relação entre deslocamento angular, θ_m , e a tensão aplicada na armadura, V_a , considerando a indutância L_a desprezível:

$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{V_a(s)} = \frac{K_i}{R_a \cdot J_m \cdot s^2 + (R_a \cdot B_m + K_B \cdot K_i) \cdot s}$$

Para completar o diagrama de blocos do servomecanismo utilizaremos as equações para os potenciômetros em paralelo (detector de erro) e para o controlador (amplificador) proporcional:

$$V_e = K_s \cdot (\theta_R - \theta_m)$$

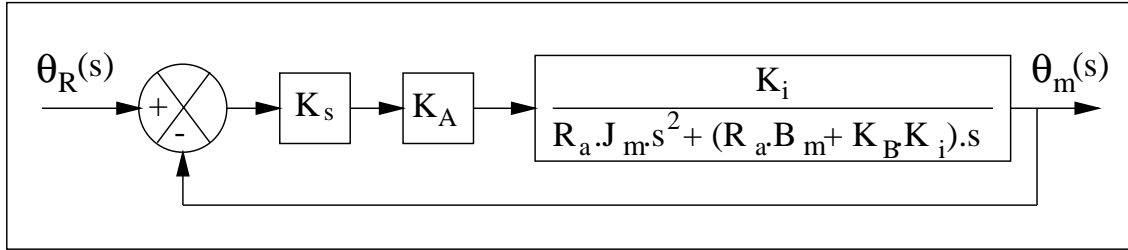
$$V_a = K_A \cdot V_e$$

sendo:

K_s = Constante do detector de erro

K_A = Ganho proporcional do controlador (ajustável)

O diagrama de blocos do servomecanismo pode agora ser facilmente montado:



A função de transferência procurada será obtida aplicando a regra de redução de diagramas de blocos:

$$G(s) = \frac{\theta_m(s)}{\theta_R(s)} = \frac{K_s \cdot K_A \cdot K_i}{R_a \cdot J_m \cdot s^2 + (R_a \cdot B_m + K_B \cdot K_i) \cdot s + K_s \cdot K_A \cdot K_i}$$

No capítulo 3 estudaremos o comportamento deste tipo de servomecanismo analisando a influência dos parâmetros sobre a resposta no domínio do tempo, e no capítulo 4 estudaremos a implementação de outros controles além do proporcional.

2.5 - Sistemas térmicos

Neste tipo de sistema deve-se escolher volumes de controle apropriados e aplicar a Lei da conservação da energia para cada volume de controle. As trocas de calor são consideradas utilizando-se a Lei de Fourier e/ou a equação da condução de calor, e em alguns casos deve-se também considerar trabalho de eixo sobre o volume de controle. Como anteriormente, faremos um exemplo para analisar um sistema térmico.

Exemplo 2.5.1: Fazer o diagrama de blocos para o sistema térmico esquematizado, composto de um reservatório contendo um fluido em escoamento e uma resistência para aquecimento deste fluido. A variável de saída é $T(s)$, a temperatura do fluido na saída do reservatório, e a variável de entrada é $T_c(s)$, a temperatura de controle fixada no controlador proporcional, considere os seguintes parâmetros e variáveis:

ρ = massa específica do fluido

V = volume do reservatório

c_v = calor específico a volume constante do fluido

c_p = calor específico a pressão constante do fluido

\dot{m} = vazão em massa de fluido (constante)

m_R = massa da resistência de aquecimento

c_R = calor específico do material da resistência

K = ganho do controlador proporcional

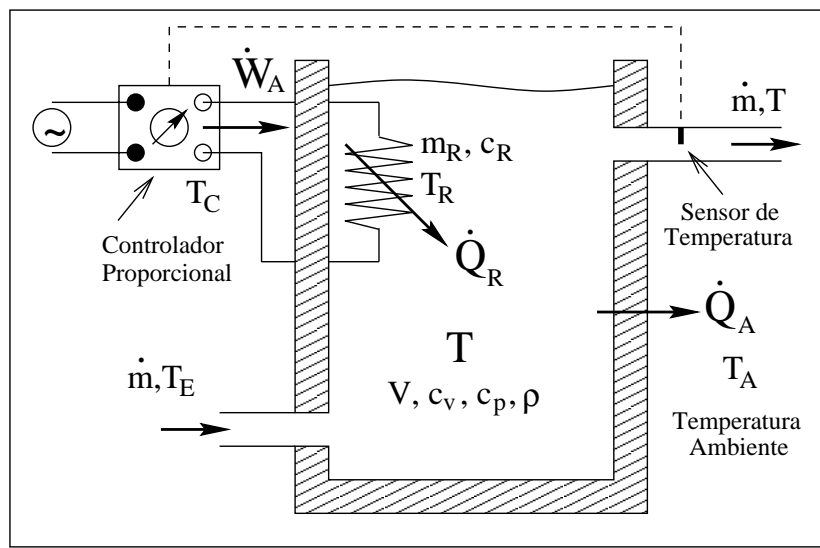
UA = coeficiente global de transferência de calor resistência - fluido

UA_E = coeficiente global de transferência de calor fluido - ambiente

T_E = Temperatura do fluido na entrada do reservatório

T_R = Temperatura da resistência

T_A = Temperatura do ambiente



Solução:

Primeira lei da termodinâmica para volume de controle reservatório-fluido, considerando a transferência de calor da resistência para o fluido, \dot{Q}_R , a transferência de calor do fluido para o ambiente, \dot{Q}_A e os fluxos de entalpia do fluido na entrada e na saída:

$$\rho \cdot V \cdot c_v \cdot \frac{dT}{dt} = \dot{Q}_R - \dot{Q}_A + \dot{m} \cdot c_p \cdot T_E - \dot{m} \cdot c_p \cdot T$$

Primeira lei da termodinâmica para volume de controle resistência, considerando a potência elétrica de aquecimento, \dot{W}_A , proporcional a diferença de temperatura $(T_c - T)$ e a transferência de calor da resistência para o fluido, \dot{Q}_R :

$$m_R \cdot c_R \cdot \frac{dT_R}{dt} = K \cdot (T_c - T) - \dot{Q}_R$$

Utilizando os coeficientes de transferência de calor temos:

$$\rho \cdot V \cdot c_v \cdot \frac{dT}{dt} = UA \cdot (T_R - T) - UA_E \cdot (T - T_A) + \dot{m} \cdot c_p \cdot (T_E - T)$$

$$m_R \cdot c_R \cdot \frac{dT_R}{dt} = K \cdot (T_c - T) - UA \cdot (T_R - T)$$

Nestas duas equações as temperaturas são dadas em graus Kelvin. Para melhorar a análise deste tipo de sistema é interessante trabalhar com uma temperatura diferencial, que é obtida subtraindo a temperatura real por um valor fixo, por exemplo, $T_f = 293,15 \text{ K} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$:

$$\begin{aligned} \theta &= T - T_f \\ \theta_R &= T_R - T_f \\ \theta_c &= T_c - T_f \\ \theta_E &= T_E - T_f \\ \theta_A &= T_A - T_f \end{aligned}$$

Usando transformada de Laplace e rearranjando os termos, as duas equações ficam:

$$[\rho \cdot V \cdot c_v \cdot s + (UA + UA_E + \dot{m} \cdot c_p)] \cdot \theta(s) = UA \cdot \theta_R(s) + UA_E \cdot \theta_A(s) + \dot{m} \cdot c_p \cdot \theta_E(s)$$

$$(m_R \cdot c_R \cdot s + UA) \cdot \theta_R(s) = K \cdot [\theta_c(s) - \theta(s)] + UA \cdot \theta(s)$$

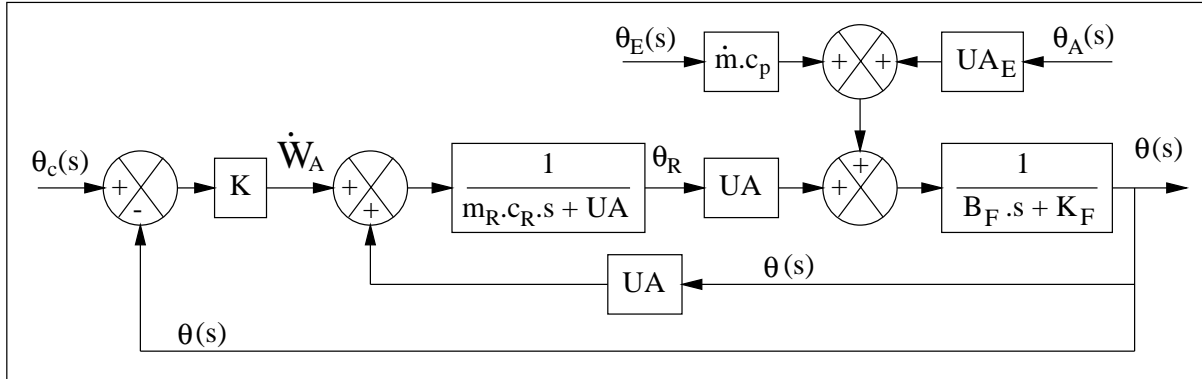
Reescrevendo as equações para montagem do diagrama de blocos tem-se (omitindo o "s"):

$$\theta = \frac{1}{[\rho \cdot V \cdot c_v \cdot s + (UA + UA_E + \dot{m} \cdot c_p)]} \cdot (UA \cdot \theta_R + UA_E \cdot \theta_A + \dot{m} \cdot c_p \cdot \theta_E)$$

$$\theta_R = \frac{1}{(m_R \cdot c_R \cdot s + UA)} \cdot [K \cdot (\theta_c - \theta) + UA \cdot \theta]$$

Neste caso as temperaturas θ_E e θ_A , ou seja, a temperatura de entrada do fluido no reservatório e a temperatura ambiente funcionam como distúrbios quando se pretende controlar a temperatura de saída do fluido, θ .

Utilizando: $B_F = \rho \cdot V \cdot c_v$, $K_F = (UA + UA_E + \dot{m} \cdot c_p)$, pode-se montar o seguinte diagrama de blocos do sistema:



Se a temperatura ambiente, T_A , e a temperatura de entrada do fluido no reservatório, T_E , se mantiverem constante em 20°C , isto implicará que os valores de θ_A e θ_E serão iguais a zero, ou seja, não haverá distúrbio sobre o sistema modelado.

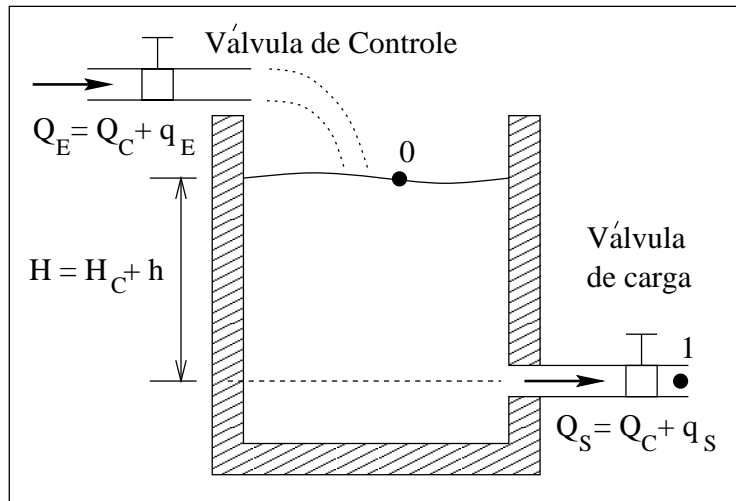
Neste caso poderemos obter uma função de transferência, $\theta(s)/\theta_c(s)$, utilizando a regra para redução de diagramas de blocos:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\theta_c(s)} = \frac{K \cdot UA}{(m_R \cdot c_R \cdot s + UA) \cdot (B_F \cdot s + K_F) - (UA)^2 + K \cdot UA}$$

2.6 - Sistemas hidráulicos

Considere um sistema hidráulico composto de duas válvulas e um tanque conforme figura ao lado, onde desejamos, por ex., controlar a vazão de líquido que sai do tanque.

Iniciamos o modelo matemático do sistema aplicando a equação de Bernoulli entre os pontos 0 e 1, na superfície livre do líquido no tanque e na saída da tubulação de carga:



$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{V_0^2}{2g} + Z_0 = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + Z_1 + \Delta h_{0-1}$$

Nestas condições temos: $p_0 = p_1 = p_{atm}$; $V_0 = 0$; $Z_0 = H$; $Z_1 = 0$.

Considerando a perda de energia proporcional à energia cinética na saída, ou seja :

$$\Delta h_{0-1} = C_1 \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot g}$$

obtemos a expressão não linear para H:

$$H = C_2 \cdot \frac{V_1^2}{2 \cdot g}$$

$$\text{Lembrando que: } V_1 = \frac{4 \cdot Q_S}{\pi \cdot D_S^2}$$

simplificamos a expressão para: $H = C_3 \cdot Q_S^2$

Podemos linearizar esta expressão utilizando a expansão de Taylor em torno da condição nominal (H_C, Q_C),

$$H - H_C = \left. \frac{dH}{dQ_S} \right|_{Q_S=Q_C} \cdot (Q_S - Q_C)$$

e aplicar em casos onde a variação de H e Q_S não for acentuada:

$$h = 2 \cdot C_3 \cdot Q_C \cdot (Q_S - Q_C) = 2 \cdot C_3 \cdot Q_C \cdot q_S$$

Na condição nominal temos, $H_C = C_3 \cdot Q_C^2$, logo:

$$h = 2 \cdot \frac{H_C}{Q_C} \cdot q_S \quad \text{ou} \quad h = R \cdot q_S$$

Para completar utilizamos a equação da conservação da massa (continuidade), no volume de controle do tanque, cuja área transversal é constante e igual a A:

$$A \cdot \frac{dh}{dt} = q_E - q_S$$

Utilizando a expressão para h obtida anteriormente:

$$A \cdot \frac{dh}{dt} + \frac{h}{R} = q_E$$

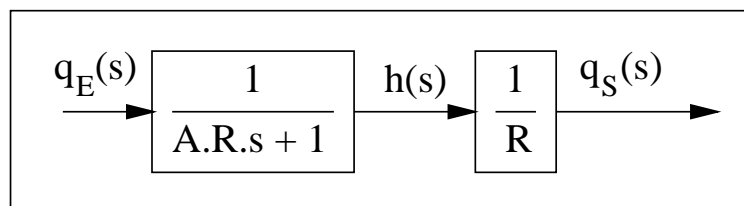
Com a transformada de Laplace, temos:

$$A \cdot s \cdot h(s) + \frac{h(s)}{R} = q_E(s)$$

ou

$$\frac{h(s)}{q_E(s)} = \frac{R}{A \cdot R \cdot s + 1}$$

Podemos montar o seguinte diagrama diagrama de blocos:



Capítulo 3 - Análise da Resposta dos Sistemas

3.1 - Introdução

Na prática o sinal de entrada em um sistema não é conhecido a priori; apenas em alguns casos especiais o sinal de entrada, aqui chamado de referência, é conhecido e definido matematicamente.

Na análise e projeto de sistemas de controle devemos ter uma base para comparar o desempenho e a resposta de vários tipos de sistemas de controle. Esta base pode ser obtida especificando-se os sinais de teste de entrada particulares.

3.2 - Sinais de teste típicos

Os sinais de teste típicos são: função degrau, função impulso, função rampa, função senoidal e outras. Estes sinais são funções simples no tempo e podem ser combinados linearmente para obter a resposta de sistemas a entradas mais complexas.

3.3 - Definições

3.3.1 - Resposta transitória e estacionária

A resposta no tempo de um sistema consiste em duas partes: a resposta transitória e a resposta estacionária. Transitória é a parte da resposta do sistema do estado inicial ($t=0$) até o estado considerado final, e a parte estacionária é a saída ou resposta do sistema quando $t \rightarrow \infty$.

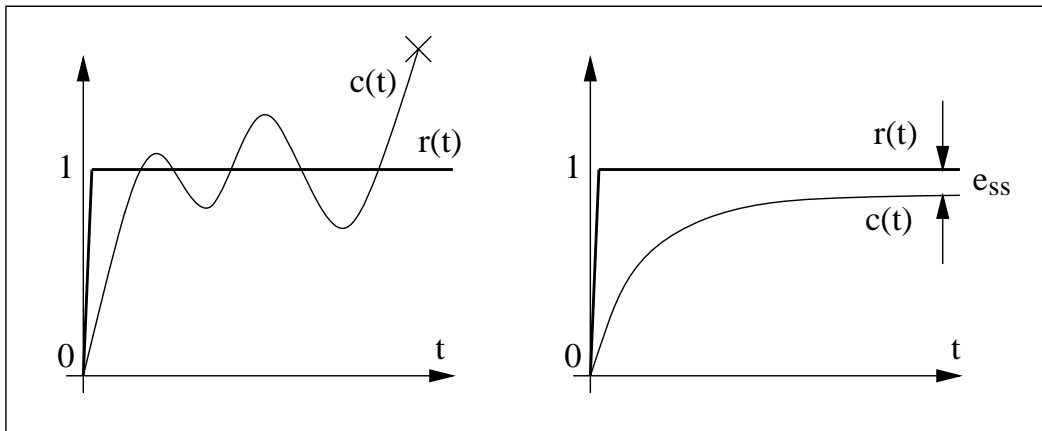
3.3.2 - Estabilidade absoluta e erro estacionário

Um sistema de controle linear não possui estabilidade absoluta, é dito um sistema instável, se a saída oscila indefinidamente ou se a saída diverge (tende a ∞); quando é submetido a uma variação na entrada ou a um distúrbio externo.

A resposta transitória de um sistema de controle real pode mostrar oscilações amortecidas antes de ir a um estado estacionário ou demorar a atingir seu estado estacionário. Se a resposta de um sistema no estado estacionário não é igual a entrada, diz-se que o sistema apresenta erro estacionário, e_{ss} .

O erro estacionário pode ser determinado utilizando o teorema do valor final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s.F(s)$$

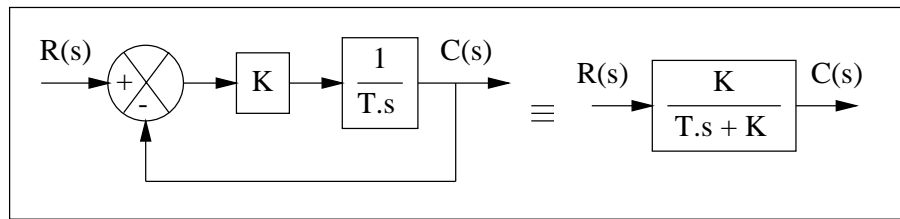


Sistema instável

Erro estacionário e_{ss}

3.4 - Análise de sistemas de primeira ordem

Considere o diagrama de blocos abaixo e a função de transferência equivalente:



3.5 - Análise de Sistemas de segunda ordem