

**ANÁLISE TÉRMICA E ESTRUTURAL  
VIA SIMULAÇÃO NUMÉRICA**

**PROF. JOSÉ V. C. VARGAS**

## **ANÁLISE ESTRUTURAL E TÉRMICA PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

### **EMENTA:**

- 1 – Motivação e conceitos fundamentais;
- 2 – O problema unidimensional;
- 3 – Os problemas 2-D e 3-D: o código FEAP;
- 4 – Exemplos de condução de calor;
- 5 – Exemplos de elasticidade;
- 6 – Projeto Individual;

## 1 – MOTIVAÇÃO E CONCEITOS FUNDAMENTAIS

- Experimentos validam e delimitam as várias aproximações das equações governantes (túnel de vento, medições temperatura e deslocamentos);
- Por que Métodos Numéricos?  
Ex.: Projetos de aviões e outros as medições são inviáveis economicamente:
  - No túnel de vento - limita-se a números de Reynolds 1 a 2 ordens de magnitude a menos do que o real, além de completar teoria e experimento.
  - Permite a variação/eliminação de termos específicos do equacionamento (novos horizontes de exploração teórica).
- Vantagens:
  - Tempo de projeto reduzido.
  - Simula condições impossíveis em experimentos.
  - Proporciona informações mais detalhadas e compreensíveis.
  - Viabiliza a otimização.
- Computadores mais rápidos e com memória maior.  
Processamentos:
  - escalar (cálculos sequenciais somente)
  - vetorial (cálculos sequenciais e/ou paralelos-supercomputadores)

### MÉTODOS NUMÉRICOS (ou COMPUTACIONAIS):

#### i) Locais:

- Dif. Finitas;
- Elem. Finitos;
- Vol. Finitos;
- Elem. Contorno;

Discretização: Processo de conversão das equações contínuas em um sistema de equações algébricas.

#### ii) Globais:

Variáveis dependentes – amplitudes com frequências diferentes – análise de Fourier.

### ERRO:

Associado às aproximações para dif. exatas, porém pode ser reduzido com refinamento da malha se as eq. discretas reproduzem eq. contínuas (consistência).

## DIFERENÇA ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS LOCAIS E GLOBAIS:

A utilização do cálculo numérico para resolução de equações diferenciais parciais requer fundamentalmente aproximações das derivadas nas equações por discretizações. Há várias formas de se realizar essa tarefa, que estão em constante aprimoramento.

Uma importante característica da maioria das formas de discretização propostas para as derivadas é que para um determinado ponto numa malha que aproxima o domínio original contínuo, a derivada de uma grandeza física qualquer (incógnita do problema) nesse ponto depende de como essa função se comporta em sua vizinhança apenas. Essa formas de discretização definem os assim chamados MÉTODOS LOCAIS. Enfim, os métodos locais usam funções base (e.g., funções de forma, funções de interpolação) que assumem valores diferentes de zero somente em uma região muito próxima a um ponto de interesse na malha (a vizinhança).

Diferentemente, nos MÉTODOS GLOBAIS (e.g., espectrais), para qualquer ponto da malha que discretiza o domínio original contínuo, o cálculo aproximado da derivada de uma grandeza física (incógnita do problema) utiliza informação da malha inteira. Aqui se caracteriza um aspecto muito importante, principalmente na precisão inerente ao método, pois utiliza mais informações do domínio da função estudada que os métodos locais. Enfim, os métodos globais usam funções base que assumem valores diferentes de zero em todo o domínio do problema.

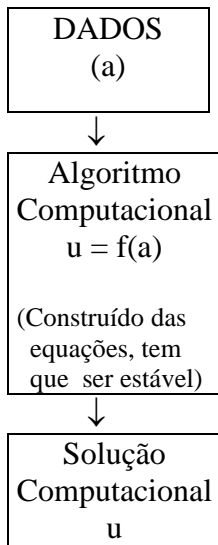
Por essas razões, os métodos espectrais apresentam alta precisão, com a assim chamada “convergência exponencial”, se constituindo na mais rápida possível, quando a solução for suave, i.e.,  $f(x) \in C^1$ . No entanto, não há resultados conhecidos com métodos espectrais para domínios tridimensionais que capturem a ocorrência do fenômeno do choque.

Os métodos espectrais são computacionalmente mais baratos do que métodos de elementos finitos. No entanto, perdem precisão na ocorrência de geometrias complexas e de descontinuidades.

## NATUREZA DE UM PROBLEMA BEM POSTO

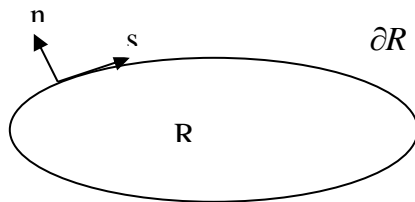
- i)  $\exists$  solução;
- ii) única;
- iii) depende continuamente dos dados auxiliares (condições iniciais e condições de contorno);

## ESQUEMA COMPUTACIONAL

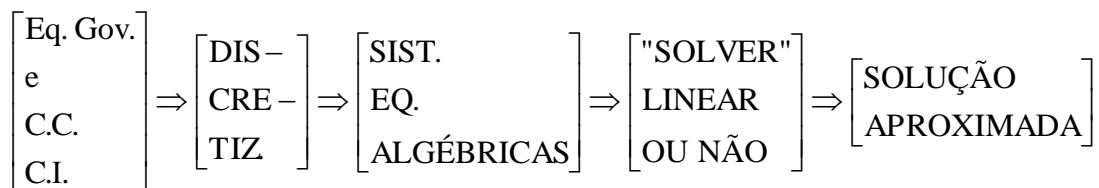


Quando as C.C. são nas derivadas, gera-se um erro de aproximação da diferencial.

## CONDIÇÕES DE CONTORNO



- i) Dirichlet:  $u = f$  em  $\partial R$ ;
- ii) Neumann:  $\partial u / \partial n = f$  ou  $\partial u / \partial s = g$  em  $\partial R$ ;
- iii) Mista ou Robin:  $\partial u / \partial n + Ku = f$

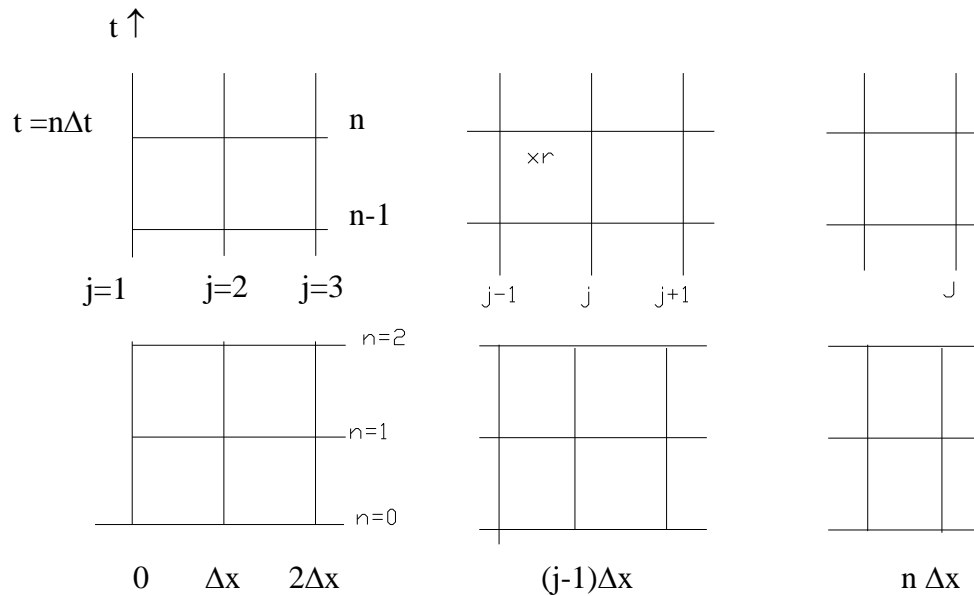


DIFERENTES MANEIRAS DE DISCRETIZAR  $\Rightarrow$  DIFERENTES MÉTODOS COMPUTACIONAIS

Regime Transiente: Processo de discretização pode ser tratado como sistema de EDO'S no tempo.

Erro maior introduzido na discretização.

MALHA:



- Valor preciso, solução aproximada entre nós não é óbvio.
- Espera-se variação suave.
- $(x_r, t_r) \rightarrow$  Interpolação de 4 valores ao redor (automático em elementos finitos).

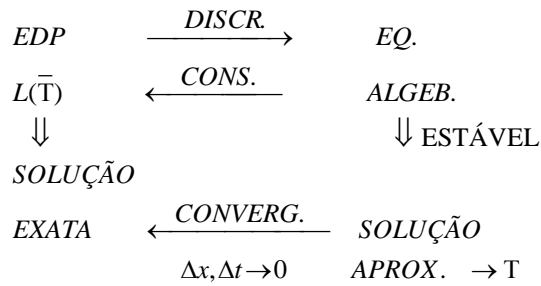
CONVERGÊNCIA :

Qual a garantia de que a solução computacional é próxima da exata das EDP's?

Se  $\Delta t, \Delta x, \text{etc} \rightarrow 0 \Rightarrow$  coincide

Teorema de Equivalência de LAX:

CONSISTÊNCIA + ESTABILIDADE = CONVERGÊNCIA



$$T_j^n \rightarrow \bar{T}(x_j, t_n) \text{ quando } \Delta x, \Delta t \rightarrow 0$$

Obs.: Para problemas não lineares, o Teorema de Lax é condição necessária, mas nem sempre suficiente. Serve para excluir discretizações inconsistentes e algoritmos instáveis.

CONSISTÊNCIA:

Série de Taylor em torno de (j, n).  
 $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow$  Eq. Originais.

ESTABILIDADE:

- Matricial;
  - Von Neumann;
- Erro “Round-off”:  $\xi_j^n = T_j^n - {}^*T_j^n$ ,

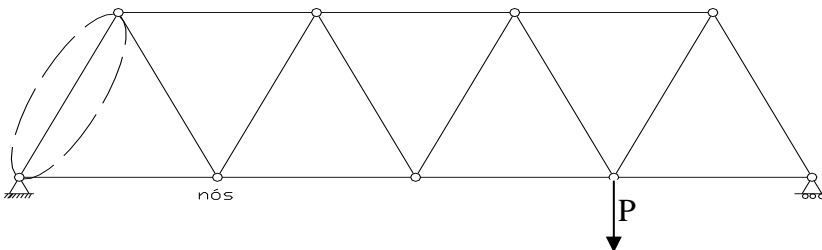
onde  $T_j^n$  é a solução numérica real e  ${}^*T_j^n$  é a solução computada com erro de “Round-off”.

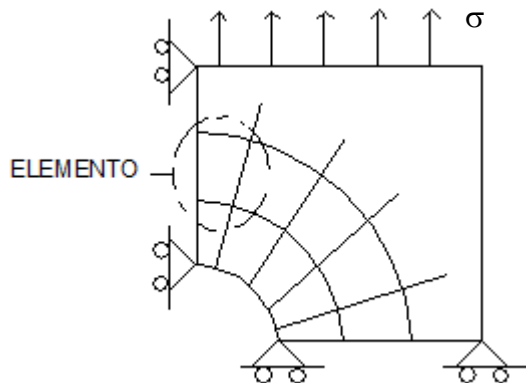
PRECISÃO DA SOLUÇÃO APROXIMADA:

- 1) Comparação com solução exata;
- 2) Refinamento malha
- 3) Comparação com resultados experimentais

O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS (MEF):

Em geral, divide o sistema em componentes menores (elementos)  $\rightarrow$  Discretização.





TEORIAS:

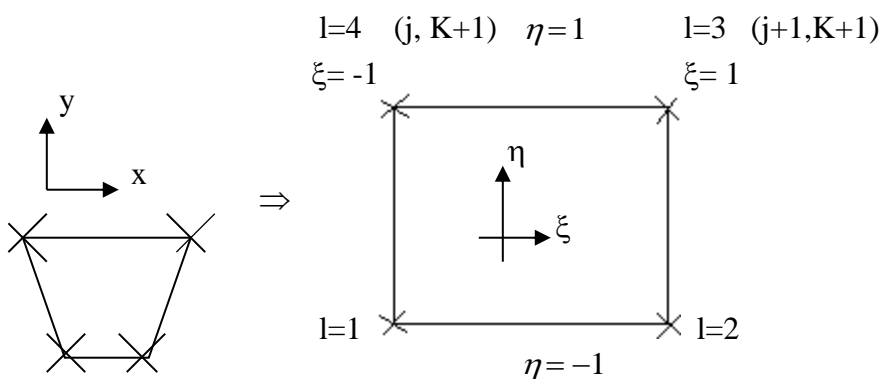
- Elasticidade → Deslocamentos
- Vigas → Deslocamentos, Rotações
- Mecânica dos Flúídos → Velocidades, Pressões
- Condução de Calor (transferência de calor) → Temperaturas
- Transferência de massa (difusão) → Concentrações

INTERPOLAÇÃO DENTRO DOS ELEMENTOS:

Assume-se que a solução nos nós pode ser interpolada suavemente.

Ex.:

Em 2-D.



$$u = \sum_{l=1}^4 d_l N_l(\xi, \eta)$$

onde



$$N_i(\xi, \eta) = 0,25(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)$$

Pode-se mostrar que:

$$N_a(\xi_b, \eta_b) = \delta_{ab} \quad = 1 \quad , a=b \\ = 0 \quad , a \neq b \\ \text{com } 1 \leq a, b \leq 4$$

Monta-se então o sistema de equações algébricas global:

Linear:

$$K d = F^{ext}$$

$K \rightarrow$  Matriz rigidez (conhecida)

$d \rightarrow$  Vetor de incógnitas (todos os graus de liberdade nos nós)

$F \rightarrow$  Vetor força externo (conhecido)

Não-Linear:

Defina-se o vetor força interno  $\rightarrow F^{int} = K d \Rightarrow F^{int} = F^{ext}$ , para o caso não linear

$\rightarrow F^{int} = N(d)$ , onde  $N$  é uma função não linear de  $d$ .

COMO GERAR AS EQUAÇÕES E.F.?

3 Métodos:

- 1) Direto (Problema físico)
- 2) Métodos Variacionais
- 3) Método dos pesos residuais

## 2 – O PROBLEMA UNIDIMENSIONAL

EDO:

$$u_{,xx} + f = 0, \quad x \in [0,1]$$

$$u_{,xx} = \frac{d^2 u}{dx^2}$$

$$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ (função prescrita)}$$

$$f \rightarrow \text{suave} \quad f \in C^1[0,1] \text{ pelo menos}$$

$$\text{Seja } \begin{aligned} \Omega &= ]0,1[ \text{ (aberto)} \\ \bar{\Omega} &= [0,1] \text{ (fechado)} \end{aligned}$$

Forma forte do problema de valor de contorno (PVC):

$$(S) \begin{cases} \text{Dado } f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ bem como } g, h, \text{ encontre } u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ tal que} \\ u_{,xx} + f = 0 \quad \text{em } \Omega \\ u(1) = g \\ -u_{,x}(0) = h \end{cases}$$

Dif. Finitas  $\rightarrow$  aplica-se aproximação numérica diretamente a (S).

El. Finitos  $\rightarrow$  associa-se uma forma fraca (variacional).

Solução Exata:

$$u(x) = g + (1-x)h + \int_x^1 \left\{ \int_0^y f(z) dz \right\} dy$$

### FORMA FRACA (VARIACIONAL) DO PVC:

Sejam duas classes de funções

1) Soluções candidatas  $u \in S$

exige-se:  $u(1)=g$

suavidade

$$\int_0^1 (u_{,x})^2 dx < \infty \Rightarrow \begin{aligned} u_{,x} &\text{ não diverge em } \Omega \\ u_{,x} &\text{ é quadraticamente integrável} \end{aligned}$$

$$S = \{u \mid u \in H^1, u(1)=g\}$$

2) Funções peso (variações)  $w \in V$

Exige-se:  $w(1) = 0$  (contraparte homogênea da C.C. de Dirichlet)

$$w \in H^1$$

$$V = \{w \mid w \in H^1, w(1) = 0\}$$

Então:

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } f, g, h \text{ como antes, encontre } u \in S \text{ tal que para todo } w \in V: \\ \int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)h \end{array} \right.$$

- Princípio trabalho virtual
- Princípio variacional
- Forma fraca de (S)

$w \rightarrow$  deslocamentos virtuais

MEF utiliza (W) na discretização

As soluções das formas forte e fraca são idênticas (assume-se que todas as funções são suaves)  $\rightarrow$  Somente para provar este caso, mas não é uma consideração necessária (f não precisa ser “smooth”, por exemplo).

PROPOSIÇÃO:

a) Seja  $u$  a solução de (S)  $\Rightarrow u$  é solução de (W)

b) Seja  $u$  a solução de (W)  $\Rightarrow u$  é solução de (S)

Só faremos a) (+ importante para derivar a forma fraca em qualquer problema)

$u$  solução de (S)  $\Rightarrow u_{,xx} + f = 0$  em  $\Omega \quad \forall w \in V$

-  $w(u_{,xx} + f) = 0$  em  $\Omega$

$$- \int_0^1 w(u_{,xx} + f) dx = 0$$

Integração por partes:

$$\int_0^1 w u_{,xx} dx = w u_{,x} \Big|_0^1 - \int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx$$

$$0 = \int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx - \int_0^1 w f dx - w u_{,x} \Big|_0^1$$

Note que:  $-u_{,x}(0) = h; w(1) = 0$

$$\int_0^1 w_{,x} u_{,x} dx = \int_0^1 w f dx + w(0)h$$

-  $u$  é solução de (S)  $\Rightarrow u(1) = g, u \in S$

- Isto vale  $\forall w \in V \Rightarrow (S) \Rightarrow (W)$

C.C.  $-u_{,x}(0) = h$  não foi explicitamente mencionado em (W)  $\Rightarrow$  Condição de Contorno

NATURAL.

C.C.  $\rightarrow u(1) = g$  foi explicitamente mencionada ( $u \in S$ )  $\Rightarrow$  Condição de Contorno

ESSENCIAL.

A volta (W)  $\Rightarrow$  (S) é conhecida como LEMMA FUNDAMENTAL em Cálculo Variacional (muito importante)

Os procedimentos a) e b) são essenciais para o desenvolvimento de formas FRACAS corretas para problemas COMPLEXOS/MULTIDIMENSIONAIS.

NOTAÇÃO SIMPLIFICADA:

$$a(w,u) = \int_0^1 w_x u_x dx$$

$$(w,f) = \int_0^1 w f dx$$

EQ. VARIACIONAL:

$$a(w,u) = (w,f) + w(0)h$$

$a(*,*)$ ,  $(*,*)$  são simétricas e bilineares.

SIMETRIA:  $a(u,v) = a(v,u)$

$$(u,v) = (v,u)$$

BILINEARIDADE: significa linearidade em cada posição.

$$a(c_1u + c_2v, w) = c_1a(u, w) + c_2a(v, w)$$

$$(c_1u + c_2v, w) = c_1(u, w) + c_2(v, w)$$

Obviamente linear na 2ª posição também.

MÉTODO DE APROXIMAÇÃO DE GALERKIN:

Seja :  $S^h \subset S$      $V^h \subset V$ , significa que se:  $w^h \in V^h \Rightarrow w^h \in V$

C.C.:

$$u^h(1) = g$$

$$w^h(1) = 0$$

Defina-se:

Para  $v^h \in V^h \rightarrow u^h \in S^h$

$u^h = v^h + g^h$ , com  $g^h$  sendo uma função conhecida

$$\Rightarrow u^h(1) = \underbrace{v^h(1)}_0 + \underbrace{g^h(1)}_g = g$$

$\Rightarrow$  a menos de  $g^h, V^h$  e  $S^h$  são idênticos.

De:

$$a(w^h, u^h) = (w^h, f) + w^h(0)h$$

$$\underbrace{a(w^h, v^h + g^h)}_{\text{BILINEARIDADE}} = (w^h, f) + w^h(0)h$$

$$\underbrace{a(w^h, v^h) + a(w^h, g^h)}$$

$$\Rightarrow a(w^h, \underbrace{v^h}_{\text{incógnita}}) = (w^h, f) + w^h(0)h - a(w^h, g^h)$$

FORMA DE GALERKIN:

$$(G) \begin{cases} \text{Dados : } f, g, h \text{ (como antes), encontre } u^h = v^h + g^h \\ \text{onde } v^h \in V^h, \text{ t.q. para } \forall w^h \in V^h : \\ a(w^h, v^h) = (w^h, f) + w^h(0)h - a(w^h, g^h) \end{cases}$$

EQUAÇÕES MATRICIAIS:

Seja  $V^h$  t.q.  $\forall w^h \in V^h$ ,  $w^h = \sum_{A=1}^n c_A N_A$ ,  $N_A(x)$ ,  $x \in [0,1]$   
funções de interpolação

Exige-se:

$$N_A(1) = 0, \forall A = 1, \dots, n$$

Defina-se:

$$g^h(x) = g N_{n+1}(x)$$

$$N_{n+1}(1) = 1$$

$$u^h = v^h + g^h = \sum_{A=1}^n d_A N_A + g N_{n+1}$$

$$a\left(\sum_{A=1}^n c_A N_A, \sum_{B=1}^n d_B N_B\right) = \left(\sum_{A=1}^n c_A N_A, f\right) + \left[\sum_{A=1}^n c_A N_A(0)\right] h - a\left(\sum_{A=1}^n c_A N_A, g N_{n+1}\right)$$

$$0 = \sum_{A=1}^n c_A \underbrace{\left[\sum_{B=1}^n a(N_A, N_B) d_B - (N_A, f) - N_A(0)h + a(N_A, N_{n+1})g\right]}_{G_A}$$

$$\sum_{A=1}^n c_A G_A = 0 \quad (\text{tem que valer para } \forall w^h \Rightarrow \text{tem que valer})$$

$\forall c_A$ , e.g., todos  $c_A \neq 0$ , inclusive de mesmo sinal)

$\Rightarrow G_A = 0$  Obrigatoriamente.

Donde:

$$\sum_{B=1}^n a(N_A, N_B) d_B = (N_A, f) + N_A(0)h - a(N_A, N_{n+1})g$$

**n** Equações

**n** Incógnitas (os  $d_B$ 's)

Seja:

$$K_{AB} = a(N_A, N_B)$$

$$F_A = (N_A, f) + N_A(0)h - a(N_A, N_{n+1})g$$

$$\sum_{B=1}^n K_{AB} d_B = F_A$$

Portanto, a forma MATRICIAL é:

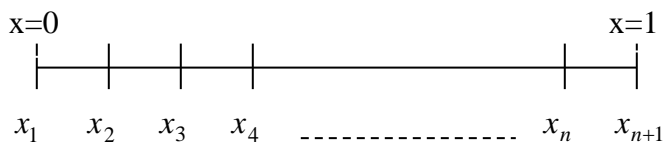
$$(M) \begin{cases} \text{Dados } K, F, \text{ encontre } d \text{ t.q.} \\ Kd = F \end{cases}$$

Com a solução nos nós, reconstrói-se  $u^h$  via:

$$u^h(x) = \sum_{A=1}^n d_A N_A(x) + g N_{n+1}(x)$$

Para funções de interpolação, usualmente utiliza-se polinômios.

Ex.: LINEARES



$x_A$ 's  $\rightarrow$  nós

$[x_A, x_{A+1}]$  - elementos

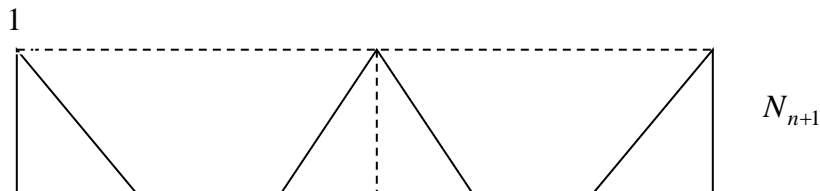
NOTE:

$h_A = x_{A+1} - x_A$ , não necessariamente iguais ao parâmetro da malha  $\rightarrow h = \max\{h_A\}$

Definição das funções de interpolação (forma):

$2 \leq A \leq n$  (nós internos)!

$$N_A(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{A-1}}{h_{A-1}}, & x_{A-1} \leq x \leq x_A \\ \frac{x_{A+1} - x}{h_A}, & x_A \leq x \leq x_{A+1} \end{cases}, \text{ e } 0, \text{ c.c}$$



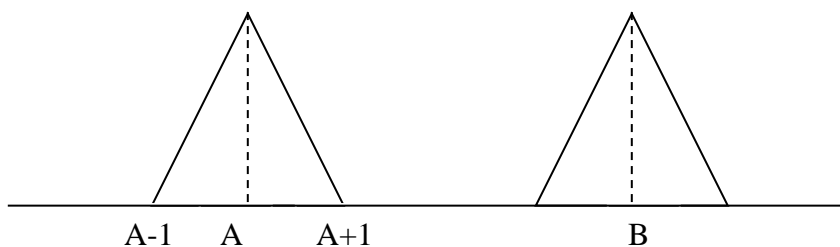
$\tilde{K}$ , matriz de rigidez

MOLA
$F = Kx$
F = força
K = rigidez
x = deslocamento

$$K_{AB} = \int_0^1 N_{A,x} N_{B,x} dx$$

Para um certo A

$$N_{A,x} N_{B,x} = 0, \text{ se } B > A+1, B < A-1$$



$\Rightarrow K_{AB} = 0 \Rightarrow$  MATRIZ DE RIGIDEZ TRIDIAGONAL E SIMÉTRICA

#### RESUMO DE RESULTADOS MATEMÁTICOS:

- $u^h$  é exata nos nós (não é geral)
- $u_{,x}^h$  é exata em algum ponto de cada intervalo (quase geral)
- $u_{,x}^h$  tem uma precisão de 2ª ordem no ponto médio dos elementos (quase geral)

Exemplo:

$n=2$ . Então  $w^h = c_1 N_1 + c_2 N_2$ , onde  $N_1(1) = N_2(1) = 0$ , e  $u^h = d_1 N_1 + d_2 N_2 + g N_3$  onde  $N_3(1) = 1$ . Defina-se  $N_A$ 's como se segue:

$$N_1(x) = \begin{cases} 1-2x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$N_3(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x-1 & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para n=2, a forma matricial fica:

$$\mathbf{K} = \begin{vmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{vmatrix} ; \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{AB} = \mathbf{a}(\mathbf{N}_A \mathbf{N}_B) = \int_0^1 \mathbf{N}_{A,x} \mathbf{N}_{B,x} dx = \underbrace{\int_0^{1/2} \mathbf{N}_{A,x} \mathbf{N}_{B,x} dx + \int_{1/2}^1 \mathbf{N}_{A,x} \mathbf{N}_{B,x} dx}_{\text{separa-se devido as derivadas das funções serem descontínuas}}$$

$$\mathbf{K}_{11} = 2 \quad , \quad \mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21} = -2 \quad , \quad \mathbf{K}_{22} = 4$$

$$\mathbf{K} = 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_A = (\mathbf{N}_A, f) + \mathbf{N}_A(0)h - \mathbf{a}(\mathbf{N}_A, \mathbf{N}_3)g$$

$$= \int_0^1 \mathbf{N}_A f dx + \mathbf{N}_A(0)h - g \int_{1/2}^1 \mathbf{N}_{A,x} \mathbf{N}_{3,x} dx$$

donde:

$$\mathbf{F}_1 = \int_0^{1/2} (1-2x)f(x)dx + h$$

$$\mathbf{F}_2 = 2 \int_0^{1/2} xf(x)dx + 2 \int_{1/2}^1 (1-x)f(x)dx + 2g$$

Para  $f(x) = 0$ :

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} h \\ 2g \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ 2g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g+h \\ g+h/2 \end{Bmatrix}$$



$$u^h = (g+h)N_1 + (g+h/2)N_2 + gN_3 = g(N_1 + N_2 + N_3) + h(N_1 + \frac{N_2}{2})$$

$$u^h(x) = g + h(1-x) \quad \text{e} \quad u(x) = g + h(1-x)$$

(LINEAR)  $\Rightarrow$  N's lineares rep. exatamente.

A solução exata homogênea é igual à do MEF.

$f(x) = p$ :

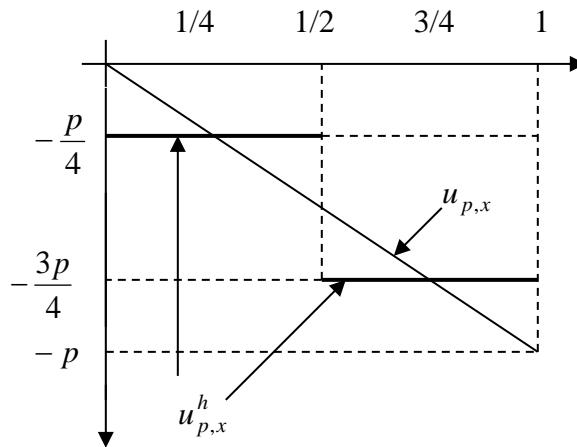
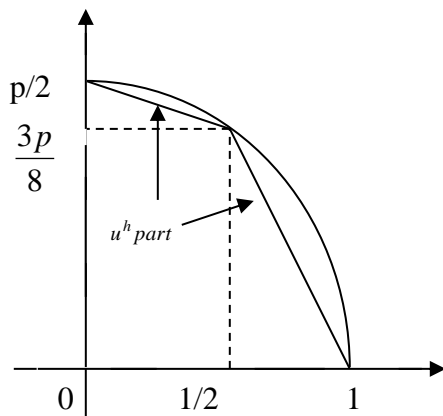
$$F_1 = \frac{p}{4} + h \quad ; \quad F_2 = \frac{p}{2} + 2g$$

$$d = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p/4 + h \\ p/2 + 2g \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} p/2 + g + h \\ 3p/8 + g + h/2 \end{Bmatrix}$$

A solução é:

$$u^h(x) = g + h(1-x) + u_{part}^h(x)$$

$$u_{part}^h = \frac{p}{2}N_1 + \frac{3p}{8}N_2$$



- $\Rightarrow$  • Sol MEF exata nós.  
•  $u_{,x}^h$  exata em um ponto de cada elemento.

### O PONTO DE VISTA DO ELEMENTO:

Até aqui: visão "GLOBAL"

GLOBAL	LOCAL (ELEMENTO)
DOM: $[x_A, x_{A+1}]$	$[\xi_1, \xi_2]$
NÓS: $\{x_A, x_{A+1}\}$	$\{\xi_1, \xi_2\}$
DOF: $\{d_A, d_{A+1}\}$	$\{d_1, d_2\}$
F.F: $\{N_A, N_{A+1}\}$	$\{N_1, N_2\}$
SOL.: $u^h(x) = N_A(x)d_A + N_{A+1}d_{A+1}$	$u^h(\xi) = N_1(\xi)d_1 + N_2(\xi)d_2$
$x \in [x_A, x_{A+1}]$	$\xi \in [-1, 1]$

$$\xi(x) = c_1 + c_2 x \Rightarrow -1 = c_1 + x_A c_2$$

$$1 = c_1 + x_{A+1} c_2$$

$$\xi(x) = \frac{2x - x_A - x_{A+1}}{h_A} \quad (h_A = x_{A+1} - x_A)$$

$\xi$  é um mapeamento e  $x$  é um ponto.

ou

$$x(\xi) = \frac{h_A \xi + x_A + x_{A+1}}{2}$$

$x$  é um mapeamento e  $\xi$  é um ponto.

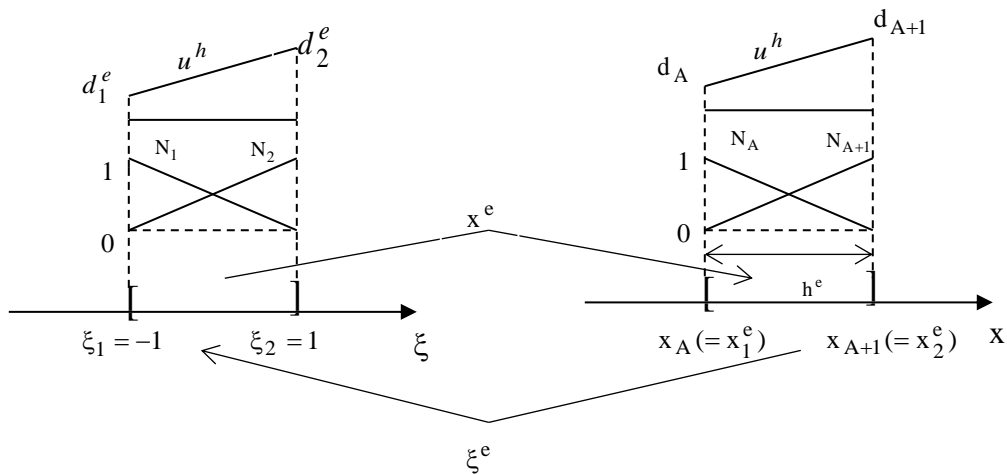
$$\Rightarrow N_a(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_a \xi) \quad , a = 1, 2$$

JACOBIANO:

$$x_{,\xi}^e = \frac{h^e}{2} \quad , \text{onde } h^e = x_2^e - x_1^e$$

$$\text{e } \xi_{,x}^e = (x_{,\xi}^e)^{-1} = \frac{2}{h^e}$$

DESCRIÇÃO LOCAL E GLOBAL DO EL. “e”



Observe também que:

$$x^e(\xi) = \sum_{a=1}^2 N_a(\xi) x_a^e$$



$$\frac{d}{d\xi} f(x(\xi)) = f_{,x} (x(\xi)) x_{,\xi} (\xi)$$

Ex.:

$$\begin{aligned} k_{ab}^e &= \int_{\Omega^e} N_{a,x}(x) N_{b,x}(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 N_{a,x}(x(\xi)) N_{b,x}(x(\xi)) x_{,\xi} (\xi) d\xi \\ &= \int_{-1}^1 N_{a,\xi}(\xi) N_{b,\xi}(\xi) (x_{,\xi}(\xi))^{-1} \xi \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(-1)^a}{2} \frac{(-1)^b}{2} \frac{2}{h^e} d\xi \\ &= \frac{(-1)^{a+b}}{h^e} \end{aligned}$$

$$k^e = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f^e = \sum_{a=1}^2 f_a N_a \text{ (usualmente)}$$

$$f_a^e = \int_{\Omega^e} N_a f dx + \text{termos contorno}$$

### 3 – OS PROBLEMAS 2-D E 3-D: O CÓDIGO FEAP

Notação:

$n_{sd}$  : número de dimensões (=2,3)

$x$  : ponto arbitrário em  $\mathbf{R}^{n_{sd}}$

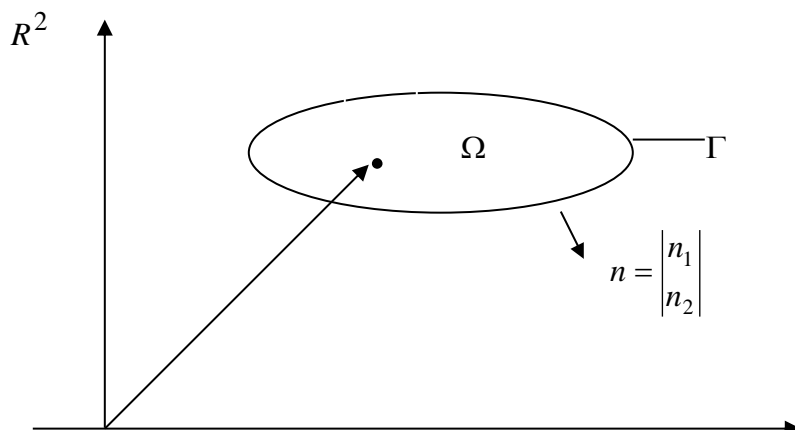
$n$  : vetor normal ao contorno de  $\Omega$

$\Gamma$ : contorno de  $\Omega$

$x$  e  $n$  são vetores

$$n_{sd} = 2 \Rightarrow x = |x_i| = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

$$n = |n_i| = \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \end{vmatrix}$$



$$\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_h$$

$\Gamma_g$  : temp, desloc.<sup>to</sup> prescritos

$\Gamma_h$  : fluxos prescritos

$$\Gamma_g \cap \Gamma_h = \phi$$

### NOTAÇÃO INDICIAL:

- usa-se índices  $i, j, k, l = 1, \dots, n_{sd}$  (índices espaciais)

- Indica-se a diferenciação

$$u_{,i} = u_{,xi} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

- Índices repetidos indicam soma ( a menos que se diga que não)

$$u_{,ii} = \sum_{i=1}^{n_{sd}} u_{,ii} = u_{,11} + u_{,22} + u_{,33} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u = \Delta u$$

$$b_{ij} a_j = \sum_{j=1}^{n_{sd}} b_{ij} a_j$$

### 1) TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

Seja  $f: \bar{\Omega} \rightarrow R$  e  $f \in C^1$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} f_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} f n_i d\Gamma$$

### 2) INTEGRAÇÃO POR PARTES

Seja  $f$  definido como em 1) e  $g: \bar{\Omega} \rightarrow R (g \in C^1)$

Então:

$$\int_{\Omega} f_{,i} g d\Omega = - \int_{\Omega} f g_{,i} d\Omega + \int_{\Gamma} f g n_i d\Gamma$$

PRÔ-LAR: USE 2) PARA DEMONSTRAR 1)

CONDUÇÃO DE CALOR LINEAR CLÁSSICA:

$q_i$  : vetor fluxo de calor

$u$ : temperatura

$f$ : geração de calor interna ( $W/m^3$ )

Lei de Fourier Generalizada:

$$q_i = -k_{ij}u_{,j}$$

$k_{ij}$  : condutividades térmicas (funções conhecidas da posição  $x$ )

$k_{ij} = \text{constante} \Rightarrow$  corpo HOMOGENEO

Caso mais comum (isotropia):  $k_{ij} = k\delta_{ij} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

FORMA FORTE:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{DADOS } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g : \Gamma_g \rightarrow \mathbb{R}, h : \Gamma_h \rightarrow \mathbb{R}, \text{ encontre} \\ u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.q.} \\ q_{i,i} = f \quad \text{em } \Omega \\ u = g \quad \text{em } \Gamma_g \\ -q_i n_i = h \quad \text{em } \Gamma_h, \text{ onde } q_i = -k_{ij}u_{,j} \end{array} \right.$$

Considere  $S, V \rightarrow \begin{cases} w : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2 \end{cases} \rightarrow$  "suaves"

$u \in S \rightarrow u = g$  em  $\Gamma_g$

$w \in V \rightarrow w = 0$  em  $\Gamma_g$

FORMA FRACA:

- Parte-se da forma forte
- Assume-se que  $u$  é solução de (S)  $\Rightarrow u \in S$
- Tome  $\forall w \in V$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} w \underbrace{(q_{i,i} - f)}_{=0} d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} w_{,i} q_i d\Omega + \int_{\Gamma} w q_i n_i d\Gamma - \int_{\Omega} w f d\Omega \quad (\text{integração por partes}) \\ &\int_{\Gamma} w q_i n_i d\Gamma \rightarrow \int_{\Gamma_g} w q_i n_i d\Gamma + \int_{\Gamma_h} w \underbrace{q_i n_i}_{-h} d\Gamma \end{aligned}$$

portanto:

$$-\int_{\Omega} w_{,i} q_i d\Omega = \int_{\Omega} w f d\Omega + \int_{\Gamma_h} w h d\Gamma$$

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } f, g, h, \text{ encontre } u \in S \text{ t.q. } \forall w \in V : \\ -\int_{\Omega} w_{,i} q_i d\Omega = \int_{\Omega} w f d\Omega + \int_{\Gamma_h} w h d\Gamma \\ \text{onde } q_i = -k_{ij} u_{,j} \end{array} \right.$$

Chega-se, portanto, à forma de Galerkin:

$$(G) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } f, g, h \dots \text{ encontre} \\ u^h = v^h + g^h \in S^h \text{ t.q. } \forall w^h \in V^h \\ a(w^h, v^h) = (w^h, f) + (w^h, h)_{\Gamma} - a(w^h, g^h) \end{array} \right.$$

$$\bar{\Omega} = \bigcup_e \bar{\Omega}^e ; \eta = \{1, 2, \dots, n_{np}\}$$

$$\eta_g \subset \eta \text{ (conjunto dos nós "g")}$$

$\Rightarrow$  O conjunto  $\eta - \eta_g$  representa os nós onde a solução é desconhecida

$$n_{eq} - \text{n}^\circ \text{ de equações (incógnitas)}$$

Escreve-se, portanto:

$$w^h(x) = \sum_{A \in \eta - \eta_g} N_A(x) c_A ; v^h(x) = \sum_{A \in \eta - \eta_g} N_A(x) d_A$$

$$g^h(x) = \sum_{A \in \eta_g} N_A(x) g_A$$

Analogamente ao desenvolvimento para o caso 1-D, chega-se a:

$$\sum_{B \in \eta - \eta_g} a(N_A, N_B) d_B = (N_A, f) + (N_A, h)_{\Gamma} - \sum_{B \in \eta_g} a(N_A, N_B) g_B, \forall A \in \eta - \eta_g$$

VETOR ID:

$$ID \left( \underset{\substack{\text{n}^\circ \text{ do} \\ \text{nó}}}{A} \right) = \begin{cases} p & \text{se } A \in \eta - \eta_g \\ 0 & \text{se } A \in \eta_g \end{cases}$$

Dá ao nó A o n° da equação global.

Na forma matricial, tem-se:

$$K d = F \quad 1 \leq P, Q \leq n_{eq}$$

$$K = [K_{PQ}], d = \{d_Q\}, F = \{F_P\}, \text{ daí}$$

$$K_{PQ} = a(N_A, N_B), P = ID(A), Q = ID(B)$$

$$F_P = (N_A, f) + (N_A, h)_{\Gamma} - \sum_{B \in \eta_g} a(N_A, N_B) g_B$$

NO ELEMENTO:

$$k^e = [k_{ab}^e], f^e = \{f_a^e\}, 1 \leq a, b \leq n_{en}$$

$$k_{ab}^e = a(N_a, N_b)^e = \int_{\Omega^e} (\nabla N_a)^T k (\nabla N_b) d\Omega$$

$$f_a^e = \int_{\Omega^e} N_a f d\Omega + \int_{\Gamma_h^e} N_a h d\Gamma - \sum_{b=1}^{n_{en}} k_{ab}^e g_b^e$$

FORMA CONVENIENTE PARA PROGRAMAR

$$k^e = \int_{\Omega^e} B^T D B d\Omega, \text{ onde}$$

$$\underbrace{D}_{n_{sd} \times n_{sd}} = k \quad ; \quad \underbrace{B}_{n_{sd} \times n_{sd}} = \left[ B_1, B_2, \dots, B_{n_{en}} \right]$$

$$\underbrace{B_a}_{n_{sd} \times 1} = \nabla N_a, \text{ e cada componente será: } k_{ab}^e = \int_{\Omega^e} B_a^T D B_b d\Omega$$

ONDE COLOCAR NA MATRIZ GLOBAL A CONTRIBUIÇÃO DO ELEMENTO?

1) vetor de nós do elemento  $IEN(a, e) = A$  (criado para armazenar esta informação)

$IEN$  e  $ID$  são construídos com informações dos dados de entrada da malha. A partir deles constrói-se a matriz de localização:  $P = LM(a, e) = ID(IEN(a, e))$ .

A partir desta informação, monta-se a matriz global da mesma maneira que no caso 1-D.

TEORIA DA ELASTICIDADE LINEAR CLÁSSICA:

-Lei de Hooke generalizada

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \text{ onde } c_{ijkl} \text{ - tensor constitutivo (propriedade do material)}$$

ou de forma mais geral, incluindo tensões térmicas e residuais:

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0$$



$$\varepsilon_{ij} = \underbrace{\mathbf{u}_{(i,j)}}_{\substack{\text{parte} \\ \text{simétrica}}} \rightarrow \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}$$

PLANE STRESS: $\varepsilon_0 \begin{Bmatrix} \alpha \theta^e \\ \alpha \theta^e \\ 0 \end{Bmatrix}$	DEF. PLANA (PL. STRAIN) $\varepsilon_0 = \begin{Bmatrix} \alpha \theta^e \\ \alpha \theta^e \\ 0 \end{Bmatrix} (1 + \nu)$
--	--

### TENSÕES PLANAS – MATERIAL ISOTRÓPICO

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} + \varepsilon_{x0}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} + \varepsilon_{y0}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} + \varepsilon_{xy0}$$

onde  $\nu$  - coeficiente de Poisson;  $E$  – módulo de elasticidade.

$$\Rightarrow \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

ou em termos de  $\lambda$  e  $\mu$  (LAMÉ PARAMETERS)

$$c_{ijkl}(x) = \mu(x)(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda(x)\delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Ex.: DEF. PLANA

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ & \lambda + 2\mu & 0 \\ \sim & \underline{\text{SIM}} & \mu \end{bmatrix}$$

FORMA FORTE:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g_i : \Gamma_{g_i} \rightarrow \mathbb{R}, e h_i : \Gamma_{h_i} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \text{encontre } u_i : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q.} \\ \sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \text{em } \Omega \text{ (eq. equilbrio)} \\ u_i = g_i \quad \text{em } \Gamma_{g_i} \\ \sigma_{ij} n_j = h_i \quad \text{em } \Gamma_{h_i} \end{array} \right.$$

FORMA FRACA:

$$(W) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dados } f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g_i : \Gamma_{g_i} \rightarrow \mathbb{R} \text{ e } h_i : \Gamma_{h_i} \rightarrow \mathbb{R}, \\ \text{encontre } u_i \in S_i \text{ t.q. } \forall w \in V_i \\ \underbrace{\int_{\Omega} w_{(i,j)} \sigma_{ij} d\Omega}_{a(w,u)} = \underbrace{\int_{\Omega} w_i f_i d\Omega}_{(w,f)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_{sol}} \left( \int_{\Gamma_{h_i}} w_i h_i d\Gamma \right)}_{(w,h)_{\Gamma}} \end{array} \right.$$

FORMA MATRICIAL:

$$k^e = [k_{pq}^e], \quad f^e = \{f_p^e\},$$

$$1 \leq p, q \leq n_{ee} = n_{ed} n_{en}$$

$$p = n_{ed}(a-1) + i$$

$$q = n_{ed}(b-1) + j$$

$$k_{pq}^e = e_i^T \int_{\Omega^e} \underbrace{B_a^T D B_b}_{\substack{\text{SUBMATRIZ} \\ \text{NODAL} \downarrow}} d\Omega e_j,$$

$$\underbrace{k^e}_{8 \times 8} = \begin{vmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & - & - & - \\ k_{21}^e & & & & \\ k_{31}^e & & & & \\ k_{41}^e & & & & \end{vmatrix}$$

$$n_{sd} = 2$$

$$B_a = \begin{bmatrix} N_{a,1} & 0 \\ 0 & N_{a,2} \\ N_{a,2} & N_{a,1} \end{bmatrix}$$

$$f_p^e = \int_{\Omega^e} N_a f_i d\Omega + \int_{\Gamma_{h_i}^e} N_a h_i d\Gamma - \sum_{q=1}^{n_{ee}} k_{pq} g_q^e$$

TENSÕES TÉRMICAS:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^0) + \sigma_{ij}^0$$

$\varepsilon_{ij}^0$  e  $\sigma_{ij}^0$  (initial strain and initial stress)

$$\varepsilon_{kl}^0 = -\theta c_{kl} \quad \text{Dados: } \left\{ \begin{array}{l} \theta - \text{temperatura} \\ c_{kl} - \text{coeficientes de dilata\~{c}o t\~{e}rmica} \end{array} \right\} \text{fun\~{c}oes conhecidas}$$

$\Rightarrow$  Nada muda na matriz de rigidez mas muda  $f_p^e$

$$\int_{\Omega} w_{(i,j)} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega + \sum_{i=1}^{n_{\text{dof}}} \left( \int_{\Gamma_{h_i}} w_i h_i d\Gamma \right)$$

$$\int_{\Omega} w_{(i,j)} c_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} w_i f_i d\Omega + \sum_{i=1}^{n_{\text{dof}}} \left( \int_{\Gamma_{h_i}} w_i h_i d\Gamma \right) + \int_{\Omega} w_{(i,j)} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 d\Omega - \int_{\Omega} w_{(i,j)} \sigma_{ij}^0 d\Omega$$

Portanto:

$$f_p' = \dots + e_i^T \int_{\Omega^e} B_a^T D \theta c d\Omega - e_i^T \int_{\Omega^e} B_a^T \sigma^0 d\Omega$$

onde:

$$c = \left\{ \begin{array}{l} c_{11} \\ c_{22} \\ 2c_{12} \end{array} \right\} \quad \text{simetria, i.e., } c_{12} + c_{21} = 2c_{12}$$

$$\sigma^0 = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^0 \\ \sigma_{22}^0 \\ \sigma_{12}^0 \end{array} \right\}$$

CURSO DE ELEMENTOS FINITOS  
AULAS PRÁTICAS

- 1) Compilar os arquivos \*.for indicados no arquivo PCFEAP5 e criar um arquivo executável feap.exe; (usar Fortran versão Microsoft 5.0 em diante)
- 2) Entrada de dados: (malha, carregamento, condições de contorno, propriedades)
  - feap \*\* \_\_\_\_\_ ← comentários sobre o problema.
  - numnp, numel, nummat (nº do conjunto de propriedades do material e outros parâmetros), ndm (nº de dimensões), ndf (nº de graus de liberdade por nó), nen (nº de nós por elemento).
  - coord
    - node # , ngen, x-coord, y-coord
    - ngen = 0 não gera
    - = incremento (gera coordenadas pulando este número de nós)
  - elem
    - elem #, material #, node 1, node 2, node 3, node 4, ngen



- boun \_\_\_\_\_ → (estabelece restrições no contorno)
  - node # , ngen, dof # 1, dof # 2
  - dof = 0 → livre
  - dof # 0 → fixo (< 0 – carrega na geração  
> 0 – só para este nó)
- forc
  - node #, ngen, valor em x, valor em y

Obs.: Por “default” se as condições forem nulas não é necessário especificar valor. Caso o nó não tenha restrição (dof # = 0 no comando “boun”), o programa interpreta o valor como uma “força”. Caso “dof # ≠ 0” em “boun”, então o programa interpreta o valor como um “deslocamento”.

- mate
  - 1 (nº do conjunto de propriedades), 1 (número do elemento a ser utilizado pelo programa)

$$\left\{ \begin{array}{l} E, \nu, \rho, 2, 2, I \\ t, \underbrace{g_x, g_y}_{\substack{\text{forças de campo} \\ \text{em x e y se houverem}}} \\ \alpha, T_{ref} \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} I = 1 \quad , \text{plane stress} \\ I = 2 \quad , \text{plane strain} \\ I = 3 \quad , \text{axisimetria} \end{array} \right.$$

⇒ Para calcular:  $\Delta T = T_{final} - T_{ref}$

$$\text{PCFEAP assume } T_{final} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta T > 0 \rightarrow T_{ref} < 0 \\ \Delta T < 0 \rightarrow T_{ref} > 0 \end{cases}$$

→ end

- inter (active) ou macro → duas opções  
3) COMANDOS MACRO (Problemas lineares)  
> tang,,1 (monta a matriz de rigidez e obtém a solução)  
 $d = \dots$

Residual norm  $\rightarrow \left\| F - K d \right\|$

Obs.: Para maiores detalhes, leiam o Cap. 15 do livro MEF, por O.C. Zienkiewicz e R. L. Taylor, Vol 1 (apostila distribuída)

#### EXERCÍCIOS:

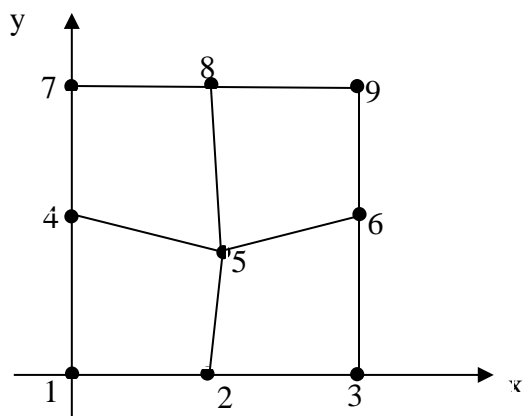
- IDISK (imprimir deslocamentos e reações)  
→ Patch tests (testa o elemento quanto a obtenção de resultados para os modos de corpo rígido e deformação constante).

USAREMOS SOMENTE o elemento PCELM1.FOR

Problemas de computador que usam FEAP (em cada um dos seguintes, você pode editar a saída de dados e entregar somente a informação pedida ):

- Rode o problema de disco circular (com entrada Idisk), e submeta as saídas de todos os deslocamentos dos nós e reações.
- Monte e rode os problemas chamados de "Patch tests" dados no Exercício 2, pp. 256-257 do Hughes. Estes testes demonstram a capacidade de um elemento em capturar os modos de corpo rígido e de deformação constante.  
Faça os testes (seis ao todo) com a opção (a) somente (em outras palavras, usando quadratura 2x2). Entregue somente um dos arquivos de entrada utilizados (a única diferença nos seis problemas estará nas condições de limite e forças). Também entregue as tensões e deslocamentos nos nós do elemento para todos os seis problemas.
- Monte e rode o problema de viga em balanço resumido nas pp. 254-255 de Hughes. Considere só um caso; isto é, assuma condições de deformações planas,  $\mu = 0.3$ , e quadratura 2x2 aplicadas a elementos de 4-pontos quadrilaterais. Os dados de entrada para o FEAP para este problema são determinados na pg. 705 do texto (em anexo). Você não precisa calcular os deslocamentos; eles são determinados nos dados de entrada na pg. 705. Entregue seus arquivos de entrada para o problema e uma saída de dados do deslocamento na ponta da viga (i.e,  $u_2(16,0)$ ) obtido no cálculo. Compare este resultado com a solução exata, obtida com as fórmulas da pg. 255.

Exercício 2(pp.256-257 do Hughes). Considere o “Patch” para os elementos quadriláteros mostrados abaixo.



As coordenadas dos nós são:

a	$x_a$	$y_a$
1	0	0
2	1	0
3	2	0
4	0	1
5	1.1	0.8
6	2	1
7	0	2
8	1	2
9	2	2

Use o código FEAP para executar os problemas de valor de contorno de deslocamentos seguintes ( $1 \leq a \leq 4, 6 \leq a \leq 9$ ).

Número de teste	$d_{1a}$	$d_{2a}$
1	1	0
2	0	1
3	$x_a$	0
4	0	$x_a$
5	$y_a$	0
6	0	$y_a$

Assuma a opção de deformação plana e use os dados seguintes:  $E = 1.0$ ,  $\nu = 0.3$ . Teste as opções seguintes:

a. quadratura 2x2

Baseado nos resultados obtidos, determine se cada elemento passa ou não no “Patch test”.  
Devido ao arredondamento dos erros, nós não podemos esperar resultados verdadeiramente exatos em computadores digitais.)



(pp.254-255 – Livro Hughes)

Considere a viga de tensão plana bidimensional, exemplo 1 da Sec. 4.4. A solução exata deste problema é derivada como se segue:

$$\sigma_{11} = -\frac{P\tilde{x}y}{I}; \quad \sigma_{22} = 0; \quad \sigma_{12} = \frac{P}{2I}(c^2 - y^2)$$

$$\frac{6E^1I}{P}u_1(x, y) = -y\left\{3(L^2 - \tilde{x}^2) + (2 + \nu^1)(y^2 - c^2)\right\}$$

$$\frac{6E^1I}{P}u_2(x, y) = (\tilde{x}^3 - L^3) - \left\{(4 + 5\nu^1)c^2 + 3L^2\right\}(\tilde{x} - L) + 3\nu^1\tilde{x}y^2$$

onde  $\tilde{x} = L - x$  e

	$E^1$	$\nu^1$
Tensões planas	$E$	$\nu$
Deform. planas	$\frac{E}{1 - \nu^2}$	$\frac{\nu}{1 - \nu}$

Obtenha soluções aproximadas para v problema de elasticidade usando o programa FEAP.

- Empregue os dados seguintes em seus cálculos

$P = -1$ ,  $L = 16$ ,  $c = 2$ ,  $E = 1$ ,  $\nu = 0.3$  e  $0.499$

(O valor de 0.499 de Poisson corresponde ao caso “quase incompressível”)

-a malha a ser usada é descrita na Figura 4.4.2. Você precisará computar forças nodais correspondentes ao carregamento de tração ao longo de  $x = 0$  e  $x = L$ .

-assuma condições de deformações planas.

- Use quadrilaterais de quatro-nodo e empregue cada das regras de quadrature seguintes: 2x2

Exemplo 1 (pp.219-220 – Livro Hughes)

Considere o elemento de deslocamento bilinear de quatro nós em deformação plana. A quadratura “Normal” para este elemento é considerada como a regra de Gauss 2x2.

A matriz de rigidez é idêntica à obtida na formulação mista para deslocamentos bilineares e as pressões lineares (descontínuas), em que os graus de liberdade de pressões são eliminados a nível de elemento, como indicado na seção 4.3.30 (Hughes).

Considere as equações de teoria de elasticidade linear isotrópica bidimensional no domínio ilustrado na Fig. 4.4.1. As condições de contorno são determinadas como se segue:

Deslocamento:

$$u_1(0,0) = u_2(0,0) = 0$$

$$u_1(0,\pm c) = 0$$

Tração

$$h_1(x_1,\pm c) = h_2(x_1,\pm c) = 0, \quad x_1 \in ]0, L[$$

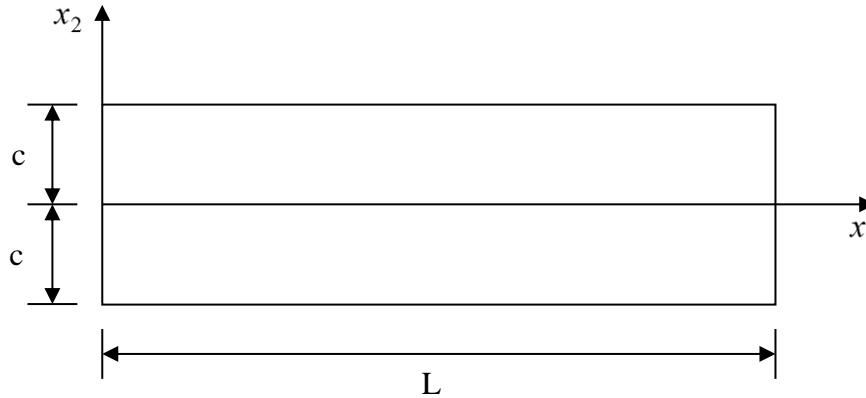


Figura 4.4.1 Domínio para o problema de deformação plana

$$\left. \begin{aligned} h_1(L, x_2) &= 0 \\ h_2(L, x_2) &= \frac{P}{2I}(c^2 - x_2^2) \end{aligned} \right\} x_2 \in ]-c, c[$$

$$\left. \begin{aligned} h_1(0, x_2) &= \frac{PLx_2}{I} \\ h_2(0, x_2) &= -\frac{P}{2I}(c^2 - x_2^2) \end{aligned} \right\} x_2 \in ]-c, 0[ \cup ]0, c[$$

onde  $P$  é constante e  $I = 2c^3/3$ .

As condições de contorno de tração são encontradas na teoria da curvatura simples para uma viga em balanço com origem em  $x=0$  – i.e., variação parabólica do cisalhamento nas extremidades e variação linear de tensão com a flexão na origem.

As condições de contorno de deslocamento permitem que a seção de origem se deforme. Os dados seguintes são utilizados na simulação numérica

$$L=16, c=2$$

A malha usada é mostrada na Fig. 4.4.2 (Somente metade do domínio precisa ser modelado uma vez que o eixo  $x_1$  é uma linha de assimetria)

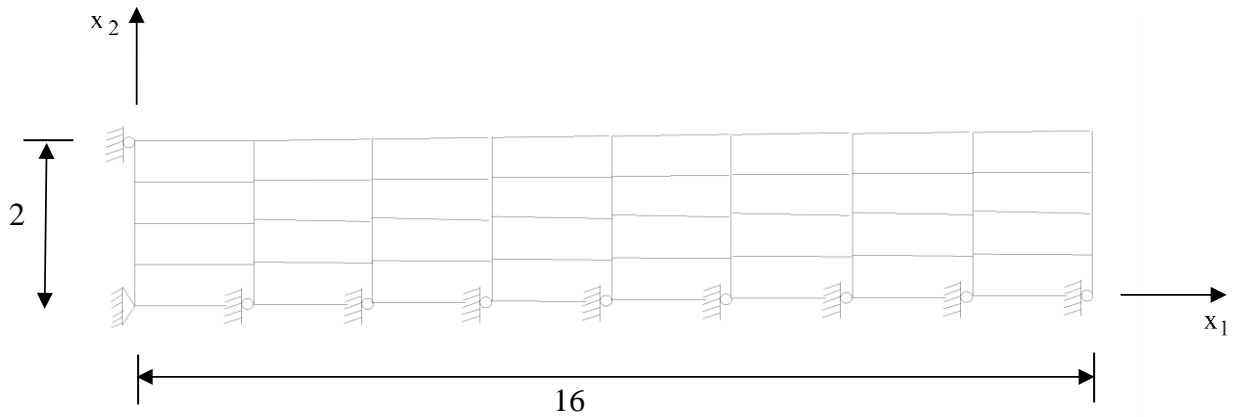


Fig.4.4.2 Malha e condições de contorno para o problema de deformação plana.

Condições de deformação plana foram assumidas e foram usados elementos quadriláterais de quatro nós.

Deslocamento vertical da ponta (i.e.,  $u_2(16,0)$ ) é comparado na tabela 4.4.1. Ambos os padrões, quadratura de Gauss  $2 \times 2$  e a integração seletiva reduzida do elemento fornecem resultados satisfatórios para  $\nu=0.3$ . No entanto, para o caso quase incompressível, o padrão quadrilateral degenera, ao passo que a integração seletiva conserva a precisão.

Tabela 4.4.1 Deslocamentos verticais normalizados da ponta da viga em estado plano de deformações.

V	U2	S1
0.3	0.904	0.912
0.499	0.334	0.937

U2  $2 \times 2$  integração uniforme (=exato no presente caso)

S1 integração seletiva ( $2 \times 2$  no termo  $\mu$ , um ponto no termo  $\lambda$ ).

(pp.705 – Livro Hughes)

0													
1	1	0	0	0	0	1	0	2	45	2	1	1	1
1	1	1	1	0	1		0.0		0.0		0.0		1.0
1	4		0.0		0.0								
			16.0		0.0								
			16.0		2.0								
			0.0		2.0								
8	5	4	1										

} *Coordinates*

1		1	1		
5		1	0		
6	41	5	1	0	

} *Boundary conditions*

2	-7.500E-01	0.17383
3	-1.500E+00	0.13867
4	-2.250E+00	0.08008
5	0.000E+00	0.01465
41	0.000E+00	-0.09280
42	0.000E+00	-0.17383
43	0.000E+00	-0.13867
44	0.000E+00	-0.08008
45	0.000E+00	-0.01465

} *Load vector*

	0.0		1.0										
1	32	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1			1.00	0.300		0.0	0.0		0.0				
1	1	1	6	7	2	1							
8	4	5	4	1	1								

} *Element nodes*

} *Element group*

\*END

## ELEMENTOS FINITOS LINEAR

### PROF. JOSÉ VARGAS TRABALHO COMPUTACIONAL USO DO CÓDIGO FEAP

Cada projeto deverá: i) fazer um teste de convergência do elemento de análise estrutural e térmica do código FEAP (elmt01.f), utilizando um problema qualquer de elasticidade linear que tenha solução exata; e ii) resolver um problema proposto, conforme a seguir:

- i) Problema cuja solução exata seja conhecida, a escolha do grupo (teste de convergência). Para este problema, inicie a solução com uma malha (reduza h em ambas as dimensões) e faça o gráfico do erro da solução em alguns pontos representativos versus o parâmetro da malha h, em um diagrama log x log. O “slope” deste gráfico é a ordem de precisão da solução numérica. Determine o seu valor;
- ii) Resolva o problema proposto para o seu grupo, determinando o deslocamento e a tensão máxima (principal) observada e verificando se o projeto resiste ou não. Caso não resista, proponha um novo dimensionamento tal que o projeto resista sem falhar.

- Defina o problema completamente e apresente as condições de contorno;

- Refine a malha até que:

$$\text{ERRO} = \frac{\left\| u_{\text{malha anterior}} - u_{\text{malha posterior}} \right\|}{\left\| u_{\text{malha anterior}} \right\|} \leq 0,05 \quad (1)$$

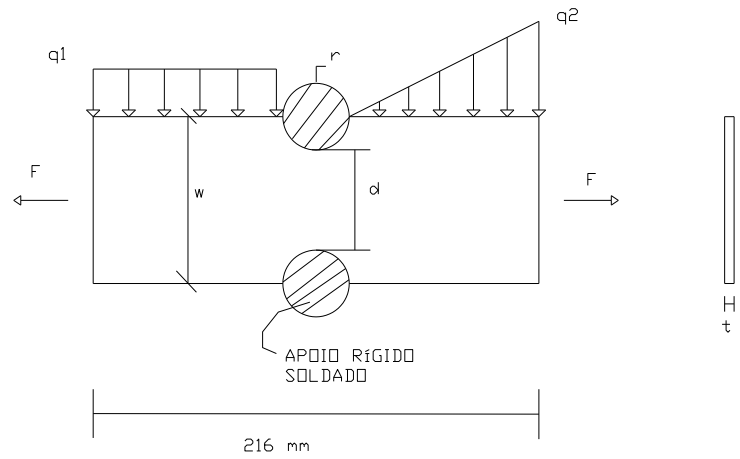
onde  $u_{\text{malha}}$  pode ser escolhido como a solução em um ponto representativo do domínio ( e.g., ponto crítico).

Quando o critério da Eq. (1) for satisfeito, a malha mais adequada foi encontrada (i.e., malha anterior), a qual deverá ser utilizada nos redimensionamentos.

Obs.:

- 1) Parte do grau será baseada em apresentação e clareza;
- 2) Escreva o projeto na forma de um artigo científico (“paper”). Ex.: (Resumo, Introdução, Teoria, Resultados e Discussão, e Conclusões).
- 3) Todos os problemas devem ser resolvidos com ESTADO PLANO DE TENSÕES.

## GRUPO 1: BARRA RETANGULAR COM ENTALHES



$$q_1 = q_2 = 1800 \text{ N/m}$$

$$F = 500 \text{ N}$$

$$r = 8 \text{ mm}$$

$$w = 40 \text{ mm}$$

$$d = 20 \text{ mm}$$

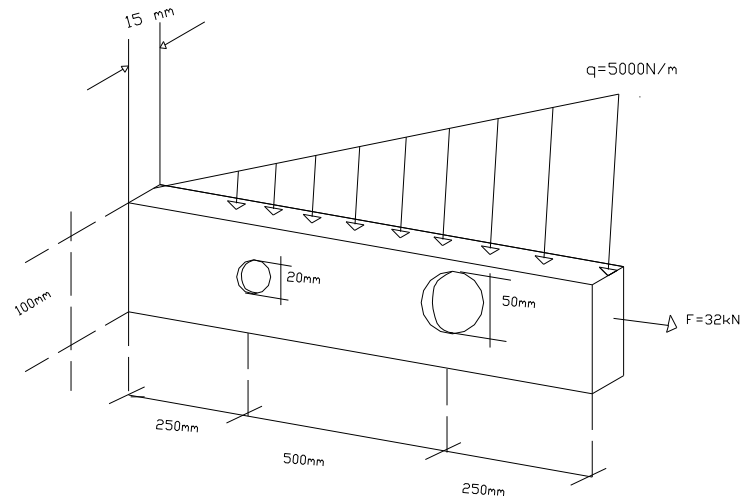
$$t = 4 \text{ mm}$$

$$T_{final} = 120^\circ \text{ C}$$

$$T_0 = 25^\circ \text{ C}$$

Material: Aço inoxidável 302 – Temperado

GRUPO 2: PLACA C/ DOIS FUROS

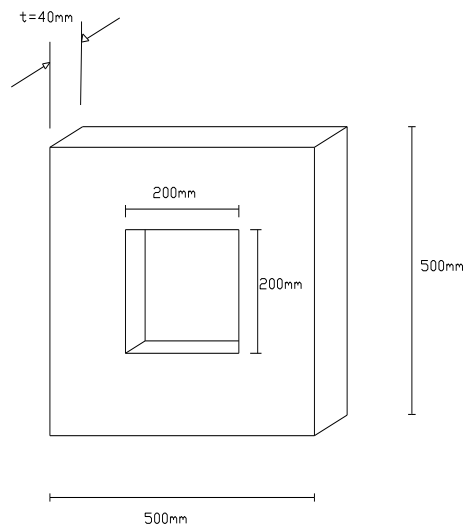


Material: Aço CA-60

$T_0 = 25^\circ \text{C}$

$T_f = -50^\circ \text{C}$

GRUPO 3:



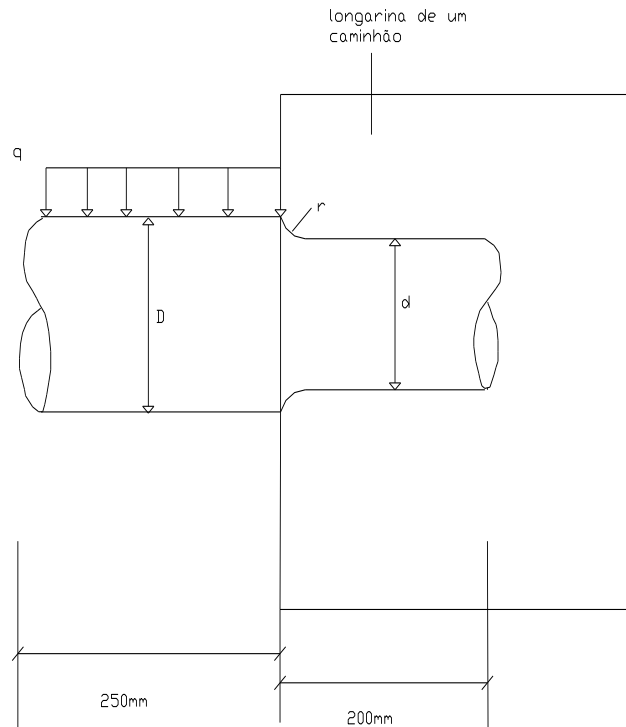
Esta peça é para ser montada com ajuste com interferência interna de  $10^{-3}\text{m}$  e externa de  $10^{-4}\text{m}$ . O material é o Alumínio (1% de Mg.).

$$T_0 = 25^\circ\text{C}$$

$$T_{final} = 80^\circ\text{C}$$



GRUPO 4:



$$q = 10 \text{ kN/m}$$

$$r = 10 \text{ mm}$$

$$D = 100 \text{ mm}$$

$$d = 80 \text{ mm}$$

Material : Aço CA-60

$$T_0 = 25^\circ C$$

$$T_{final} = 80^\circ C$$

Obs.: Eixo TRUNNION para suspensão traseira de caminhões.

Propriedades dos Materiais mais Usados em Engenharia

Material	Peso Específico $kg/m^3$	Tensões de Ruptura			Tensões de Escoamento		Módulos de Elasticidade		Coeficiente de Dilatação Térmica $10^{-6}/^{\circ}C$	Alongamento Porcentual mm
		Tração	Compressão	Cisalhamento	Tração	Cisalhamento	Longitudinal GPa	Transversal GPa		
		MPa	*** MPa	MPa	MPa	MPa				
Aços para concreto armado										
CA-25	7860	300			250		210	79	11,7	18
CA-32	7860	384			320		210	79	11,7	14
CA-40	7860	440			400		210	79	11,7	10
CA-50	7860	550			500		210	79	11,7	8
CA-60	7860	660			600		210	79	11,7	5
Aços para concreto protendido										
-CP 150	7860	1570			1500		210	79	11,7	8
-CP 160	7860	1670			1500		210	79	11,7	7
Perfis laminados										
Cor-Ten A	7860	471 ou 492			352					18 a 19
Cor-Ten B	7860	492			352					19
Cor-Ten C	7860	562			422					16
ASTM A-36	7860	408 a 562			253					16 a 20
Aço inoxidável 302										
Laminado a frio	7920	860	-	-	520	-	190	73	17,3	12
Temperado	7920	620	-	-	275	152	190	73	17,3	50
Ferro fundido										
ASTM A-48	7200	170	650	240	-	-	70	28	12,1	0,5
ASTM A-47	7300	340	620	330	230	-	165	64	12,1	10
Alumínio (1%Mg)	2710	290	-	185	255	140	69	26	23,6	17
Latão (65%Cu; 35%Zn)										
Laminado a frio	8470	540	-	300	435	250	105	39	20	8
Temperado		330	-	220	105	65	105	39	20	62
8470		380	-	165	275	-	45	-	26	7
Magnésio (8,5% Al)	1800	900	-	-	825	-	114	-	9,5	10
Titânio (6,0%Al;4%V)		-	20 a 40	-	-	-	25 a 30	-	10	-
4460										
Concreto	2320	**								
Madeira *		760 a	340 a 700	10 a 15	-	-	10 a 20	-	-	-
Peroba rosa	790 a 870	1400								
		**								
		1100 a	450 a 750	15 a 17	-	-	12 a 15	-	-	-
Pinho	520 a 600	1600								
		**								
		500 a 900	230 a 500	10 a 15	-	-	15 a 24	-	-	-
Eucalipto	690 a 900	48	90	55	-	-	3	-	72	4
		**								
Poliestireno	1050	2,4 a 6,0	60 a 125							
Vidro plano					-	-	65 a 80	-	950	-
2500										

\* Tensões paralelas às fibras

\*\* Tensões na flexão

\*\*\* Para metais dúcteis valores iguais à tração

TABLE 20.1 Tabulation of the Thermal Properties for a Variety of Materials

Material	$c_p$ (J/kg-K) <sup>a</sup>	$\alpha$ [(°C) <sup>-1</sup> × 10 <sup>-6</sup> ] <sup>b</sup>	k (W/m-K) <sup>c</sup>	L [Ω-W/(K) <sup>2</sup> × 10 <sup>-8</sup> ]
<b>Metals</b>				
Aluminum	900	23,6	247	2,24
Copper	386	16,5	398	2,27
Gold	130	13,8	315	2,52
Iron	448	11,8	80,4	2,66
Nickel	443	13,3	80,9	2,10
Silver	235	19,0	428	2,32
Tungsten	142	4,5	178	3,21
1025 Steel	486	12,5	51,9	-
316 Stainless steel	502	16,0	16,3 <sup>d</sup>	-
Brass (70Cu-30Zn)	375	20,0	120	-
<b>Ceramics</b>				
Alumina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	775	8,8	30,1	-
Beryllia (BeO)	1050 <sup>d</sup>	9,0 <sup>d</sup>	220 <sup>e</sup>	-
Magnesia (MgO)	940	13,5 <sup>d</sup>	37,7 <sup>e</sup>	-
Spinel (MgAl <sub>2</sub> O <sub>4</sub> )	790	7,6 <sup>d</sup>	15,0 <sup>e</sup>	-
Fused silica (SiO <sub>2</sub> )	740	0,5 <sup>d</sup>	2,0 <sup>e</sup>	-
Soda-lime glass	840	9,0 <sup>d</sup>	1,7 <sup>e</sup>	-
<b>Polymers</b>				
Polyethylene	2100	60-220	0,38	-
Polypropylene	1880	80-100	0,12	-
Polystyrene	1360	50-85	0,13	-
Polytetrafluoroethylene (Teflon)	1050	135-150	0,25	-
Phenol-formaldehyde (Bakelite)	1650	68	0,15	-
Nylon 6,6	1670	80-90	0,24	-
Polyisoprene	-	220	0,14	-

<sup>a</sup> To convert to cal/g-K, multiply by 2.39 × 10<sup>-4</sup>; to convert to Btu / lb<sub>m</sub> - °F, multiply by 2.39 × 10<sup>-4</sup>.

<sup>b</sup> To convert to (°F)<sup>-1</sup>, multiply by 0.56.

<sup>c</sup> To convert to cal/s-cm-K, multiply by 2.39 × 10<sup>-3</sup>; to convert to Btu / ft - h - °F, multiply by 0.578.

<sup>d</sup> Value measured at 100°C.

<sup>e</sup> Mean value taken over the temperature range 0-1000°C.

## BIBLIOGRAFIA:

- 1 - HUGHES, T.J.R., 1987, The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall.
- 2 – Cook, R.D., Malkus D.S. and Plesha M.E., 1989, Conceptions and Applications of Finite Element Analysis, 3<sup>rd</sup> edition, Wiley.
- 3 – Bathe, K.J., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall.
- 4 – Johnson, C., 1987, Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method, Cambridge University Press (Muito matemático)
- 5 – Strang, G. and Fix, G. J. , 1973, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall (muito matemático, uma referência extraordinária para a época)
- 6 – Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., 1989-91, The Finite Element Method, 4<sup>th</sup> edition, volumes 1 e 2, McGraw-Hill.