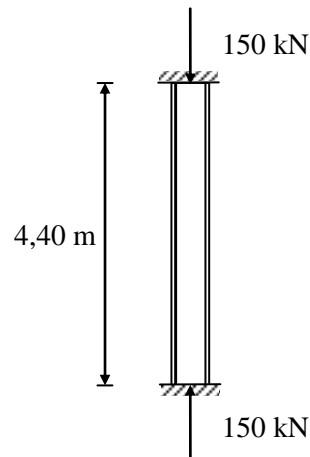


Exemplo 1: Utilizando as fórmulas da AISC, dimensione uma coluna bi-engastada de 4,40 m para resistir a uma carga concêntrica de 150 kN. Empregue perfil S. Dados para o aço  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$ .



Solução:

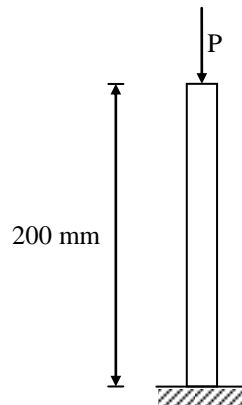
$$L_e = \frac{L}{2} = 2,20 \text{ m}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_e}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 \cdot 200E9}{250E6}} = 126$$

$$\frac{L_e}{r} \leq 200 \Rightarrow r \geq \frac{2200}{200} = 11 \text{ mm}$$

Perfil S	$A_o$ (mm)	$r_{\min}$	$C_c$	$L_e/r$	$s$	$s_{adm}$ (MPa)	$A$ (mm)	$(A_o-A)/A$ (%)
610x179	22770	39,2	125,66	56	1,82	123	1215	1774
610x157,6	20060	40,3	125,66	55	1,82	124	1205	1564
610x149	18970	32,4	125,66	68	1,85	115	1299	1360
610x134	17100	33,1	125,66	66	1,85	116	1288	1228
610x118,9	15160	34,1	125,66	65	1,84	118	1273	1091
510x141	18000	33,9	125,66	65	1,84	118	1276	1311
510x127	16130	34,5	125,66	64	1,84	118	1268	1172
510x112	14260	29,4	125,66	75	1,86	110	1359	949
510x97,3	12390	30,3	125,66	73	1,86	112	1339	825
460x104	13290	27,5	125,66	80	1,87	106	1410	843
460x81,4	10390	28,9	125,66	76	1,87	109	1371	658
380x74	9480	26,3	125,66	84	1,88	104	1449	554
380x64	8130	27,2	125,66	81	1,87	106	1419	473
310x74	9480	26,3	125,66	84	1,88	104	1449	554
310x60,7	7740	27,0	125,66	81	1,88	105	1425	443
310x52	6640	24,9	125,66	88	1,89	100	1504	342
310x47,3	6032	25,4	125,66	87	1,88	101	1483	307
250x52	6640	22,9	125,66	96	1,90	93	1609	313
250x37,8	4806	24,2	125,66	91	1,89	98	1536	213
200x34	4368	20,3	125,66	108	1,91	82	1824	139
200x27,4	3484	21,1	125,66	104	1,91	86	1744	100
180x30	3794	18,7	125,66	118	1,92	73	2046	85
180x22,8	2890	19,5	125,66	113	1,91	78	1923	50
150x25,7	3271	17,1	125,66	129	1,92	62	2416	35
150x18,6	2362	17,9	125,66	123	1,92	68	2204	7
130x22	2800	15,8	125,66	139	1,91	50	2972	-6
130x15	1884	16,4	125,66	134	1,91	56	2671	-29
100x14,1	1800	14,5	125,66	152	1,90	36	4204	-57
100x11,5	1452	14,8	125,66	149	1,90	39	3803	-62

Exemplo 2: A coluna abaixo deve suportar uma carga concêntrica de 100 kN. Empregue um tubo cilíndrico em aço com razão entre a espessura de parede e o raio de 1/10. São dados  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $\sigma_e = 345 \text{ MPa}$ .



Solução:

$$L_e = 2L = 400 \text{ mm}$$

$$C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_e}} = \sqrt{\frac{2\pi^2 200E9}{345E6}} = 107$$

$$\frac{L_e}{r} \leq 200 \Rightarrow r \geq \frac{400}{200} = 2 \text{ mm}$$

Área:

$$A = \pi(c_e^2 - c_i^2) = \pi c_e^2 \left(1 - \frac{c_i^2}{c_e^2}\right) = \pi c_e^2 \left(1 - \left(\frac{c_e - t}{c_e}\right)^2\right) = \pi c_e^2 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{c_e}\right)^2\right) = \pi c_e^2 \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2\right) = 0,60c_e^2$$

Momento de inércia:

$$I = \frac{\pi}{4}(c_e^4 - c_i^4) = \frac{\pi}{4}c_e^4 \left(1 - \frac{c_i^4}{c_e^4}\right) = \frac{\pi}{4}c_e^4 \left(1 - \left(\frac{c_e - t}{c_e}\right)^4\right) = \frac{\pi}{4}c_e^4 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{c_e}\right)^4\right) = \frac{\pi}{4}c_e^4 \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^4\right) = 0,27c_e^4$$

Raio de giração:

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{(c_e^2 + c_i^2)}{4} = \frac{c_e^2}{4} \left(1 + \frac{c_i^2}{c_e^2}\right) = \frac{c_e^2}{4} \left(1 + \left(\frac{c_e - t}{c_e}\right)^2\right) = \frac{c_e^2}{4} \left(1 + \left(1 - \frac{t}{c_e}\right)^2\right) = \frac{c_e^2}{4} \left(1 + \left(\frac{9}{10}\right)^2\right) = 0,45c_e^2$$

Dimensionamento:

1º. Admitindo  $C_c \leq \frac{L_e}{r} \leq 200$ :

$$\sigma_{adm} = \frac{1,03E12}{\left(\frac{L_e}{r}\right)^2} \Rightarrow \frac{P}{A} = \frac{1,03E12}{L_e^2 \frac{A}{I}} \Rightarrow P = \frac{1,03E12}{\frac{L_e^2}{I}} \Rightarrow I = \frac{PL_e^2}{1,03E12} \Rightarrow 0,27c_e^4 = \frac{PL_e^2}{1,03E12}$$

$$\therefore c_e = \sqrt[4]{\frac{PL_e^2}{2,78E11}} = \sqrt[4]{\frac{100E3 \cdot 0,400^2}{2,78E11}} = 0,016 \text{ m} = 16 \text{ mm}$$

Verificação da hipótese:

$$\frac{L_e}{r} = \frac{400}{\sqrt{0,45 \cdot 16}} = 37 < C_c \text{ (hipótese inválida!)}$$

2º. Utilizando a fórmula da parábola:

$$s = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left( \frac{L_e}{r} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{L_e}{r} \right)^3 = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left( \frac{37}{107} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{37}{107} \right)^3 = 1,8$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{s} \left( 1 - \frac{L_e^2}{2C_c^2 r^2} \right) \Rightarrow c_e = \sqrt{\frac{sP}{0,60\sigma_e} + \frac{L_e^2}{0,90C_c^2}} = \sqrt{\frac{1,8 \cdot 100E3}{0,60 \cdot 345E6} + \frac{0,400^2}{0,90 \cdot 107^2}} = 0,030 \text{ m} = 30 \text{ mm}$$

Verificando o novo índice de esbeltez:

$$\frac{L_e}{r} = \frac{400}{\sqrt{0,45 \cdot 30}} = 20$$

O novo coeficiente de segurança será:

$$s = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left( \frac{L_e}{r} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{L_e}{r} \right)^3 = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left( \frac{20}{107} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{20}{107} \right)^3 = 1,7$$

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_e}{s} \left( 1 - \frac{L_e^2}{2C_c^2 r^2} \right) \Rightarrow c_e = \sqrt{\frac{sP}{0,60\sigma_e} + \frac{L_e^2}{0,90C_c^2}} = \sqrt{\frac{1,7 \cdot 100E3}{0,60 \cdot 345E6} + \frac{0,400^2}{0,90 \cdot 107^2}} = 0,029 \text{ m} = 29 \text{ mm}$$

Verificando o novo índice de esbeltez:

$$\frac{L_e}{r} = \frac{400}{\sqrt{0,45 \cdot 29}} = 21$$

... e o novo coeficiente de segurança será:

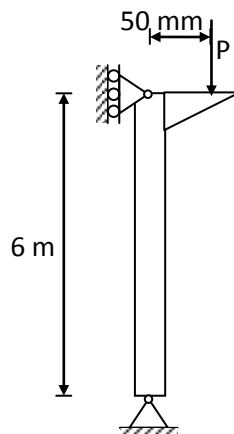
$$s = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left( \frac{L_e}{r} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{L_e}{r} \right)^3 = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left( \frac{21}{107} \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{21}{107} \right)^3 = 1,7$$

Logo a solução convergiu. Portanto:

$$c_e = 29 \text{ mm}$$

$$t = 2,9 \text{ mm}$$

Exemplo 3: A coluna abaixo deve suportar uma carga de 100 kN com excentricidade de 50 mm. Dimensione um tubo cilíndrico de razão espessura-raio de 1/10 para um fator de segurança igual a 2. Dados para o material:  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$ .



Solução:

$$L = 6 \text{ m}$$

Área:

$$A = \pi(c_e^2 - c_i^2) = \pi c_e^2 \left(1 - \frac{c_i^2}{c_e^2}\right) = \pi c_e^2 \left(1 - \left(\frac{c_e - t}{c_e}\right)^2\right) = \pi c_e^2 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{c_e}\right)^2\right) = \pi c_e^2 \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^2\right) = 0,60 c_e^2$$

Momento de inércia:

$$I = \frac{\pi}{4}(c_e^4 - c_i^4) = \frac{\pi}{4} c_e^4 \left(1 - \frac{c_i^4}{c_e^4}\right) = \frac{\pi}{4} c_e^4 \left(1 - \left(\frac{c_e - t}{c_e}\right)^4\right) = \frac{\pi}{4} c_e^4 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{c_e}\right)^4\right) = \frac{\pi}{4} c_e^4 \left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^4\right) = 0,27 c_e^4$$

Raio de giração:

$$r^2 = \frac{I}{A} = \frac{(c_e^2 + c_i^2)}{4} = \frac{c_e^2}{4} \left(1 + \frac{c_i^2}{c_e^2}\right) = \frac{c_e^2}{4} \left(1 + \left(\frac{c_e - t}{c_e}\right)^2\right) = \frac{c_e^2}{4} \left(1 + \left(1 - \frac{t}{c_e}\right)^2\right) = \frac{c_e^2}{4} \left(1 + \left(\frac{9}{10}\right)^2\right) = 0,45 c_e^2$$

ou

$$r = 0,67 c_e$$

Aplicando a fórmula da secante:

$$\sigma_e = \frac{sP_{adm}}{A} \left(1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{L}{r} \sqrt{\frac{sP_{adm}}{4EA}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow 250 \cdot 10^6 = \frac{2 \cdot 100 \cdot 10^3}{0,60 c_e^2} \left(1 + \frac{0,050 c_e}{0,45 c_e^2} \sec\left(\frac{6}{0,67 c_e} \sqrt{\frac{2 \cdot 100 E 3}{4 \cdot 200 E 9 \cdot 0,60 c_e^2}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow 750 c_e^2 - 1 = \frac{0,11}{c_e} \sec\left(\frac{0,0058}{c_e^2}\right)$$

$$\Rightarrow c_e (750 c_e^2 - 1) - 0,11 \sec\left(\frac{0,0058}{c_e^2}\right) = 0$$

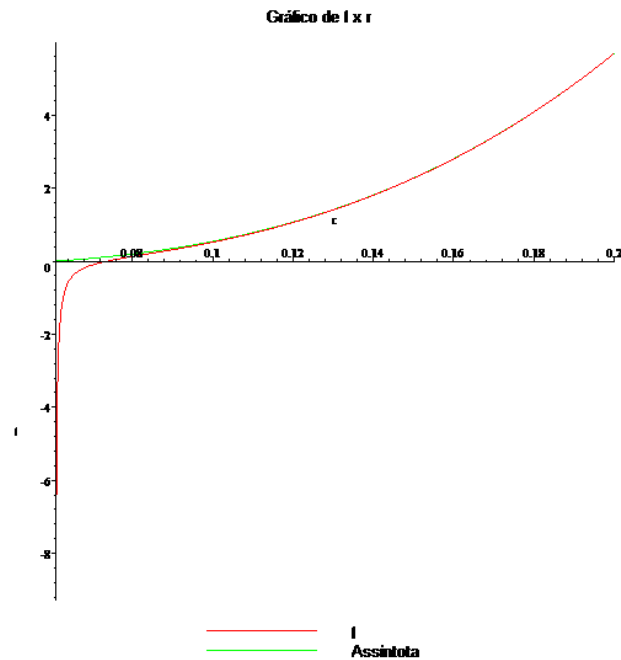
Seja:

$$f(c_e) = c_e (750 c_e^2 - 1) - 0,11 \sec\left(\frac{0,0058}{c_e^2}\right)$$

Assíntotas:

$$c_e \rightarrow \infty \Rightarrow f(c_e) \rightarrow c_e (750 c_e^2 - 1) - 0,11$$

$$c_e \rightarrow 0,061_+ \Rightarrow f(c_e) \rightarrow -\infty \text{ (argumento de sec igual a } \pi/2)$$



Aplicando o método da secante:  $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

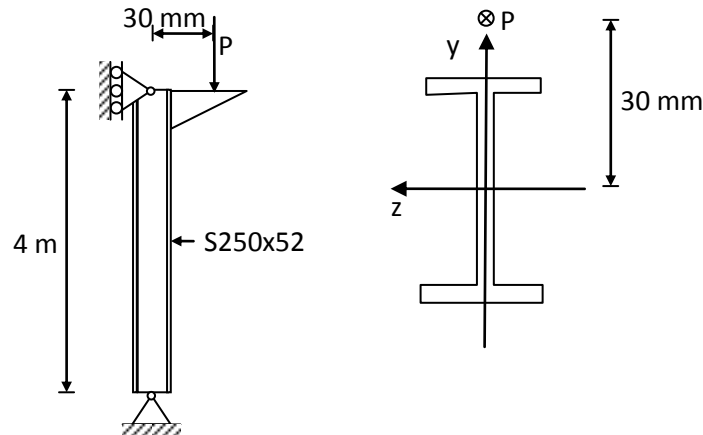
Xn	f(Xn)	Xn+1
6,20E-02	-1,66E+00	6,30E-02
6,30E-02	-8,82E-01	6,41E-02
6,41E-02	-5,54E-01	6,60E-02
6,60E-02	-3,11E-01	6,85E-02
6,85E-02	-1,63E-01	7,12E-02
7,12E-02	-6,69E-02	7,31E-02
7,31E-02	-1,70E-02	7,37E-02
7,37E-02	-1,79E-03	7,38E-02
7,38E-02	-4,58E-05	7,38E-02

Logo:

$$c_e = 0,074 \text{ m} = 74 \text{ mm}$$

$$t = 7,4 \text{ mm}$$

Exemplo 4: Determine a carga admissível a ser aplicada com excentricidade de 30 mm à coluna abaixo. O perfil empregado é o S250x52 (Tabelado). Dados para o material: E = 200 GPa e  $\sigma_e = 250 \text{ MPa}$ . Adote um coeficiente de segurança igual a 2.



Solução:

Dados para o perfil S250x52:

Área	6640 mm <sup>2</sup>
Altura	254 mm
Largura	126 mm
r <sub>y</sub>	22,9 mm
r <sub>z</sub>	96,0 mm

1º. Carga admissível segundo o eixo de flexão y (sem excentricidade):

Utilizando a fórmula de Euler:

$$\sigma_{adm} = \frac{\pi^2 E}{s \left( \frac{L}{r} \right)^2} \Rightarrow \frac{P_{adm}}{A} = \frac{\pi^2 E}{s \left( \frac{L}{r} \right)^2} \Rightarrow P_{adm} = \frac{\pi^2 EA}{s \left( \frac{L}{r} \right)^2}$$

Substituindo:

$$(P_{adm})_y = \frac{\pi^2 200 \cdot 10^9 \cdot 6640 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot \left( \frac{4000}{22,9} \right)^2} = 220 \text{ kN}$$

2º. Carga admissível segundo o eixo de flexão z (com excentricidade):

Utilizando a fórmula da secante:

$$\begin{aligned} \sigma_e &= \frac{s P_{adm}}{A} \left( 1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left( \frac{L}{r} \sqrt{\frac{s P_{adm}}{4EA}} \right) \right) \\ \Rightarrow 250E6 &= \frac{2 \cdot P_{adm}}{6,64 \cdot 10^{-3}} \left( 1 + \frac{0,03 \cdot 0,127}{0,096^2} \sec \left( \frac{4}{0,096} \sqrt{\frac{2 \cdot P_{adm}}{4 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 6,64 \cdot 10^{-3}}} \right) \right) \\ \Rightarrow 8,3 \cdot 10^5 &= P_{adm} (1 + 0,41 \sec(8,1 \cdot 10^{-4} \sqrt{P_{adm}})) \\ \Rightarrow P_{adm} (1 + 0,41 \sec(8,1 \cdot 10^{-4} \sqrt{P_{adm}})) - 8,3 \cdot 10^5 &= 0 \end{aligned}$$

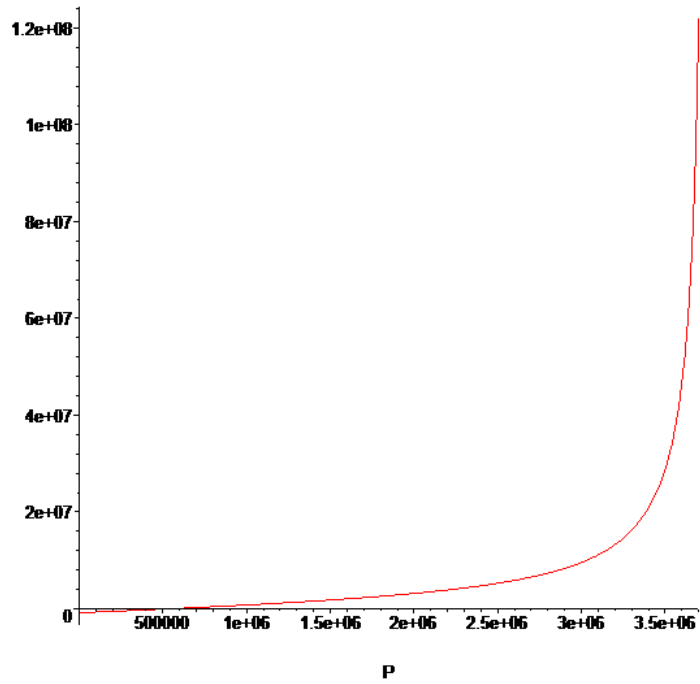
Seja:

$$f(P) = P(1 + 0,41 \sec(8,1 \cdot 10^{-4} \sqrt{P})) - 8,3 \cdot 10^5$$

Assíntotas:

$$P \rightarrow 0 \Rightarrow f(P) \rightarrow -8,3 \cdot 10^5$$

$$P \rightarrow 3,8 \cdot 10^6 \Rightarrow f(P) \rightarrow \infty \text{ (argumento de sec igual a } \pi/2 \text{)}$$



Aplicando o método da secante:  $x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$

$X_n$	$f(X_n)$	$X_{n+1}$
1,00E+06	7,65E+05	2,00E+06
2,00E+06	3,16E+06	6,80E+05
6,80E+05	2,06E+05	5,88E+05
5,88E+05	5,51E+04	5,55E+05
5,55E+05	9,78E+02	5,54E+05
5,54E+05	4,62E+00	5,54E+05

Logo:

$$(P_{adm})_z = 550 \text{ kN}$$

Finalmente, comparando os dois resultados:

$$P_{adm} = 220 \text{ kN}$$