4. Resultante de Sistema de Forças

4.1- Momento de uma Força: Conceituação (ou Torque).

O momento de uma força em relação a um ponto ou a um eixo fornece uma medida de tendência dessa força provocar a rotação de um corpo em torno do ponto ao eixo.

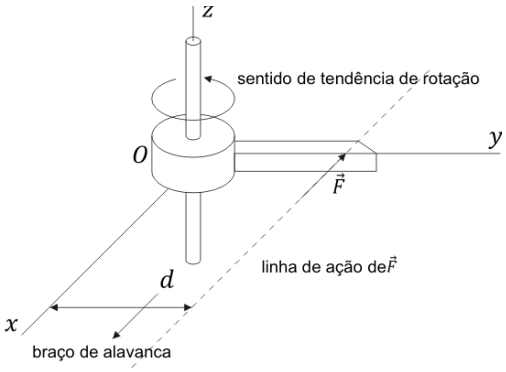

Figura 4. 1

x y- Plano de tendência de rotação.
z- eixo perpendicular ao plano de rotação.

Vetor:

- Intensidade: M=F.d **(Equação 4.1)**
- Direção: perpendicular ao plano de tangência de rotação.
- Sentido: dado pela regra da mão direita.
- Dimensão/unidade: [M_o]=[F].[L] N.m , lb.pé

Observe que se a linha de ação da força $\vec{F}$ concorre no ponto ou no eixo a tendência à rotação em torno do ponto ou eixo é nulo, o que se reflete no braço de alavanca nulo.

- Ex..4.1 e 4.2

4.2- Produto Vetorial.

Sejam dois vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$. Define-se o produto vetorial de $\vec{A}$ com $\vec{B}$ como:

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ **(Equação 4.2)**

- Intensidade: $|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi$

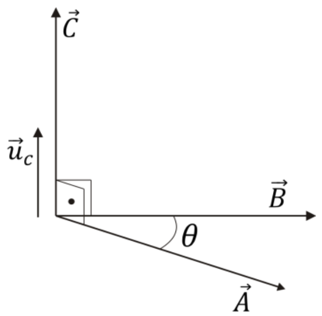

Figura 4. 2

- Direção: perpendicular ao plano formado por $\vec{A}$ e $\vec{B}$.
- Sentido: regra da mão direita ou do saca-rolha.

Pode-se escrever ainda: $\vec{C}$=($|\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta)\, \vec{u}_c$

Propriedades:

- Não-comutativo: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ (mesmas intensidades e direção, porém com sentidos opostos)
- Multiplicação por um escalar: $\alpha(\vec{A} \times \vec{B}) = (\alpha\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (\alpha\vec{B}) = (\vec{A} \times \vec{B})\alpha$

- Distributiva: $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{D}) = \vec{A} \times \vec{B} \; + \; \vec{A} \times \vec{D}$ (manter a ordem do produto)

<u>Formulação vetorial cartesiana:</u>

Considere a base ortogonal de vetores { $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ } definida positiva. Então:

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Figura 4. 3

Considere o produto vetorial entre 2 vetores expressos em forma cartesiana:

$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}) \times (B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}) = (A_yB_z - A_zB_y)\vec{\imath} - (A_xB_z - A_zB_x)\vec{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{\jmath}$ **(Equação 4.3)**

De forma compacta:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

4.3- Momento de uma Força – Formulação Vetorial

Define-se momento de uma força $\vec{F}$ em relação a um ponto “O” como:

$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$ **(Equação 4.4)**

- Intensidade: $|\vec{M}_o| = |\vec{F}||\vec{r}| \sin\theta$
  $|\vec{M}_o| = Fd$
- Direção: $\perp$ ao plano $\vec{F}$ e $\vec{r}$
- Sentido: regra da mão direita ou do saca-rolha.

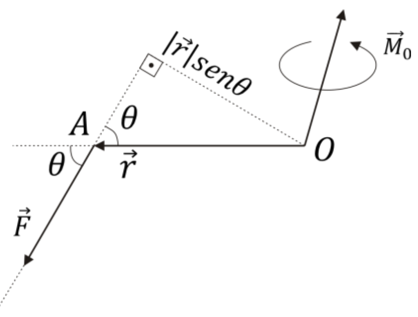

Figura 4. 4

<u>Principio da Transmissibilidade:</u>

Uma mesma força deslocada sobre sua linha de ação possui o mesmo momento em relação a qualquer ponto.

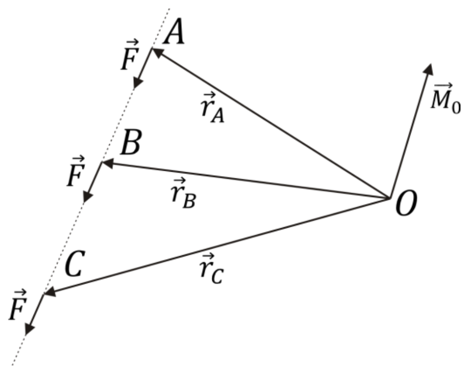

Figura 4. 5

<u>Formulação Vetorial Cartesiana:</u>

$$\overrightarrow{M_o} = \left(r_x\vec{\imath} + r_y\vec{\jmath} + r_z\vec{k}\right) \times \left(F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath} + F_z\vec{k}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad \textbf{(Equação 4.5)}$$

$$\overrightarrow{M_o} = \left(r_yF_z - r_zF_y\right)\vec{\imath} - \left(r_xF_z - r_zF_x\right)\vec{\jmath} + \left(r_xF_y - r_yF_x\right)\vec{k}$$

Significado das componentes de $\overrightarrow{M_o}$: (vamos fazer só p/ a 3º)

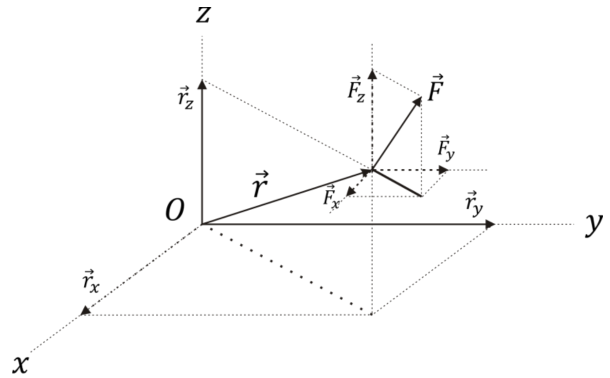

Figura 4. 6

Projetando no plano xy:

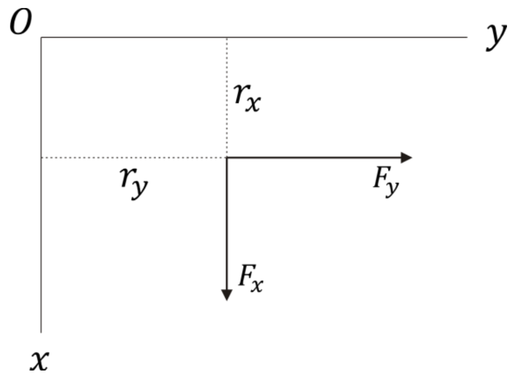

Figura 4. 7

Logo: $-r_yF_x$ é o momento de F_x em relação a 0 ou z.
$+r_x\,F_y$ é o momento de F_y em relação a 0 ou z.

<u>Momento Resultante de um Sistema de Forças:</u>

Seja um sistema de forças $\left\{\vec{F}\right\}_{i=1}^{n}$, o momento resultante do sistema de forças em relação a um ponto "o" é:

$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right)$ **(Equação 4.6)**

- Exemplos 4.4 e 4.5→ págs 105 a 107

4.4- Princípio dos Momentos (ou Teorema de Varignon)

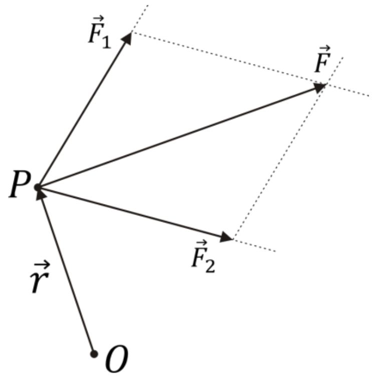

Figura 4. 8

$$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2$$

- Exemplos 4.6 e 4.7→ págs 108 a 110

4.5- Momento de uma Força em Relação a um Eixo

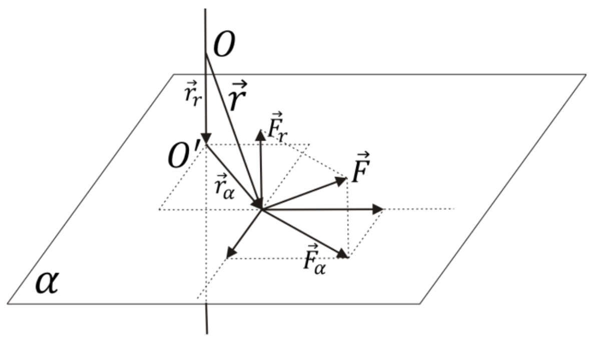

Figura 4. 9

$P \in \alpha$
$\alpha \perp r$
$o' = r \cap \alpha$

- $\vec{F}_\alpha$ = projeção ortogonal de $\vec{F}_r$.
- $\vec{r}_\alpha$ = projeção ortogonal de $\vec{r}_r$.

No plano α:

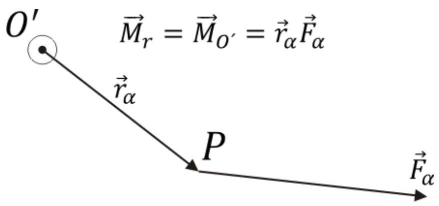

Figura 4. 10

O momento da componente $\vec{F}_\propto$ em relação a "o'" indica a capacidade virtual de um corpo girara em torno do eixo "r".
$\vec{M}_r = \vec{r}_\propto \times \vec{F}_\propto$ **(Equação 4.7)**
Para:$\vec{r}_\propto = \vec{r} - (\vec{r}.\vec{u}_r)\vec{u}_r$ **(Equação 4.8)**
$\vec{F}_\propto = \vec{F} - (\vec{F}.\vec{u}_r)\vec{u}_r$ **(Equação 4.9)**
Logo:
$\vec{M}_r = \vec{r} \times \vec{F} - (\vec{F}.\vec{u}_r)\vec{r} \times \vec{u}_r - (\vec{r}.\vec{u}_r)\vec{u}_r \times \vec{F}$ **(Equação 4.10)**

Projetando $\overrightarrow{M_r}$ na direção de $\overrightarrow{u_r}$:
$\vec{M}_r.\vec{u}_r = (\vec{r} \times \vec{F}).\vec{u}_r - (\vec{F}.\vec{u}_r)(\vec{r} \times \vec{u}_r).\vec{u}_r - (\vec{r}.\vec{u}_r)(\vec{u}_r \times \vec{F})\vec{u}_r$ ou
$\vec{M}_r.\vec{u}_r = \vec{M}_o\vec{u}_r$ **(Equação 4.11)**
Para $\overrightarrow{M_r}//\vec{u}_r$ então: $|\vec{M}_r| = \vec{M}_o.\vec{u}_r$
Finalmente:

$$\vec{M}_r = (\vec{M}_o.\vec{u}_r)\vec{u}_r$$

Isto é, $\overrightarrow{M_r}$ é a projeção de $\overrightarrow{M_o}$ na direção do eixo $\overrightarrow{u_r}$.

<u>Produto Escalar Misto em Rotação Cartesiana</u>

$$M_r = u_r.(\vec{r} \times \vec{F}) = (\vec{r} \times \vec{F}).\vec{u}_r \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_{rx}} & \overrightarrow{u_{ry}} & \overrightarrow{u_{rz}} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$ **(Equação 4.12)**

<u>Momento de um Sistema de Forças em Relação a um Eixo</u>

Seja um sistema de Forças $\{\vec{F}\}_{i=1}^{n}$, então o momento deste sistema de Forças em relação a r será:
$\vec{M}_r = \sum_{i=1}^{n}(\vec{M}_r)_i = \sum_{i=1}^{n}(\vec{M}_o)_i.\vec{u}_r = \vec{u}_r.(\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$ **(Equação 4.13)**

- Ex. 4.8 e 4.9→ págs 120 a 122

4.6- O Binário

O binário é definido por um sistema de forças formado por:
$\{\vec{F},\overrightarrow{-F}\}$

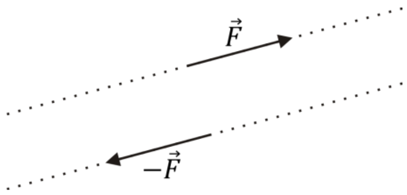

Figura 4. 11

- Resultante de um binário:

$\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$ **(Equação 4.14)**

Momento de um binário

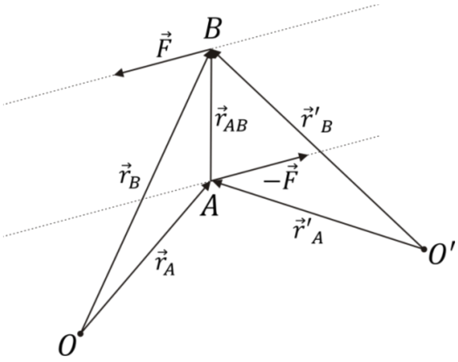

Figura 4. 12

$\overrightarrow{M_o} = \vec{r}_A \times \left(-\vec{F}\right) + \vec{r}_B \times \vec{F} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F}$ e $\vec{M}'_o = \vec{r}'_A \times \left(-\vec{F}\right) + r'_B \times \vec{F} = (\vec{r}'_B - \vec{r}'_A) \times \vec{F}$
(Equação 4.15)

Como por constatação, $\overrightarrow{r_a} - \overrightarrow{r_b} = \overrightarrow{r'_a} - \overrightarrow{r'_b} = \overrightarrow{r_{ab}}$, logo:
$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{M'_o}$
Ou seja, o momento de um binário é o mesmo para qualquer que seja o ponto, é absoluto.

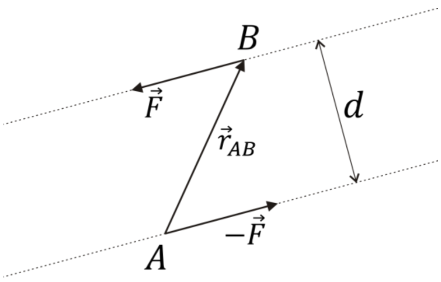

Figura 4. 13

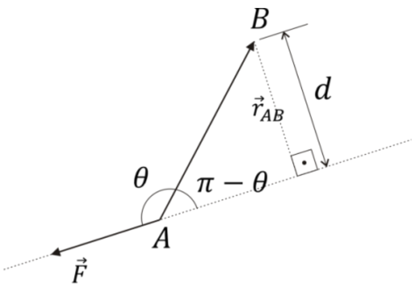

Figura 4. 14

Como visto:
$\vec{M} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}$ **(Equação 4.16)**

- Intensidade: $\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{F}\right| |\vec{r}_{AB}| \sin\theta = \left|\vec{F}\right| |\vec{r}_{AB}| \sin(\pi - \theta) = Fd$

 d é o braço do binário

- Direção: $\perp$ ao plano de $\vec{F}\ e\ \overrightarrow{-F}$
- Sentido dado pela regra da mão direita ou regra do sacar-rolha.

Binários equivalentes: são aqueles que têm o mesmo momento.
Momento resultante de um sistema de binários.

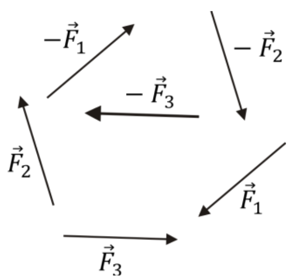

Figura 4. 15

Seja A um sistema de forças formado por n binários: $\{\vec{F_i}, -\vec{F_i}\}$ então o momento resultante deste sistema é:

$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M_i}$ (independe do ponto)

- Ex. 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13→ págs. 127 a 131

4.7- Sistema Equivalente

Dois sistemas de forças são ditos mecanicamente equivalentes se o resultado mecânico de ambos sobre um mesmo corpo é idêntico, isto é, produz o mesmo efeito de translação e de rotação.

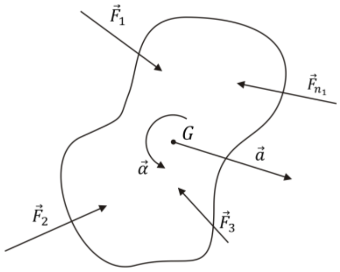

Figura 4. 16

$$\vec{a} = \vec{a}'$$
$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}'$$

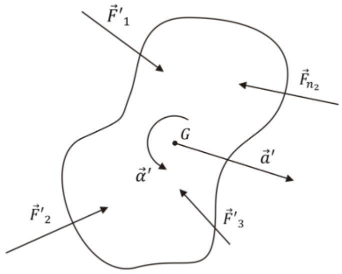

Figura 4. 17

<u>Sistema Mecanicamente Equivalente a uma Força.</u>

Considere a força $\vec{F}$ aplicada no ponto A do corpo rígido abaixo:

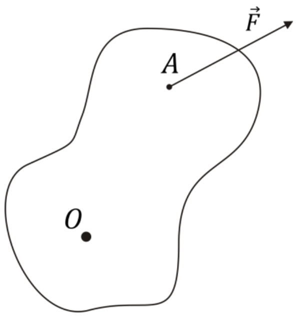

Figura 4. 18

(Força $\vec{F}$ aplicada em A.)

$\equiv$

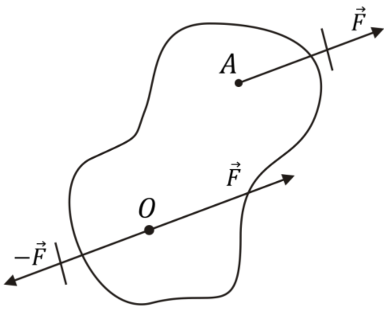

Figura 4. 19

$\equiv$

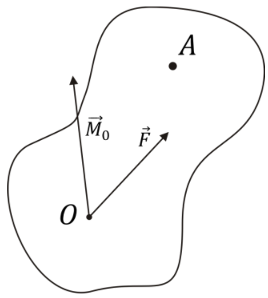

Figura 4. 20

(Força $\vec{F}$ reduzida em O. Sistema equivalente em O.)

4.8- Redução de um Sistema de Forças a uma Força e um Binário

Dado um sistema de forças $\left\{ \{\vec{F_i}\}_{i=1}^{n} ,\ \{\overrightarrow{M_o}\}_{j=1}^{n} \right\}$, então a sua redução num ponto qualquer a uma força e um binário mecanicamente equivalente é dada por:

$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$ **(Equação 4.17)**

$e, \quad \overrightarrow{M_A} = \sum_{l=1}^{n} (\vec{r_l} \times \vec{F_l}) + \sum_{l=1}^{n} \overrightarrow{M_l}$ **(Equação 4.18)**

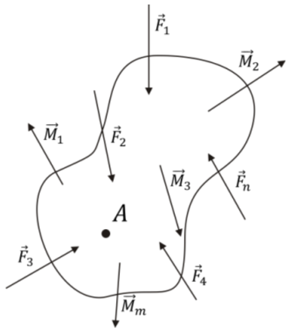

Figura 4. 21

≡

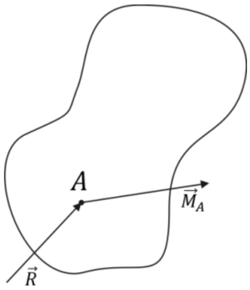

Figura 4. 22

(Sistema reduzido em A mecanicamente equivalente.)

- Exemplos 4.14 e 4.15→ pág. 139 e 140

4.9- Reduções Adicionais de um Sistema de Forças e Momentos

<u>Simplificação para uma Única Força Resultante</u>

Suponha um sistema de forças que se reduz num ponto a uma força e a um momento mutuamente ortogonais.

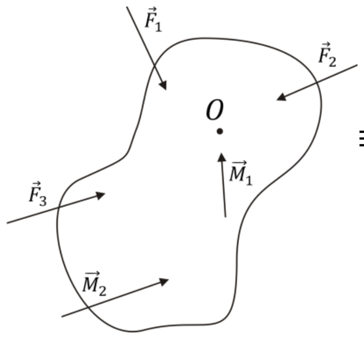

Figura 4. 23

≡

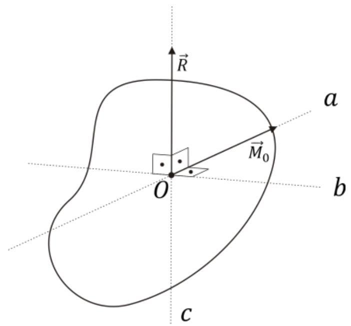

Figura 4. 24

≡

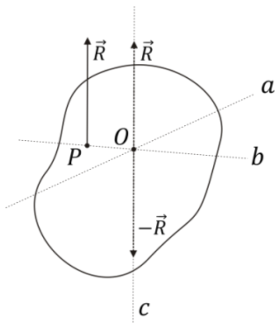

Figura 4. 25

No plano bc:

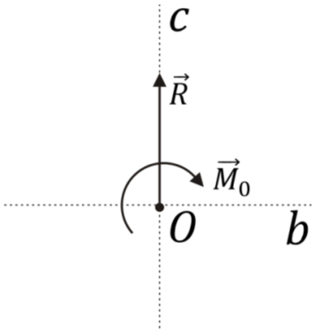

Figura 4. 26

≡

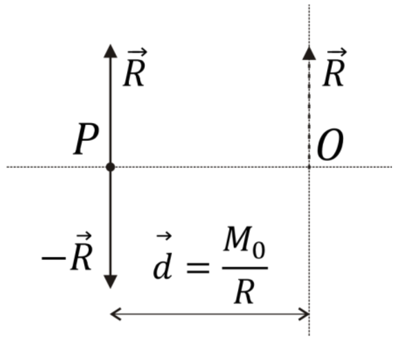

Figura 4. 27

(Binário equivalente a $\vec{M}_0$)

<u>Sistemas de Forças Concorrentes:</u>

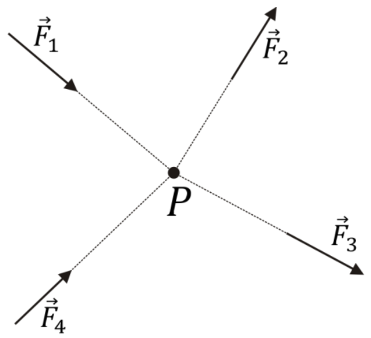

Figura 4. 28

≡

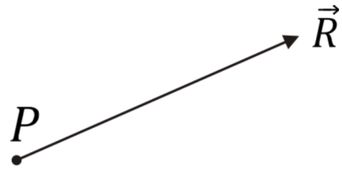

Figura 4. 29

(Observe que $\vec{M}_p = \vec{0}$ e o sistema se reduz a uma força em P.)

<u>Sistema de Forças Coplanares:</u>

Neste caso todas as forças estão aplicadas num mesmo plano, são paralelas a ele. Assim o momento do sistema em relação a qualquer ponto do plano será ortogonal à resultante.

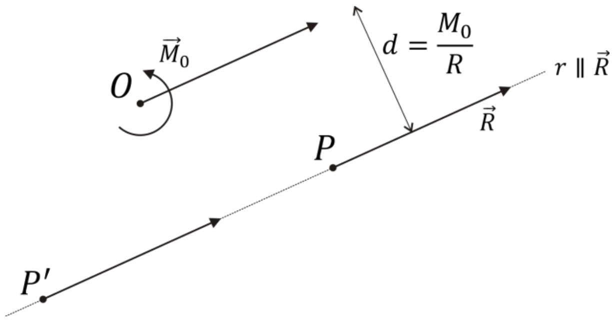

Figura 4. 30

<u>Sistema de Forças Paralelas:</u>

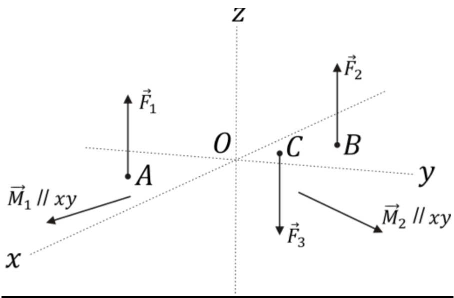

Figura 4. 31

(A, B, C não pertencem necessariamente ao mesmo plano.)

≡

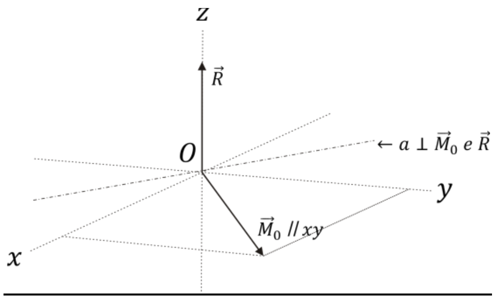

Figura 4. 32

(Redução em O a uma resultante e um momento perpendicular a $\vec{R}$.)

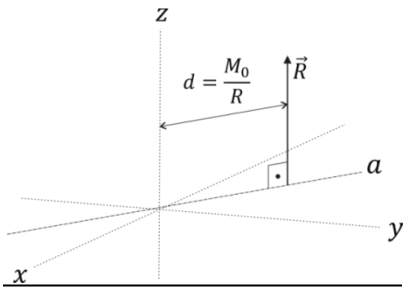

Figura 4. 33

<u>Redução a um Torçor:</u>

Dado um sistema de forças qualquer, ele sempre pode ser reduzido num ponto à resultante e ao momento de redução no ponto.

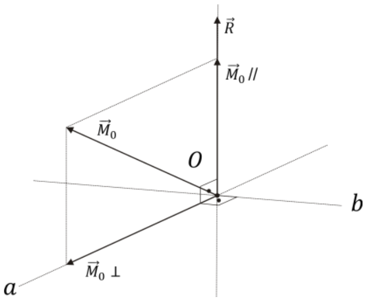

Figura 4. 34

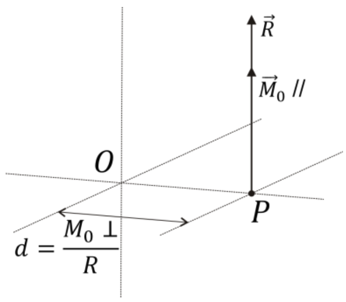

Figura 4. 35

(Redução do sistema à resultante e a um torçor em P.)

- Ex. 4.16, 4.17, 4.18 e 4.19→ pág.144 e 148

4.10- Redução de um Sistema Simples de Cargas Distribuídas

Forças distribuídas sobre uma superfície são comuns devido a forças de pressão ou de arrasto. A força peso já se distribui por todo volume do corpo. De qualquer forma, tanto as primeiras com estas últimas podem ser simplificadas em muitos casos a uma distribuição linear. Vejamos um exemplo:

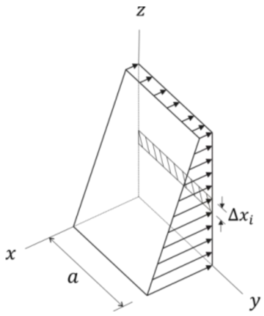

Figura 4. 36

Diagrama de distribuição de pressão hidrostática numa parede vertical.
$p = p(x)$

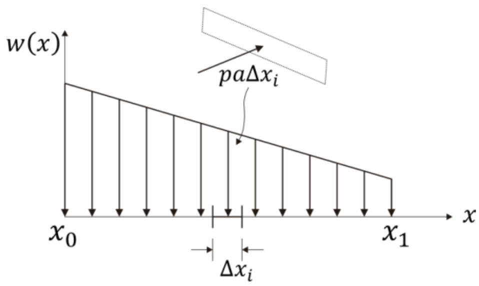

Figura 4. 37

$w\Delta x_i = pa\Delta x_i$
Onde $w = pa$ é a força por unidade de comprimento na direção x ou carga distribuída na direção x.
$w = w(x)$

Detalhe do pedaço Δx_i:

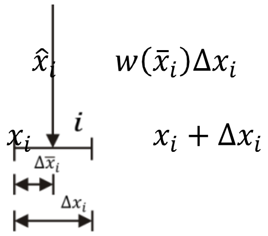

Figura 4. 38

$$w\left(\bar{x}_i\right) = \frac{\int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} ap(x)dx}{\Delta x_i} = \frac{\int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} w(x)dx}{\Delta x_i} \qquad (valor\ médio\ de\ w\ em\ \Delta x_i)$$

A resultante $w(\bar{x}_i)\Delta x_i$ é equivalente ao sistema distribuído em Δx_i e se encontra na coordenada $\hat{x}_i$, $x_i \le \hat{x}_i \le x_i + \Delta x_i$.
No limite, para $\Delta x_i \to 0$:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} w(\bar{x}_i) = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} w(x)dx}{\Delta x_i} = w(x) = \frac{dF}{dx} \qquad \textbf{(Equação 4.18)}$$

Resultante da Força Distribuída:

$$R = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} w(\bar{x}_i)\,\Delta x_i = \int_{x_o}^{x_1} w(x) = \text{área sob o gráfico de distribuições de forças.}$$

<u>Localização da Força Mecanicamente Equivalente a uma Força Distribuída</u>

Suponha conhecida a coordenada $\bar{x}$ onde a força distribuída é equivalente à resultante.

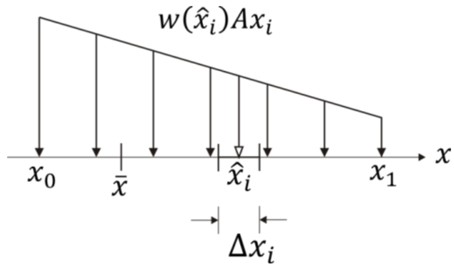

Figura 4. 39

O momento de redução do sistema em $\bar{x}$ é:

$$\overline{M} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} -w(\bar{x}_i)\, \Delta x_i (\hat{x}_i - \bar{x}) = -\int_{x_o}^{x_i} (x - \bar{x}).\, w(x) dx$$

Mas $\overline{M} = 0$ Logo

$$\int_{x_o}^{x_i} (x - \bar{x})\, w(x) dx = 0 \;\rightarrow\; \int_{x_o}^{x_i} \bar{x} w(x) dx = \int_{x_o}^{x_i} x w(x) dx$$

ou; $$\bar{x} = \frac{\int_{x_o}^{x_i} x.w(x)dx}{R}$$ **(Equação 4.19)**

A linha de ação de força resultante equivalente passa pelo centróide do diagrama de força distribuída.

- Ex. 4.20, 4.21 e 4.22→ pág.154 a 157