

10- Momentos de Inércia

Momento de inércia de área: medida da resistência à flexão de uma viga.

Momento de inércia de massa: medida da inércia (resistência) ao movimento de rotação de um corpo sólido.

10.1- Definição de Momentos de Inércia de Área

Considere uma figura plana de área A e um sistema de eixos ortogonais com origem em O :

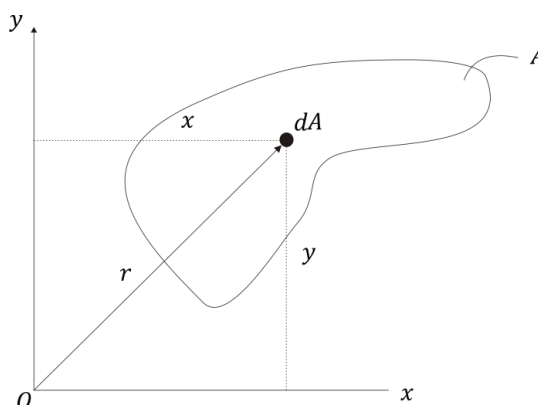


Figura 10.1

Momento de inércia de área em relação ao eixo x :

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (\text{Equação 10.1})$$

Momento de inércia de área em relação ao eixo y :

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad (\text{Equação 10.2})$$

Momento polar de inércia:

$$J_o = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y \quad (\text{Equação 10.3})$$

Observe que os três, I_x , I_y e J_o são sempre positivos.

10.2- Teorema dos Eixos Paralelos para uma Área.

Considere uma figura plana de área A e dois sistemas de eixos ortogonais paralelos entre si, um centrado no centróide da figura e outro num ponto O qualquer:

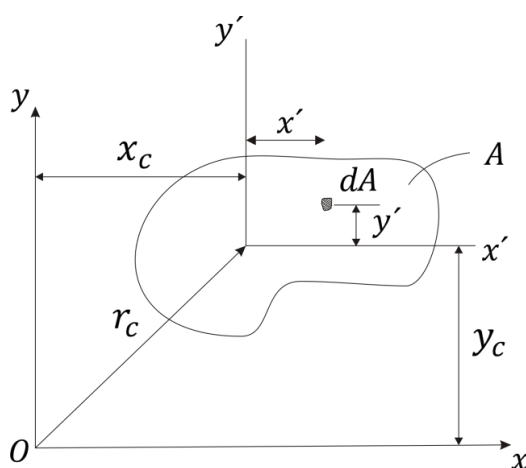


Figura 10.2

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y' + y_c)^2 dA = \int_A (y')^2 dA + \int_A 2y'y_c dA + \int_A (y_c)^2 dA = I_x = I_{x'} + Ay_c^2 \quad (\text{Equação 10.4})$$

Analogamente:

$$I_y = I_{y'} + Ax_c^2 \quad (\text{Equação 10.5})$$

Somando (1) e (2) obtém-se o momento de inércia polar em relação a O.

$$J_o = J_c + Ar_c^2 \quad (\text{Equação 10.6})$$

De (1), (2) e (3) observam-se que o menor momento de inércia ocorre quando os eixos x, y ou o ponto O coincidem com o centróide da figura. Situação de mínima inércia de área.

10.3- Raio de Giração de Uma Área.

Define-se o raio de giração de forma genérica como:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (\text{Equação 10.7})$$

Assim:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad ; \quad r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad ; \quad r_o = \sqrt{\frac{J_o}{A}}$$

10.4- Momentos de Inércia de uma Área por Integração.

- Exemplos 10.1 – 10.4, páginas 425 – 429.

10.5- Momentos de Inércia de Áreas Compostas.

- Propriedades da adição: Considere uma figura plana formada por “n” partes.

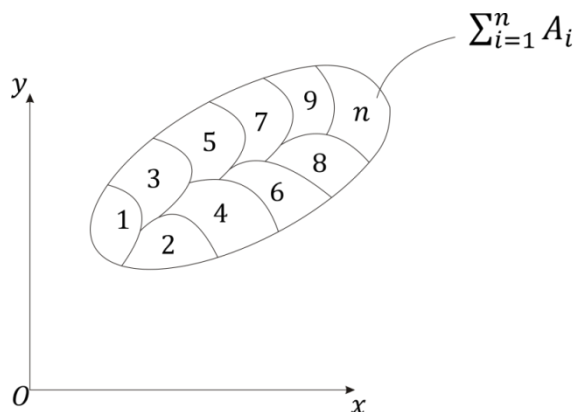


Figura 10.3

Por definição:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} y^2 dA = \sum_{i=1}^n (I_x)_i \quad (\text{Equação 10.8})$$

Analogamente:

$$I_y = \sum_{i=1}^n (I_y)_i \quad (\text{Equação 10.9})$$

$$J_o = \sum_{i=1}^n (J_o)_i \quad (\text{Equação 10.10})$$

Propriedades da Subtração:

Se uma figura é formada pela subtração de uma figura por outra, isto é, $A = A_1 - A_2$, então, por definição:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA - \int_{A_2} y^2 dA = (I_x)_1 - (I_x)_2 \quad (\text{Equação 10.11})$$



Figura 10.4

- Exemplo: 10.5, págs 432 – 434.

10.6- Produto de Inércia de uma Área.

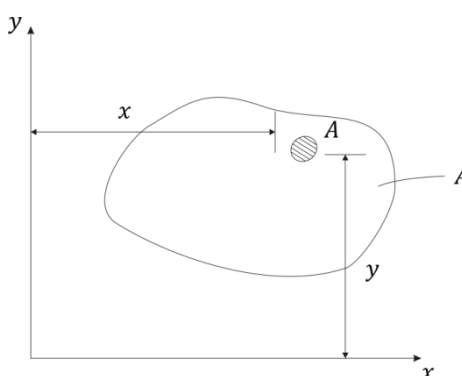


Figura 10.5

Define-se o produto de inércia de uma figura plana de área A relativamente aos eixos x e y como:

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

Observe que: I_{xy} pode assumir valores positivos e negativos e que:

$$I_{yx} = I_{xy} = \int_A xy dA \quad (\text{Equação 10.12})$$

Propriedade de Simetria:

Se uma figura tem ao menos um eixo de simetria, por exemplo y , então o produto de inércia é nulo.

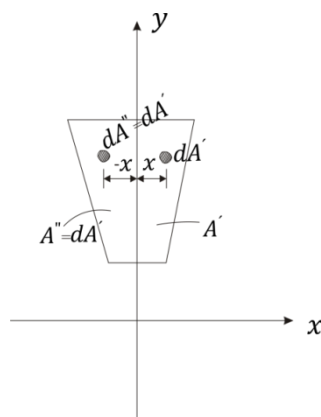


Figura 10. 6

Da propriedade da adição:

$$\int_A xy \, dA = \int_{A'} xy \, dA' + \int_{A''} xy \, dA'' = \int_{A'} xy \, dA' + \int_{A'} -xy \, dA' = 0 \quad (\text{Equação 10.13})$$

Teorema dos Eixos Paralelos.

Considere uma figura plana de área A e dois sistemas de eixos ortogonais paralelos entre si, um centrado no centróide da figura e outro num ponto O qualquer:

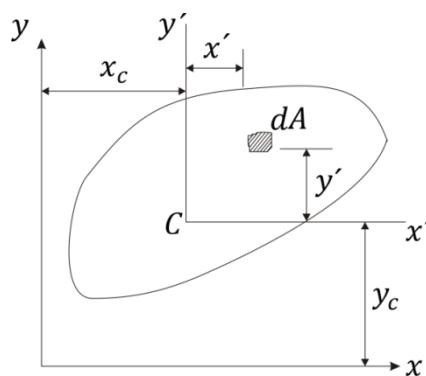


Figura 10. 7

Da definição de produto de inércia relativamente a x e y :

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A xy \, dA = (x' + x_c)(y' + y_c) dA \\ &= \int_A x' y' \, dA + \int_A x' y_c \, dA + \int_A y' x_c \, dA + \int_A x_c y_c \, dA \end{aligned}$$

$$I_{xy} = I_{x'y'} + Ax_c y_c \quad (\text{Equação 10.14})$$

- Exemplos 10.7 – 10.8, páginas 439 – 441

10.7- Momentos de Inércia de Área em Relação a Eixos Inclinados.

Considere a figura plana abaixo e os sistemas de eixos com origem em O.

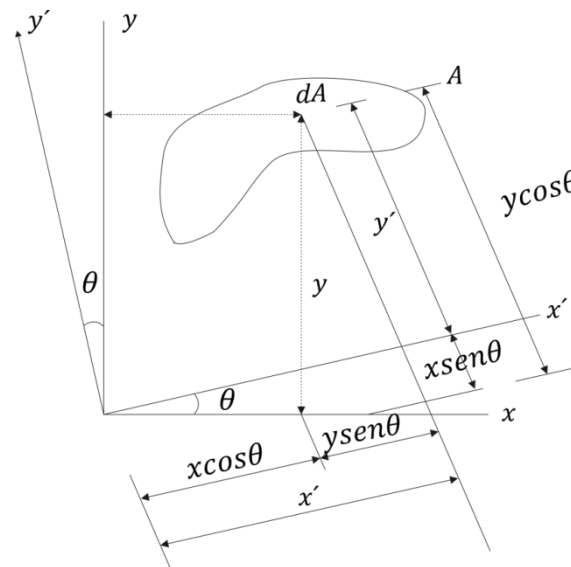


Figura 10. 8

Transformação de coordenadas:

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (\text{Equação 10.15})$$

$$y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \quad (\text{Equação 10.16})$$

Da definição do momento de inércia:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int_A (y')^2 dA = \int_A (-x \sin \theta + y \cos \theta)^2 dA \\ &= \int_A (x^2 \sin^2 \theta + 2xy \cos \theta \sin \theta + y^2 \cos^2 \theta) dA \\ &= \sin^2 \theta \int_A x^2 dA - 2 \cos \theta \sin \theta \int_A xy dA + \cos^2 \theta \int_A y^2 dA \\ &= \frac{\cos 2\theta - 1}{2} I_y - \sin 2\theta I_{xy} + \frac{\cos^2 \theta + 1}{2} I_x \end{aligned}$$

Ou

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos \theta - I_{xy} \sin 2\theta \quad (1)$$

$$I_{x'} = I_{x'}(\theta) \quad (\text{Equação 10.17})$$

Da definição do produto de inércia:

$$\begin{aligned} I_{x'y'} &= \int_A x'y' dA = \int_A (x \cos \theta + y \sin \theta)(-x \sin \theta + y \cos \theta) dA \\ &= \int_A (-x^2 \sin \theta \cos \theta + xy \cos^2 \theta - xy \sin^2 \theta + y^2 \sin \theta \cos \theta) dA \\ &= -\sin \theta \cos \theta \int_A x^2 dA + (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \int_A xy dA \\ &\quad + \sin \theta \cos \theta \int_A y^2 dA = \frac{I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta + \frac{I_x}{2} \sin 2\theta \end{aligned}$$

Ou,

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (2)$$

$$I_{x'y'} = I_{x'y'}(\theta) \quad (\text{Equação 10.18})$$

Observe que :

$$I_{y'} = I_{x'} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (3)$$

$$I_{y'} = I_{y'}(\theta) \quad (\text{Equação 10.19})$$

E ainda o momento polar de inércia é:

$$I_0 = I_{y'} + I_{x'} = I_y + I_x \quad (\text{Equação 10.20}) \quad (\text{depende do sistema de eixos})$$

Momentos principais de inércia.

O momento de inércia em relação a eixos passando por O admite um máximo e um mínimo.

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = -2 \frac{(I_x - I_y)}{2} \sin 2\theta_1 - 2I_{xy} \cos 2\theta_1 = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\theta_1 = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (\text{Equação 10.21})$$

A equação 4 admite 2 raízes:

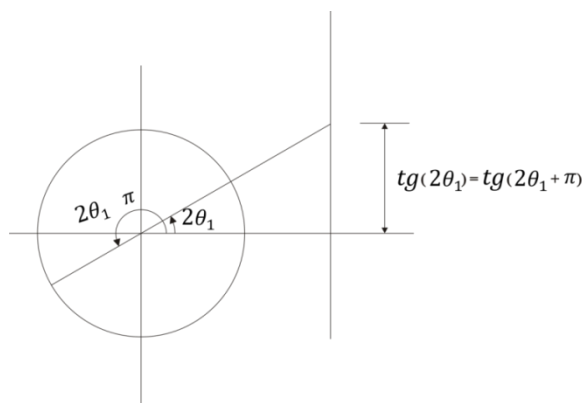


Figura 10.9

$$\theta_1' \text{ e } \theta_1'' = \theta_1' + \frac{\pi}{2} \quad (5) \quad \text{eixos principais de inércia.}$$

Substituindo as raízes θ_1' e θ_1'' na equação (1) obtêm-se :

$$I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (\text{Equação 10.22})$$

$$I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (\text{Equação 10.23})$$

Substituindo as raízes θ_1' e θ_1'' na equação (2) obtêm-se:

$$I_{x'y'} = I_{x''y''} = 0 \quad (\text{Equação 10.24})$$

Ou seja, o produto de inércia é nulo relativamente aos eixos principais de inércia.

Obs.: todo eixo de simetria é eixo principal de inércia.

- Exemplo 10.9, páginas 443 – 444

10.9- Momento de Inércia de Massa

Considere o corpo sólido e o sistema de eixos ortogonais centrado em O.

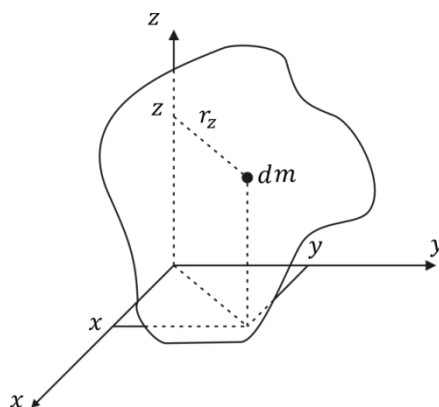


Figura 10. 10

O momento de inércia em relação a um eixo (por exemplo o eixo Z) é por definição:

$$J_z = \int_M r_z^2 dM = \int_V r_z^2 \rho dV = \int_V (x^2 + y^2) \rho dM \quad (1) \quad \text{(Equação 10.25)}$$

Observe que $J_z > 0$

Analogamente:

$$J_x = \int_M r_x^2 dM = \int_V r_x^2 \rho dV = \int_V (z^2 + y^2) \rho dM \quad (1) \quad \text{(Equação 10.26)}$$

$$J_y = \int_M r_y^2 dM = \int_V r_y^2 \rho dV = \int_V (x^2 + z^2) \rho dM \quad (2) \quad \text{(Equação 10.27)}$$

Dimensão e unidades de momento de inércia de massa

$$[J] = [M][L]^2$$

Sistema internacional (S.I.) $kg \cdot m^2$

Sistema americano (FPS) $slug \cdot pé^2$

- Exemplos 10.11-12 , páginas 453 - 454

Teorema dos eixos paralelos

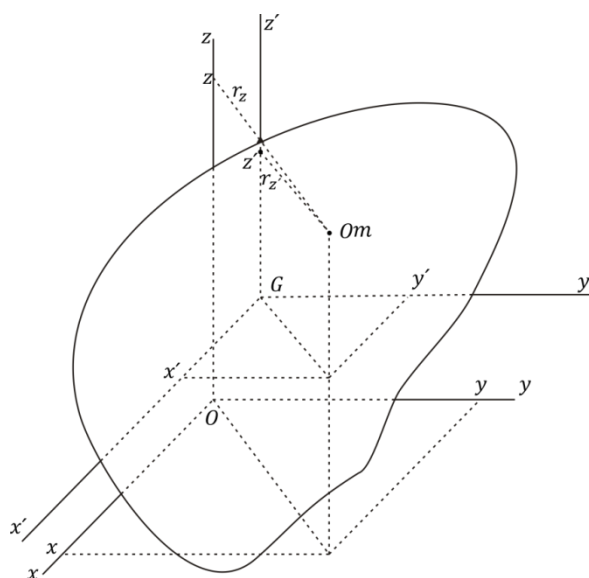


Figura 10. 11

$$r_z^2 = x^2 + y^2 = (x' + x_G)^2 + (y' + y_G)^2 = (x')^2 + 2x'x_G + (x_G)^2 + (y')^2 + 2y'y_G + (y_G)^2 \quad (\text{Equação 10.28})$$

$$J_z = \int_M r_z^2 dM = \int_M ((x')^2 + (y')^2) dm + 2 \int_M x'x_G dM + 2 \int_M y'y_G dM + \int_M \frac{((x_G)^2 + (y_G)^2)}{r_z^2} dM \quad (\text{Equação 10.29})$$

Onde r_z^2 é a distancia de G

$$\text{Obs : } x'_G = \frac{\int_M x' dM}{M} \text{ e } y'_G = \frac{\int_M y' dM}{M}$$

Logo:

$$J_z = J_{z'} + M(r_z)_G^2 \quad (\text{Equação 10.30})$$

Analogamente:

$$J_x = J_{x'} + M(r_x)_G^2 \quad (\text{Equação 10.31})$$

$$J_y = J_{y'} + M(r_y)_G^2 \quad (\text{Equação 10.32})$$

Raio de giração

Por definição o raio de giração de massa em relação a um eixo r:

$$k_x^2 = \frac{J_x}{M} \quad \text{ou} \quad k_x = \sqrt{\frac{J_x}{M}} \quad (\text{Equação 10.32})$$

$$k_y^2 = \frac{J_y}{M} \quad \text{ou} \quad k_y = \sqrt{\frac{J_y}{M}} \quad (\text{Equação 10.33})$$

$$k_z^2 = \frac{J_z}{M} \quad \text{ou} \quad k_z = \sqrt{\frac{J_z}{M}} \quad (\text{Equação 10.34})$$

- Dimensão: [L]

O raio de giração de uma massa relativamente a um eixo pode ser entendido como a concentração de massa m num ponto no qual o momento de inércia de massa relativamente ao eixo é o mesmo.

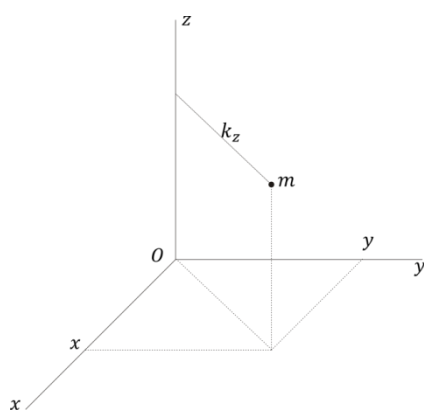


Figura 10. 12

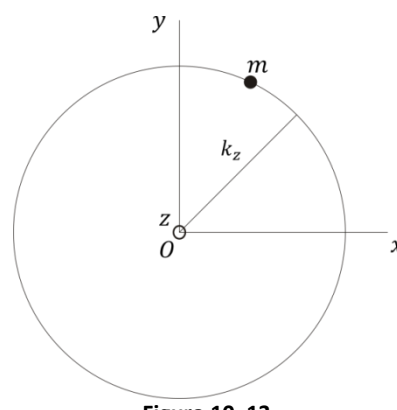


Figura 10. 13

Corpos compostos.

- Propriedade da adição:

$$J_x = \sum_{i=1}^n (J_x)_i \quad (\text{Equação 10.35})$$

$$J_y = \sum_{i=1}^n (J_y)_i \quad (\text{Equação 10.35})$$

$$J_z = \sum_{i=1}^n (J_z)_i \quad (\text{Equação 10.36})$$

- Propriedade da subtração.

$$J_x = J_{x_1} - J_{x_2} \quad (\text{Equação 10.37})$$

$$J_z = J_{z_1} - J_{z_2} \quad (\text{Equação 10.38})$$

$$J_y = J_{y_1} - J_{y_2} \quad (\text{Equação 10.39})$$

- Exemplos 10.13 -14 , páginas 455 - 457