

## 7- Forças Internas

Ao realizar uma sessão num corpo expõem-se aí um sistema de forças internas. Considere, por exemplo, o diagrama de corpo livre de uma região no espaço:

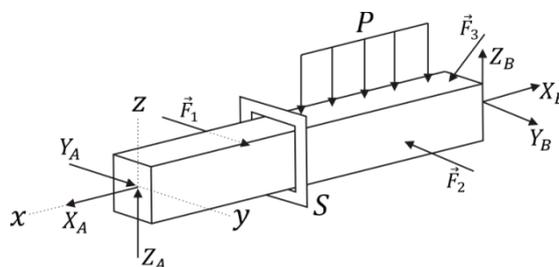


Figura 7.1

Ao seccionar em “S”, resultam duas partes e nas seções de corte aparecem as forças internas:

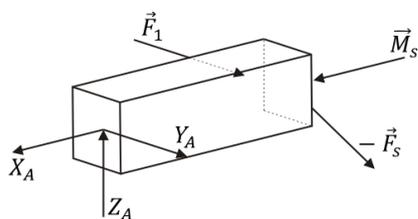


Figura 7.2

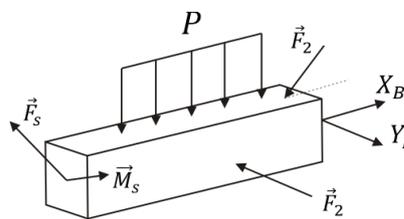


Figura 7.3

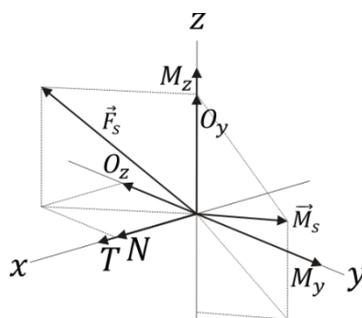


Figura 7.4

### Componente da Força Interna $\vec{F}_s$ :

- Em “x”:  $N$  = Força axial ou normal;
- Em “y”:  $Q_y$  = Força cortante ou de cisalhamento;
- Em “z”:  $Q_z$  = Força cortante ou de cisalhamento.

### Componente do Momento Interno $\vec{M}_s$ :

- Em “x”:  $T$  = Momento torção;
- Em “y”:  $M_y$  = Momento fletor;
- Em “z”:  $M_z$  = Momento fletor.

Para determinar as componentes de  $\vec{F}_s$  e  $\vec{M}_s$  aplica-se a equação de equilíbrio a uma ou outra parte. Este método é chamado de método das seções.

- Exemplos 7.1 – 7.6 → págs 280-285.

## 7.2- Expressões e Diagramas de Forças e Momentos Internos

No dimensionamento de elementos estruturais, como barras, vigas, eixos, faz-se necessário conhecer a seção mais criticamente solicitada, fato que exige conhecer a expressão ou gráfico das forças e momentos internos ao longo desses elementos.

Por exemplo: Considere a viga BA apoiada abaixo:

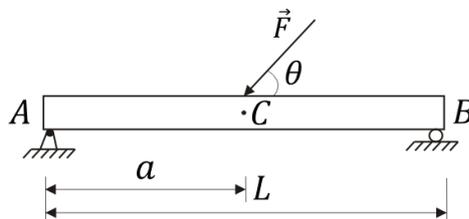


Figura 7.5

O d.c.l. é:

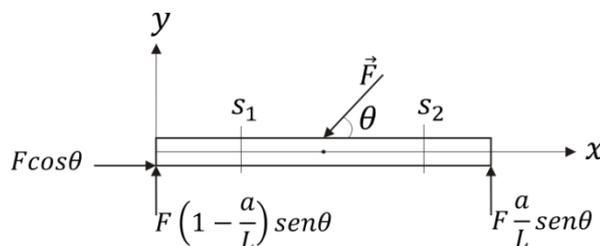


Figura 7.6

Na seção genérica S, entre A e C tem-se:

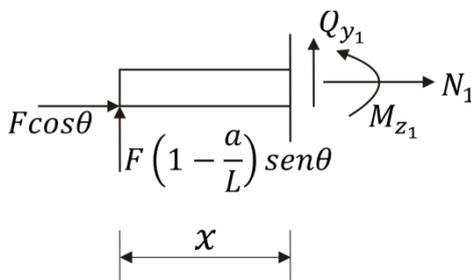


Figura 7.7

Da equação de equilíbrio:

$$R_x = F \cdot \cos \theta + N_1 = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = -F \cdot \cos \theta \quad (\text{Equação 7.1})$$

$$R_y = F \cdot \left(1 - \frac{a}{L}\right) \cdot \text{sen } \theta + Q_{y_1} = 0 \quad \rightarrow \quad Q_{y_1} = -F \cdot \left(1 - \frac{a}{L}\right) \cdot \text{sen } \theta \quad (\text{Equação 7.2})$$

$$M_{z_{S_1}} = M_{z_1} - F_x \cdot \left(1 - \frac{a}{L}\right) \cdot \text{sen } \theta = 0 \quad \rightarrow \quad M_{z_1} = F_x \cdot \left(1 - \frac{a}{L}\right) \cdot \text{sen } \theta \quad (\text{Equação 7.3})$$

Na seção genérica C e B:

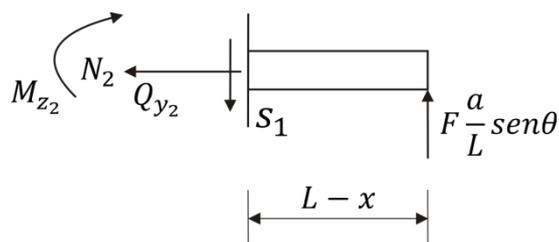


Figura 7.8

$$(4) -R_x = -N_2 = 0 \rightarrow N_2 \quad \text{(Equação 7.4)}$$

$$(5) -R_y = -Q_{y_2} + F \cdot \frac{a}{L} \cdot \text{sen } \theta = 0 \rightarrow Q_{y_2} = F \cdot \frac{a}{L} \cdot \text{sen } \theta \quad \text{(Equação 7.5)}$$

$$(6) -M_{z_2} = -M_{z_2} + F \cdot \frac{a}{L} \cdot \text{sen } \theta (L - x) \rightarrow M_{z_2} = F \cdot a \cdot \text{sen } \theta \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \text{(Equação 7.6)}$$

Com a posse das expressões (1) a (6) é possível representar graficamente o comportamento das forças e momentos internos. Mas antes disso vejamos a seguinte convenção de sinal para eles:

- Força axial:

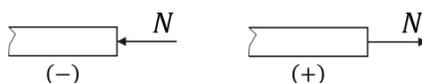


Figura 7.9

- Força cortante:



Figura 7.10

- Momento fletor:



Figura 7.11

- Momento torção:



Figura 7.12

Diagrama de Forças e Momentos Internos:

Considerando o exemplo anterior:

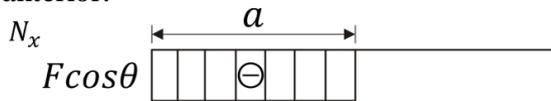


Figura 7.13



Figura 7.14

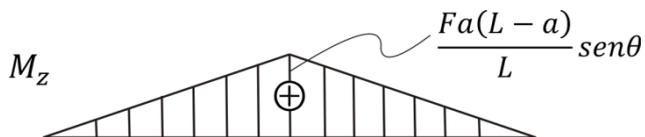


Figura 7.15

Dicas Práticas:

1) Descontinuidades (ou saltos) nos diagramas

- Força axial:

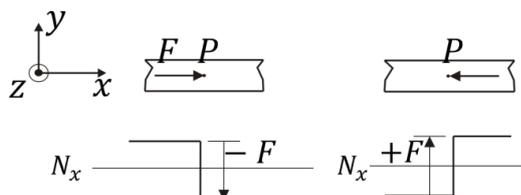


Figura 7.16

- Força cortante:

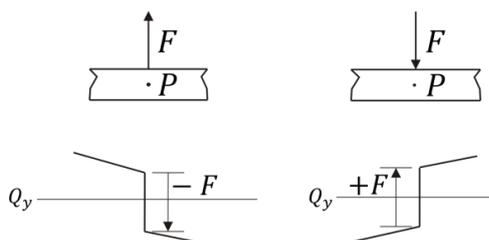


Figura 7.17

- Momento fletor:

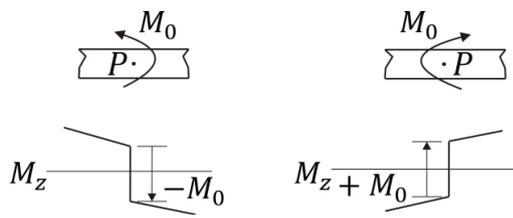


Figura 7.18

- Momento torção:

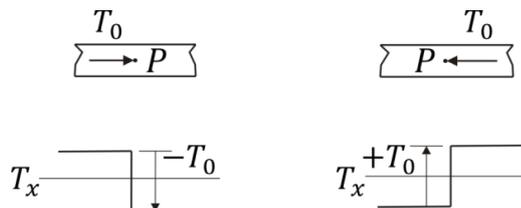


Figura 7. 19

- 2) Observe o tipo de apoio nas extremidades:

- Extremidade livre:

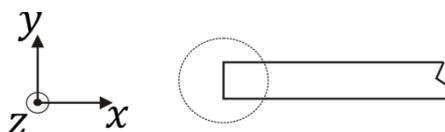


Figura 7. 20

- Extremidade apoiada com um vínculo de translação transversal:

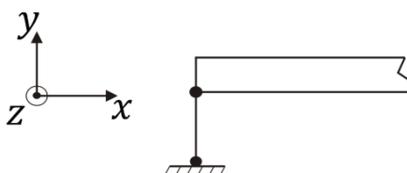


Figura 7. 21

- Extremidade apoiada com dois vínculos de translação transversal:

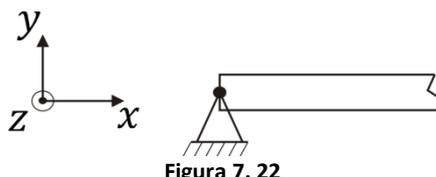


Figura 7. 22

- Extremidade apoiada com dois vínculos de translação transversal e um de rotação:

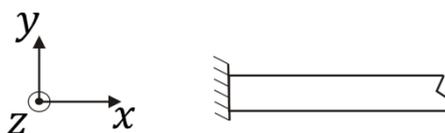
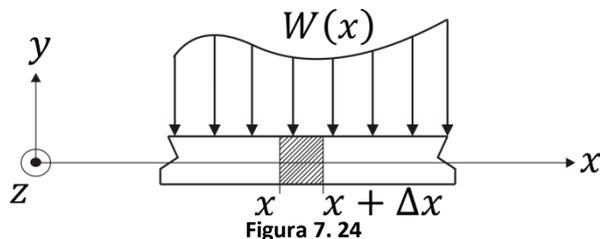


Figura 7. 23

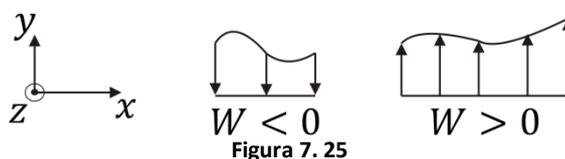
- Exemplos 7.7 – 7.8 → págs.293-295

### 7.3- Relações Entre Carregamento Transversalmente Distribuído, Força Cortante e Momento Fletor:

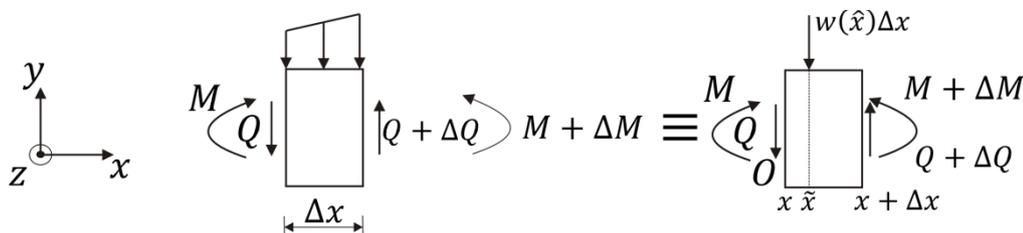
Considere um trecho de viga transversalmente carregada:



Convencionou-se que a carga transversalmente distribuída  $W(x)$  é positiva se orientada no sentido negativo de  $y$  e negativo se orientada no sentido contrário ( $x > y$ ,  $z$  devem formar um sistema definido positivo):



Isto posto, analisando o dcl da fatia destacada acima:



Da condição de repouso da fatia:

$$1 - R_y = Q + \Delta Q - Q - W(\hat{x})\Delta x = 0$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta x} = w(\hat{x}) \therefore x \leq \hat{x} \leq x + \Delta x \quad (\text{Equação 7.7})$$

Tomando o limite de (1) para  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} = \frac{dQ}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} w(\hat{x}) = w(x)$$

Isto é:

$$2 - \frac{dQ}{dx} = w(x) \quad (\text{resultado diferente do livro})$$

A taxa de variação da força cortante numa seção é igual a carga transversalmente distribuída sobre a seção

Continuando:

$$4 - M_0 = M + \Delta M - M + (Q + \Delta Q)\Delta x - W(\hat{x})(\hat{x} - x)\Delta x = 0 \rightarrow \frac{\Delta M}{\Delta x} = -(Q + \Delta Q) + W(\hat{x})(\hat{x} - x); x \leq \hat{x} \leq x + \Delta x \quad (\text{Equação 7.8})$$

Tomando o limite de (3) para  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$5 - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} = \frac{dM}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} (-(Q + \Delta Q) + W(\hat{x})(\hat{x} - x)) = -Q \quad (\text{Equação 7.9})$$

Isto é:

$$6 - \frac{dM}{dx} = -Q \quad (\text{resultado diferente do livro})$$

A taxa de variação do momento fletor numa seção é igual a força cortante na seção de sinal contrário:

Partindo da equação (3):

$$dQ = W(x)dx \quad (\text{Equação 7.10})$$

Integrando da seção "0" até a seção qualquer "S" de coordenada "x":

$$7 - \int_0^S dQ = \int_{x_0}^X W(x)dx \rightarrow Q(x) - Q(x_0) = \int_{x_0}^X W(x)dx \quad \text{ou}$$

$$8 - Q(x) = Q(x_0) + \int_{x_0}^X W(x)dx \quad (\text{Equação 7.11})$$

Partindo agora da equação (6):

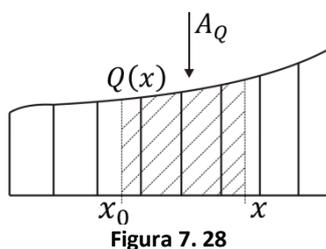
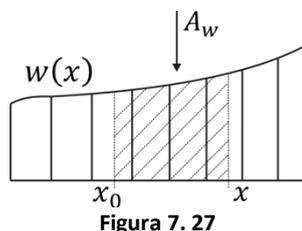
$$dM = -Qdx$$

Integrando da seção "0" até a seção qualquer "S" de coordenada "x":

$$9 - \int_0^S dM = - \int_{x_0}^X Qdx \rightarrow M(x) - M(x_0) = - \int_{x_0}^X Qdx \quad \text{ou}$$

$$10 - M(x) = M(x_0) - \int_{x_0}^X Qdx \quad (\text{Equação 7.12})$$

Interpretação gráfica das equações (5) e (6):



- Exemplos 7.9 – 7.12 → págs.301 - 305