9- Centro de Gravidade e Centróide

9.1- Centro de gravidade de um sistema de pontos materiais

Considere um sistema de n pontos materiais sujeitos a seus pesos numa direção relativamente qualquer:

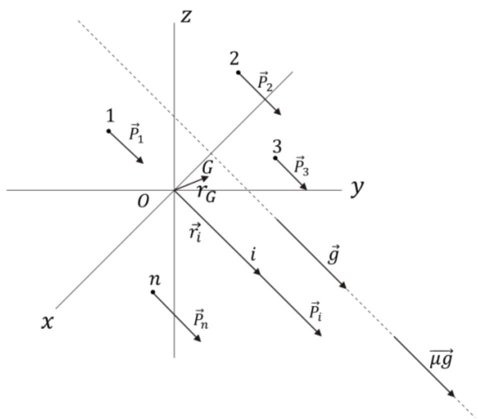

Figura 9. 1

<u>Centro de gravidade</u>

Existe um ponto G para o qual o momento das forças peso de cada ponto material do sistema é nulo para qualquer que seja a orientação relativa do campo gravitacional $\vec{g}$.

Por definição:

$\overrightarrow{n_G} = \sum_i^n(\vec{r_i} - \overrightarrow{r_G}) \times \vec{P_i} = \vec{0}$ **(Equação 9.1)**

$\sum_i^n \vec{r_i} \times \vec{P_i} - \sum_i^n \overrightarrow{r_G} \times \vec{P_i} = 0$

Ou

$\sum_i^n \vec{r_i} \times \vec{P_i} - \overrightarrow{r_G} \times \sum_i^n \vec{P_i} = \sum_i^n \vec{r_i} \times \vec{P_i} - \overrightarrow{r_G} \times \vec{P} = \vec{0}$

Ou

$\sum_i^n \vec{r_i} \times \vec{P_i} = \overrightarrow{r_G} \times \vec{P} \quad (1)$ **(Equação 9.2)**

De (1) tem-se que o momento da força de um sistema de pontos material relativamente a um ponto qualquer é igual ao momento do peso resultante aplicado em G relativamente a esse ponto qualquer.

Reescrevendo a equação (1), substituindo nela $\vec{P_i} = P_i\overrightarrow{u_g}$, obtém-se:

$\sum_i^n \vec{r} \times \left(P_i\overrightarrow{u_g}\right) - \overrightarrow{r_G} \times \left(P_i\overrightarrow{u_g}\right) = \vec{0}$ **(Equação 9.3)**

Ou

$\sum_i^n(P_i\vec{r_i} - P\overrightarrow{r_G}) \times \overrightarrow{u_G} = \vec{0}\,, \quad \forall \vec{u} \in$

logo:

$\sum_i^n(P_i\vec{r_i} - P\overrightarrow{r_G}) = \vec{0} \quad (2)$ **(Equação 9.4)**

Escrevendo $\vec{r_i} = x_i\vec{\imath} + y_i\vec{\jmath}z_i\vec{k}$ $\quad e \quad$ $\overrightarrow{r_G} = x_G\vec{\imath} + y_G\vec{\jmath}z_G\vec{k}$ resulta à (2):

$(\sum_i^n P_ix_i - Px_G)\vec{\imath} + (\sum_i^n P_iy_i - Py_G)\vec{\jmath} + (\sum_i^n P_iz_i - Pz_G)\vec{k} = \vec{0}$ **(Equação 9.5)**

Finalmente obtém-se as coordenadas de G:

$$x_G = \frac{\sum_i^n P_ix_i}{P}$$

$$y_G = \frac{\sum_i^n P_iy_i}{P}$$ **(Equação 9.6)**

$$z_G = \frac{\sum_i^n P_iz_i}{P}$$

Centro de massa

Se nas equações (3) substitui-se P_i por $m_i g$ assumindo g uniforme e P por mg, obtém-se as coordenadas do centro de massa M:

$$x_M = \frac{\sum_i^n m_i x_i}{m} = x_G$$

$$y_M = \frac{\sum_i^n m_i y_i}{m} = y_G \qquad \textbf{(Equação 9.7)}$$

$$z_M = \frac{\sum_i^n m_i z_i}{m} = z_G$$

Logo, se o campo gravitacional for homogêneo, o centro de massa coincide com o centro de gravidade.

9.2- Centro de Gravidade e Centróide de um Corpo

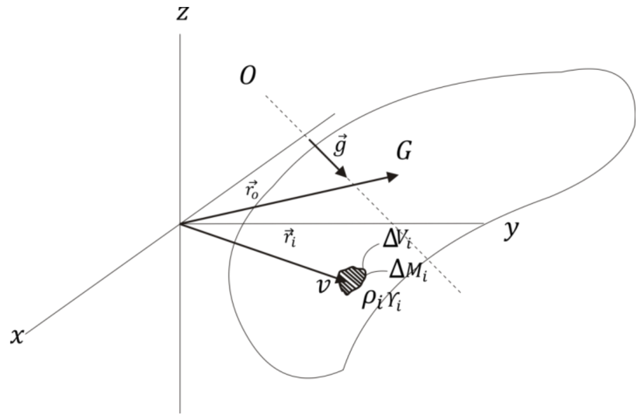

Figura 9. 2

Um corpo pode ser considerado como um sistema infinito de pontos materiais de massa infinitesimal, assim na equação (2) ter-se-ia:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r_i}\,\Delta P_i - P\overrightarrow{r_G} = \vec{0}$$

Ou

$$\sum_{i=1}^n \vec{r_i}\,\gamma_i \Delta v_i - P\overrightarrow{r_G} = \vec{0} \qquad \textbf{(Equação 9.8)}$$

Tomando o limite p/ $n \to \infty \quad e \quad \Delta v_i \to 0$:

$$\int_v \vec{r}\gamma dv - P\overrightarrow{r_G} = \vec{0} \qquad \textbf{(Equação 9.9)}$$

Analogamente ás equações (3), obtém-se as coordenadas de G:

$$x_G = \frac{\int_V x\gamma dv}{P}$$

$$y_G = \frac{\int_V y\gamma dv}{P} \qquad \textbf{(Equação 9.10)}$$

$$z_G = \frac{\int_V z\gamma dv}{P}$$

Para obter as coordenadas do centro de massa, considere em (6) que a aceleração da gravidade é homogênea. Resulta pois:

$$x_n = \frac{\int_V x\rho dv}{m}$$

$$y_n = \frac{\int_V y\rho dv}{m} \qquad \textbf{(Equação 9.11)}$$

$$z_n = \frac{\int_V z\rho dv}{m}$$

Centróide

O centróide C é o centro geométrico do corpo. Ele coincide com o centro de massa se o corpo tiver massa específica uniforme. Portanto:

$$x_c = \frac{\int_V x dv}{v}$$
$$y_c = \frac{\int_V y dv}{v} \qquad \textbf{(Equação 9.12)}$$
$$z_c = \frac{\int_V z dv}{v}$$

Simetria

Se um corpo apresenta simetria geométrica em relação a um plano, então o centróide pertence a esse plano

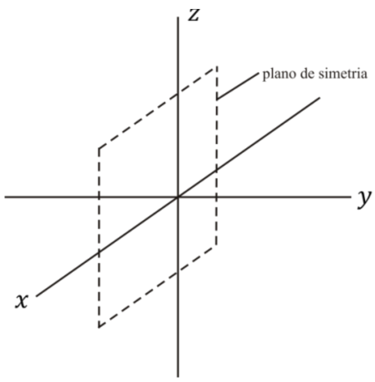

Figura 9. 3

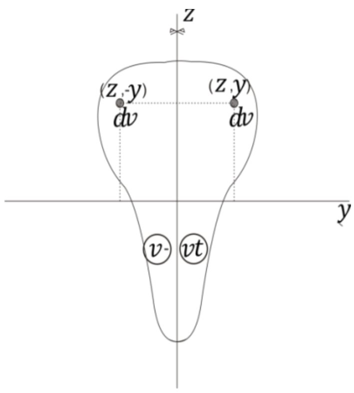

Figura 9. 4

$$y_c = \frac{\int_V y dv}{v} = \frac{\int_{V+} y dv + \int_{V-} y dv}{v} = \frac{\int_{V+} y dv + \int_{V+} -y dv}{v} = 0 \qquad \textbf{(Equação 9.13)}$$

Logo, se houver 2 planos de simetria, o centróide estará na interseção dos dois planos, e se houver 3 planos de simetria , o centróide estará na interseção os 3 planos.

Centróide de uma Casca

$$x_c = \frac{\int_A x dA}{A}$$
$$y_c = \frac{\int_A y dA}{A} \qquad \textbf{(Equação 9.14)}$$
$$z_c = \frac{\int_A z dA}{A}$$

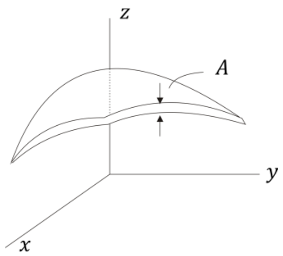

Figura 9. 5

Centróide de uma Linha

$$x_c = \frac{\int_L x dL}{L}$$
$$y_c = \frac{\int_L y dL}{L} \qquad \textbf{(Equação 9.15)}$$
$$z_c = \frac{\int_L z dL}{L}$$

- Exemplos 9.1-9.8→ págs. 376-385

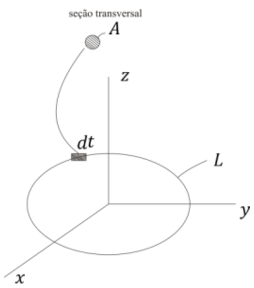

Figura 9. 6

9.3- Corpos Compostos

Propriedades da Adição

Considere um corpo constituído por “n” partes:

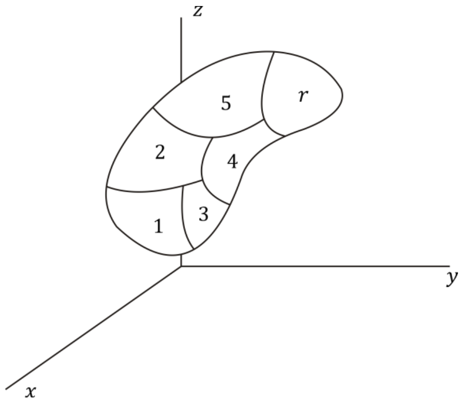

Figura 9. 7

Pode-se escrever, por exemplo, a coordenada x_G do centro de gravidade:

$x_G = \frac{\int_V x\gamma dv}{P} = \frac{\sum_{i-1}^{n} \int_V x\gamma dv}{P}$ **(Equação 9.16)**

Mas observe que:

$(x_i)_i = \frac{\int_V x\gamma dv}{P_i} \quad ou \quad \int_V x\gamma dv = (x_G)_i\, P_i$ **(Equação 9.17)**

Substituindo (2) em (1):

$x_G = \frac{\sum_{i-1}^{n} (x_G)_i\, P_i}{P}$ **(Equação 9.18)** (média ponderada das coordenadas x do G de cada parte)

Estende-se ao centro de massa ao centróide e as outras coordenadas.

Propriedade da Subtração

Considere um corpo formado pela subtração de um segundo por um terceiro corpo:

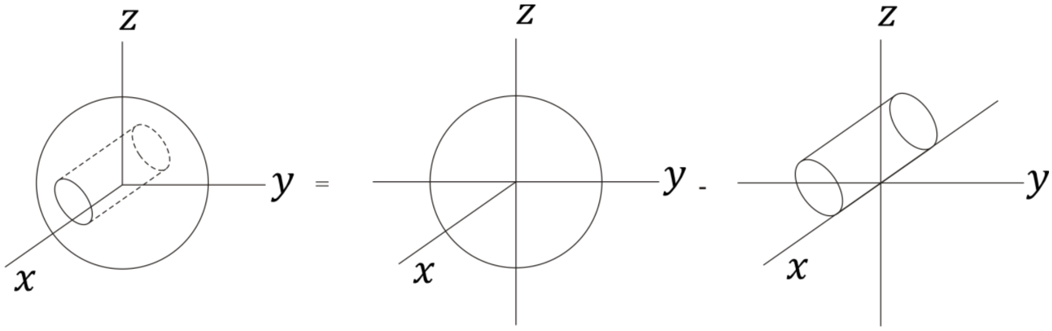

Figura 9. 8

Pode-se escrever, por exemplo, a coordenada x_G do centro de gravidade:

$x_G = \frac{\int_V x\gamma dv}{P} = \frac{\int_{V_1} x\gamma dv - \int_{V_2} x\gamma dv}{P_1 - P_2}$ **(Equação 9.19)**

Mas:

$(x_G)_1 = \frac{\int_{V_1} x\gamma dv}{P_1} \quad ou \quad \int_{V_1} x\gamma dv = (x_G)_1\, P_1$ **(Equação 9.20)**

$(x_G)_2 = \frac{\int_{V_2} x\gamma dv}{P_2} \quad ou \quad \int_{V_2} x\gamma dv = (x_G)_2\, P_2$ **(Equação 9.21)**

Substituindo (2) em (1):

$$x_G = \frac{(x_G)_1 P_1 - (x_G)_2 P_2}{P_1 - P_2}$$ **(Equação 9.22)**

Analogamente:

$$y_G = \frac{(y_G)_1 P_1 - (y_G)_2 P_2}{P_1 - P_2}$$ **(Equação 9.23)**

$$z_G = \frac{(z_G)_1 P_1 - (z_G)_2 P_2}{P_1 - P_2}$$ **(Equação 9.24)**

Estende-se ao centro de massa e centróide.

- Exemplos 9.9-9.11→ págs 392-394

9.5- Resultante de um Carregamento Distribuído Geral.

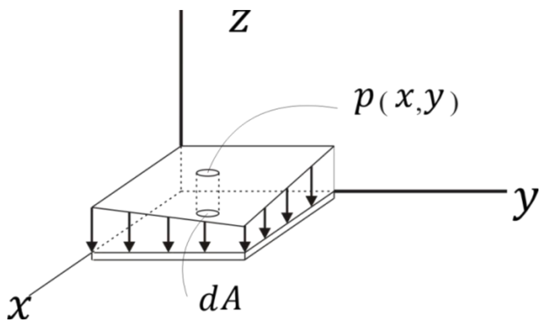

Figura 9. 9

Ponto sobre a placa onde o sistema pode ser reduzido á resultante. Equivalente a localização do centro de gravidade da mesma placa com peso especifico igual a pressão:

$$\vec{x} = \frac{\int_A xpdA}{\int_A pdA}$$

$$\vec{y} = \frac{\int_A ypdA}{\int_A pdA}$$ **(Equação 9.25)**

$$\vec{z} = \frac{\int_A zpdA}{\int_A pdA}$$

Onde a resultante é:

$$F_R = \int_A pdA$$ **(Equação 9.26)**

9.6- Pressão de um Fluido

Lei de pascal para fluido em repouso

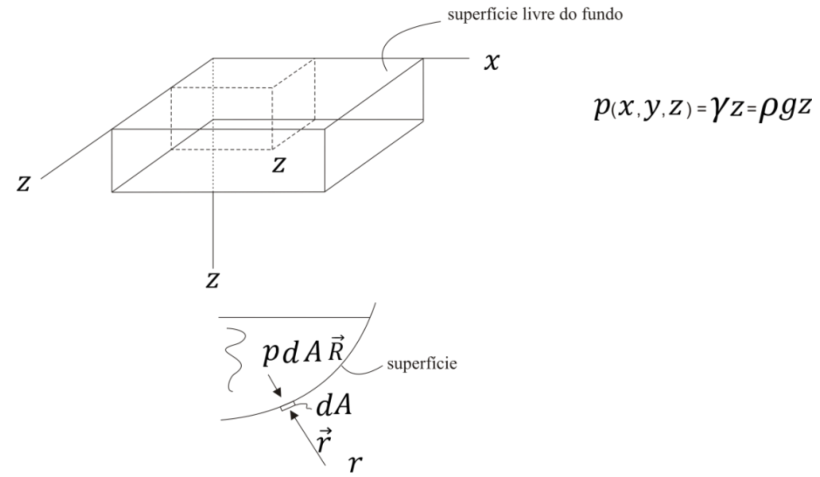

Figura 9. 10

- Exemplos 9.13-9.15→ págs. 413-416

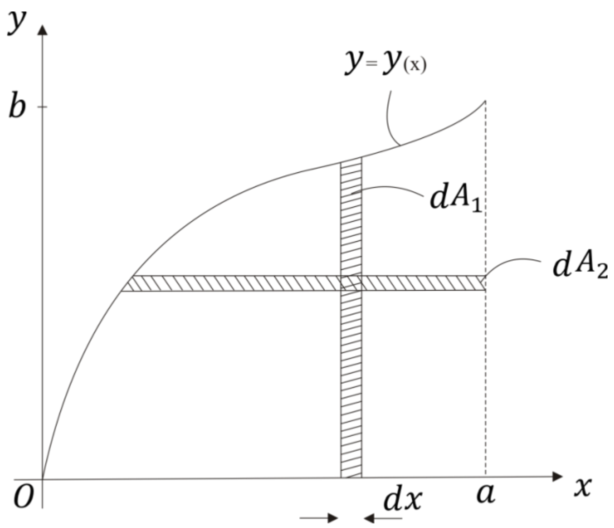

Figura 9. 11

$\int_A x dA = \int_0^a \left(\int_0^{y(x)} x dy \right) dx = \int_0^a x y(x) dz = \int_0^a dA_1$ **(Equação 9.27)**

Ou

$$\int_0^b \left(\int_{x(y)}^a x dx \right) dy = \int_0^b \left(\frac{a^2 - x^2(y)}{2} \right) dy = \int_0^b \left(\frac{a + x(y)}{2} \right) (a - x(y)) dy \quad ;$$

$(a - x(y)) = base\ de\ dA_2$

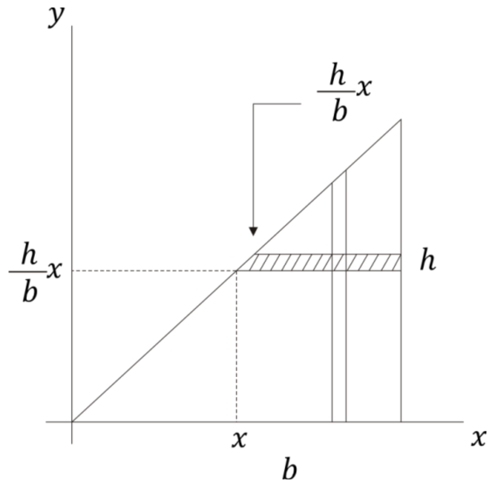

Figura 9. 12

$$\int_A x\,dA = \int_0^h \left(\int_{x(y)}^{b} x\,dx \right) dy = \int_0^b \left(\int_0^{y(x)} x\,dy \right) dx = \int_0^b xy(x)\,dx \quad ;$$

$$\int_A y\,dA \; = \int_0^h \left(\int_{x(y)}^{b} y\,dx \right) dy = \int_0^h \left(\int_{\frac{b}{h}y}^{b} y\,dx \right) dy = \int_0^h y\left(b - \frac{b}{h}y \right) dy$$

$$= b\int_0^h y\left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = bh\int_0^h \frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = bh^2 \int_0^h \frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)\frac{dy}{h}$$

$$u = \frac{y}{h} \Longrightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{h} \Longrightarrow du = \frac{dy}{h}$$

$$= bh^2 \int_0^1 u(1-u)du = \; bh^2 \left(\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right)_0^1 = bh^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \; \frac{bh^2}{6}$$

$$y_c = \frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{bh}{2}} = \frac{h}{3}$$