TM 227 - Estática

Emílio Eiji Kavamura, MSc

Departamento de Engenaharia Mecânica
UFPR

TM-227, 2012

Requisitos

- Estabelecer o Diagrama de corpo livre (D.C.L.);
- Calcular a Resultante de um sistema de forças;
- Efetuar o Produto Vetorial.

TÓPICOS

Forças em corpos rígidos

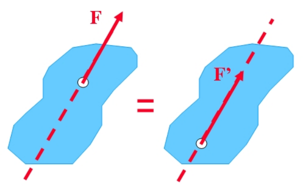
As forças que atuam em um corpo rígido podem ser classificadas em dois grupos:

forças externas: epresentam a ação de outros corpos rígidos sobre o corpo rígido considerado;

forças internas: representam as forças que mantém unidos os pontos materiais que formam o corpo rígido.

Transmissibilidade

De acordo com o **princípio da transmissibilidade**, o efeito de uma força externa sobre o corpo rígido, permanece inalterado se esta força é deslocada sobre sua reta de ação.



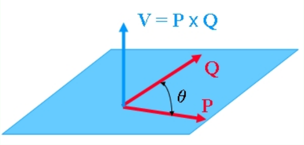
Forças Equivalentes

Duas forças agindo sobre o corpo rígido em dois pontos diferentes, têm o mesmo efeito sobre o corpo se elas têm a mesma intensidade, mesma direção, mesmo sentido e mesma reta de ação.

TÓPICOS

Produto vetorial

O produto vetorial de dois vetores é o vetor definido como:

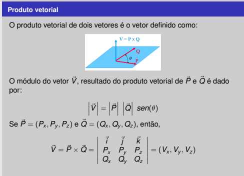


O módulo do vetor $\vec{V}$, resultado do produto vetorial de $\vec{P}$ e $\vec{Q}$ é dado por:

$$\left|\vec{V}\right| = \left|\vec{P}\right| \left|\vec{Q}\right| \; sen(\theta)$$

Se $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$ e $\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$, então,

$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = (V_x, V_y, V_z)$$



Produto vetorial

O produto vetorial de dois vetores é o vetor definido como:

O módulo do vetor $\vec{V}$, resultado do produto vetorial de $\vec{P}$ e $\vec{Q}$ é dado por:

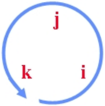
$$\left|\vec{V}\right| = \left|\vec{P}\right| \left|\vec{Q}\right| \; sen(\theta)$$

Se $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$ e $\vec{Q} = (Q_x, Q_y, Q_z)$, então,

$$\vec{V} = \vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} = (V_x, V_y, V_z)$$

- A direção do vetor produto vetorial $\vec{V}$ é perpendicular ao plano formado pelos dois vetores $\vec{P}$ e $\vec{Q}$.
- O sentido de $\vec{V}$ é tal que uma pessoa colocada na extremidade de $\vec{V}$, observará como sentido anti-horário a rotação de θ que traz o vetor $\vec{P}$ sobre o vetor $\vec{Q}$. (regra da mão direita).
- Os três vetores $\vec{P}$, $\vec{Q}$, e $\vec{V}$, tomados nessa ordem, formam um triedro positivo. De modo que:

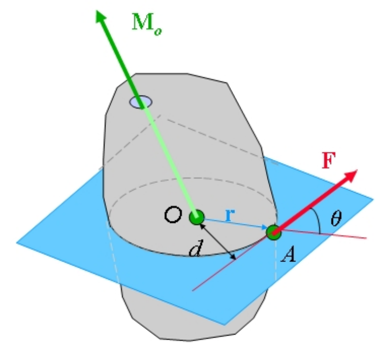
$$\vec{P} \times \vec{Q} = -\left(\vec{Q} \times \vec{P}\right).$$



- Considerando a definição de produto vetorial de dois vetores, temos que os produtos vetoriais dos vetores unitários $\vec{i}$, $\vec{j}$, e $\vec{k}$ são:

$$\begin{array}{ll} \vec{i} \times \vec{i} = 0 & \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{j} = 0 & \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{k} \times \vec{k} = 0 & \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} & \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} & \end{array}$$

TÓPICOS



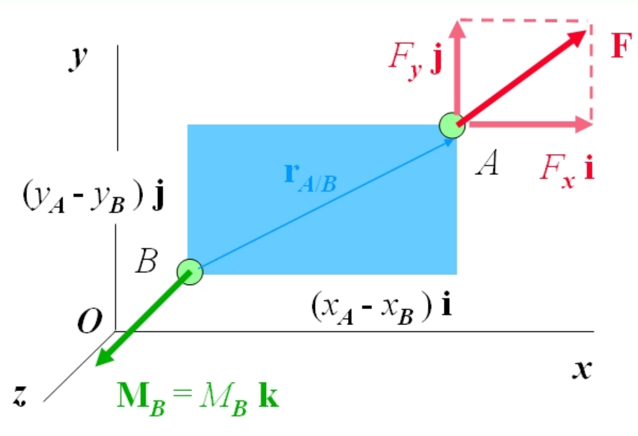
O momento da força F em relação ao ponto O é definido como o produto vetorial: $M_O = \vec{r} \times \vec{F}$
O módulo do momento de F em relação ao ponto O, pode ser expresso por:

$$M_O = r\ F\ \sin(\theta) = F\ d$$

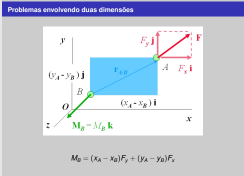
d é a distância perpendicular de O até a reta de ação de F.

TÓPICOS

Problemas envolvendo duas dimensões



$$M_B = (x_A - x_B)F_y + (y_A - y_B)F_x$$

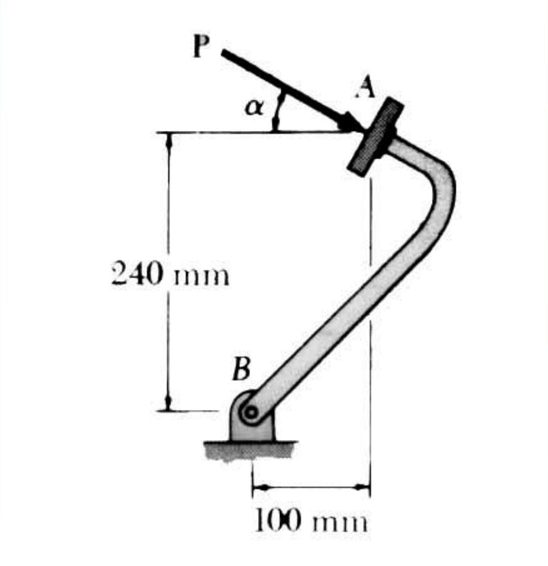


- No caso de problemas envolvendo somente duas dimensões, a força $\vec{F}$ pode ser assumida como contida no plano xy.

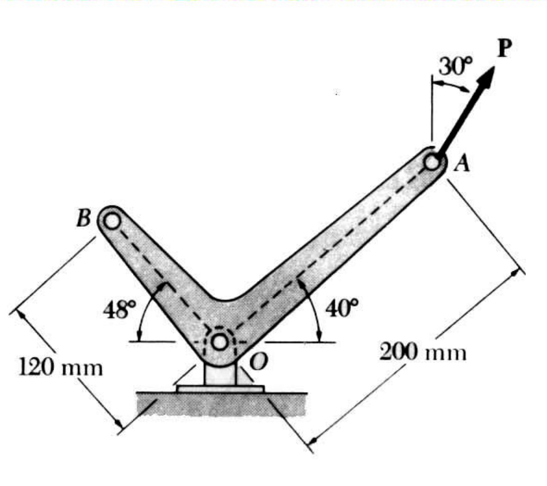
- Seu momento em relação ao ponto B é perpendicular a este plano e pode ser completamente definido por um escalar.

- A regra da mão direita é utilizada para definição da direção do momento e seu sentido, saindo ou entrando no plano xy (direção positiva ou negativa do eixo z).

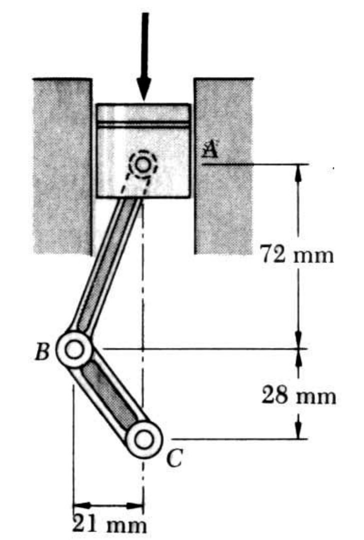
1) Para o pedal de freio da figura, determine o módulo e a direção da menor força **P** que tem o momento igual a 130 Nm em relação a B.



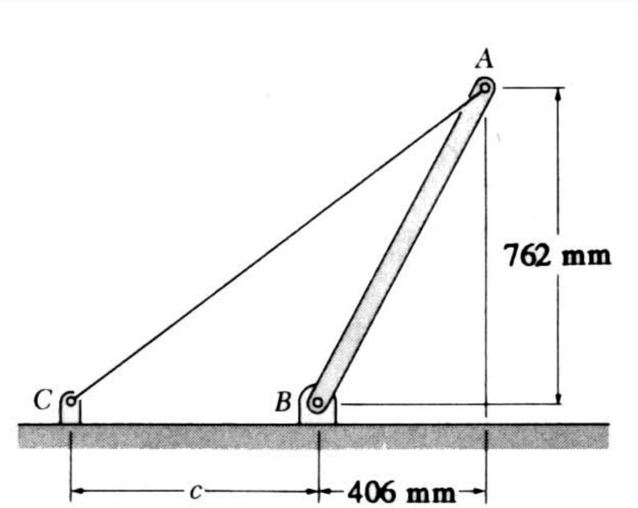
2) Uma força **P** de 300 N é aplicada ao ponto *A* da figura. *(a)* Calcule o momento de **P** em relação a *O* utilizando as componentes horizontal e vertical da força. *(b)* Com o resultado da parte *(a)*, determine a distância de *O* à linha de ação de **P**.



3) Sabe-se que a biela *AB* aplica no virabrequim uma força de 1,5 kN dirigida para baixo e para a esquerda, ao longo do eixo de simetria de *AB*. Determine o momento da força em relação a *C*.



4) A barra *AB* é mantida na posição pelo cabo *AC*. Sabendo que a força de tração na corda é de 1250 N e que *c*=0,60 m, determine o momento em relação a *B* da força exercida pelo cabo no ponto *A* decompondo a força em componentes horizontal e vertical.



Ler e entender os exemplos 4.1 a 4.6
Fazer exercícios do livro texto:

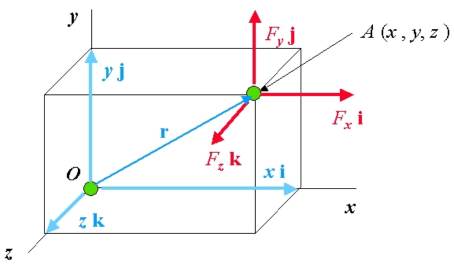
- 4.1;
- 4.5;
- 4.13;
- 4.14;
- 4.20;
- 4.31;
- 4.42

TÓPICOS

Requisitos

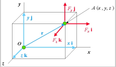
Diagrama de corpo livre (D.C.L.)
Cálculo de determinante
Componentes cartesianas de uma força

Problemas envolvendo três dimensões



As componentes cartesianas do momento M_o de uma força $\vec{F}$ em relação a um ponto O, são determinadas a partir da expansão do determinante de $\vec{r} \times \vec{F}$.

Problemas envolvendo três dimensões



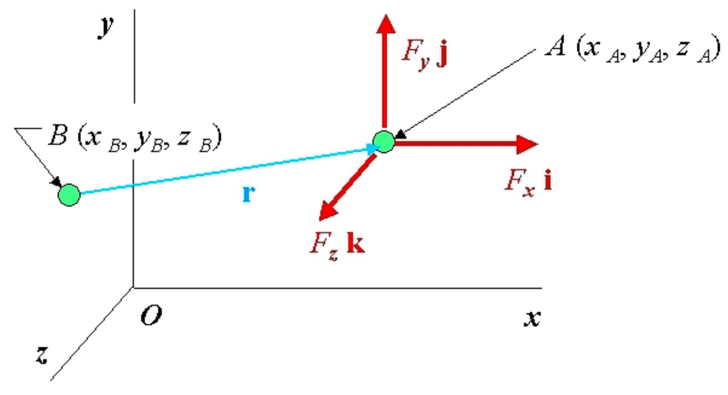
As componentes cartesianas do momento M_o de uma força $\vec{F}$ em relação a um ponto O, são determinadas a partir da expansão do determinante de $\vec{r} \times \vec{F}$.

Assim,

$$\vec{M_o} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

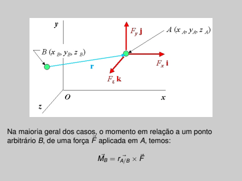
onde,

$$M_x = yF_z - zF_y$$
$$M_y = zF_x - xF_z$$
$$M_z = xF_y - yF_x$$



Na maioria geral dos casos, o momento em relação a um ponto arbitrário B, de uma força $\vec{F}$ aplicada em A, temos:

$$\vec{M_B} = \vec{r_{A/B}} \times \vec{F}$$



Assim,

$$\vec{M_B} = \vec{r_{A/B}} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

onde,

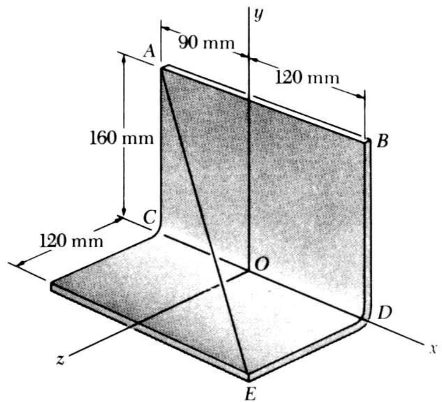
$$\begin{aligned} \vec{r_{A/B}} &= x_{A/B}\,\vec{i} + y_{A/B}\vec{j} + z_{A/B}\,\vec{k} \\ x_{A/B} &= x_A - x_B \\ y_{A/B} &= y_A - y_B \\ z_{A/B} &= z_A - z_B \end{aligned}$$

Determine o momento (em Nm) em relação à origem da força (em N) $\vec{F} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ aplicada ao ponto A. Suponha que o vetor-posição (em m) de A é:

(a) $\vec{r} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}$;

(b) $\vec{r} = \vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$; e

(c) $\vec{r} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$.

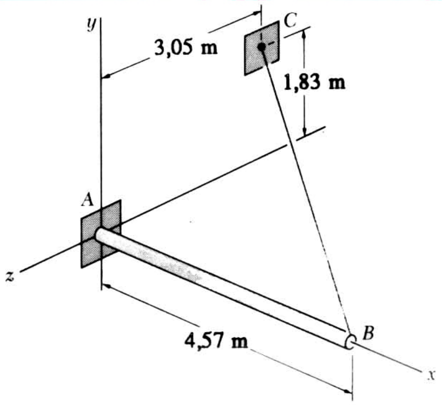


O fio *AE* está esticado do canto *A* ao canto *E* de uma chapa dobrada.

Sabendo que a tração no fio é de 435N, determine o momento em relação a *O* da força exercida pelo fio:

(a) no canto *A*; e

(b) no canto *E*.



O mastro *AB*, de 4,57 m, tem uma extremidade fixa *A*. Um cabo de aço é esticado da ponta livre *B* até o ponto *C* de uma parede vertical. Se a tração no cabo é de 2535 N, determine o momento em relação a *A* da força aplicada pelo cabo em *B*.

Ler e entender os exemplos:

- 4.7
- 4.8
- 4.13

Fazer exercícios do livro texto:

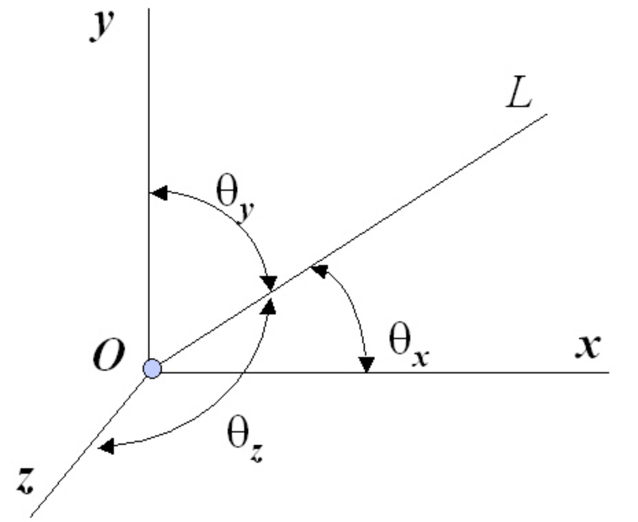
- 4.72
- 4.83
- 4.93
- 4.95
- 4.101
- 4.103

Requisitos para acompanhar a aula

- Produtos de vetores
  - Escalar;
  - Vetorial;
  - Misto.

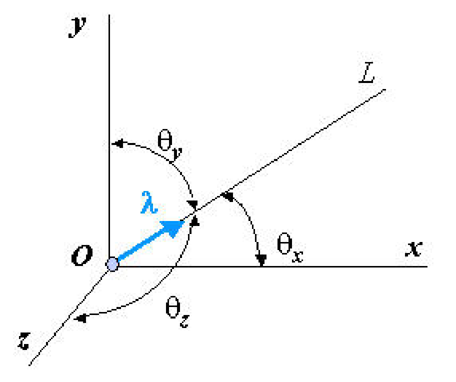
Direção de projeção

Dado um eixo OL:



Direção de projeção

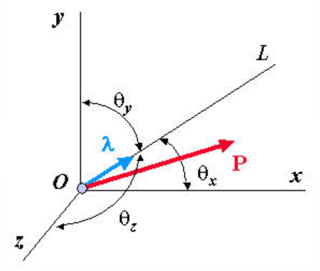
Dado um eixo OL:
e seu vetor unitário λ



$$\lambda = cos\theta_x\mathbf{i} + cos\theta_y\mathbf{j} + cos\theta_z\mathbf{k}$$

Projeção de um vetor

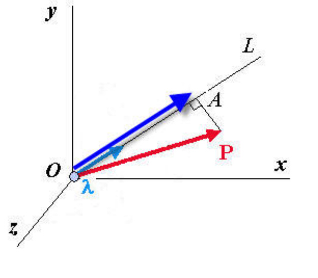
A projeção de um vetor **P** sobre *OL*:



$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\cdot\lambda &= (P_x, P_y, P_z)\cdot(cos\theta_x, cos\theta_y, cos\theta_z) \\
&= P_x cos\theta_x + P_y cos\theta_y + P_z cos\theta_z \\
&= \mathbf{P}_{OL}
\end{aligned}
$$

Projeção de um vetor

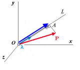
A projeção de um vetor **P** sobre *OL*:



$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\cdot\lambda &= (P_x, P_y, P_z)\cdot(cos\theta_x, cos\theta_y, cos\theta_z \\
&= P_x cos\theta_x + P_y cos\theta_y + P_z cos\theta_z \\
&= \mathbf{P}_{OL}
\end{aligned}
$$

Projeção de um vetor

A projeção de um vetor **P** sobre *OL*:



$$\begin{aligned}\mathbf{P}\cdot\lambda &= (P_x, P_y, P_z)\cdot(cos\theta_x, cos\theta_y, cos\theta_z\\ &= P_x cos\theta_x + P_y cos\theta_y + P_z cos\theta_z\\ &= \mathbf{P}_{OL}\end{aligned}$$

Produto Misto

O produto misto de **S**,**P** e **Q** é:

$$\mathbf{S}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

Os elementos do determinante, são as componentes cartesianas dos três vetores.

TÓPICOS

Momento de uma força

O momento de uma força **F** em relação a um eixo *OL*, é a projeção *OC* sobre *OL*, do momento M_O da força **F** em relação ao ponto *O*.

Projeção do Momento de uma força - cálculo

PRODUTO MISTO

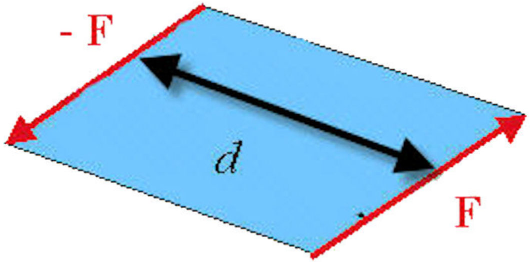
A projeção é facilmente calculada através do produto misto:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{OL} &= \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

TÓPICOS

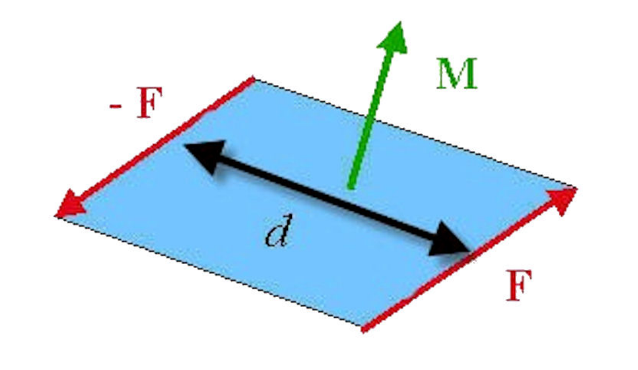
Binário de uma força

Duas forças **F** e $-$**F** de mesma intensidade, retas de ação paralelas e sentidos opostos, formam um binário.



O momento de um binário é independente do ponto de aplicação (escolha da origem) vetor livre **M**.

Binário de uma força



Este vetor **M** é perpendicular ao plano formado pelas duas forças **F** e $-$**F** e sua intensidade é igual ao produto Fd.

Representação vetorial de um binário

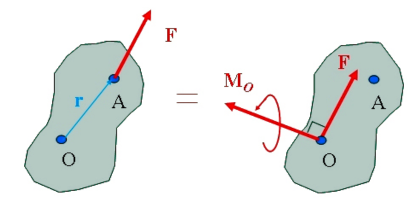
BINÁRIOS EQUIVALENTES

Dois binários que têm o mesmo momento **M**, são equivalentes, pois eles provocam o mesmo efeito sobre um corpo rígido dado.

Sistema força-binário

Qualquer força F que age em um ponto A de um corpo rígido, pode ser substituída por um sistema força-binário em um ponto arbitrário O.

Sistema força-binário



Um sistema com uma força aplicada **F** em A (tal que $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$) inicialmente,

- tem a força **F** transferida para o ponto O; e
- tem um binário de momento $\mathbf{M}_O = \vec{r} \times \mathbf{F}$.

IMPORTANTE

O vetor **F** da força e o vetor $\mathbf{M}_O$ do binário, são sempre perpendiculares entre si.

Sistema força-binário de um sistema de forças

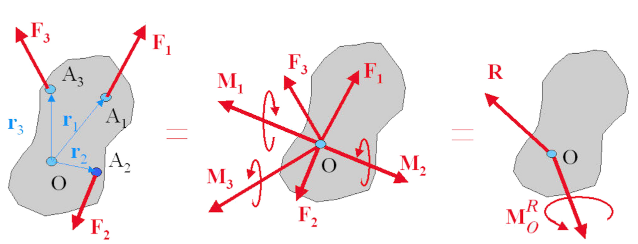
Qualquer sistema de forças pode ser reduzido a um sistema força-binário em um ponto dado O.

Sistema força-binário de um sistema de forças - Etapas

I- cada uma das forças é substituída por um sistema equivalente força-binário em O;

II- todas as forças são adicionadas para obter-se a força resultante $\mathbf{R}$; e

III- todos os binários são adicionados para obter-se um vetor binário resultante $\mathbf{M}_O$;

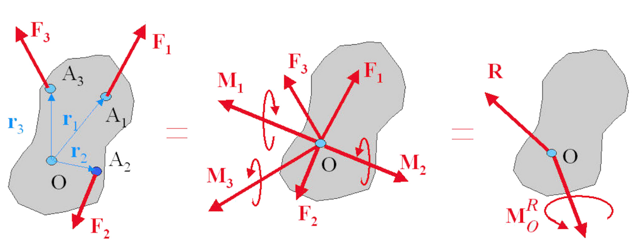


Sistema força-binário de um sistema de forças - Etapas

I- cada uma das forças é substituída por um sistema equivalente força-binário em O;

II- todas as forças são adicionadas para obter-se a força resultante **R**; e

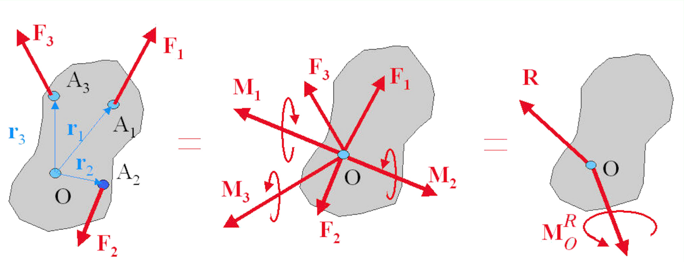
III- todos os binários são adicionados para obter-se um vetor binário resultante $\mathbf{M}_O$;



IMPORTANTE

Em geral, os vetores da força resultante **R** e do binário resultante $\mathbf{M}_O$

Equivalência de sistema de forças

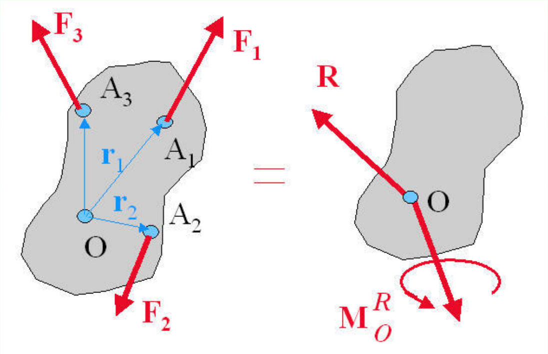


Equivalência de Sistema de Forças

Dois sistemas de forças,
$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3 \ldots$, e $\quad \mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3 \ldots$
são equivalentes, se e somente se:

$$\sum \mathbf{F} = \sum \mathbf{F}'$$

Sistema de forças reduzida a uma única força



Se a resultante **R** e o vetor $\mathbf{M}_O$ forem perpendiculares entre si, o sistema força-binário em *O* pode também ser reduzido a uma única força resultante.

1. Forças concorrentes,
2. Forças coplanares, ou
3. Forças paralelas.

Requisitos para acompanhar a aula

- Produtos de vetores
  - Escalar;
  - Vetorial;
  - Misto.
- Resultante de forças
- Sistemas equivalentes de forças

TÓPICOS

Condições de equilíbrio

As condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido são dadas por:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O &= \sum \left(\vec{r} \times \vec{F} \right) = \vec{0} \end{aligned}$$

Condições de equilíbrio

As condições necessárias e suficientes para o equilíbrio de um corpo rígido são dadas por:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= \vec{0} \\ \sum \vec{M}_O &= \sum \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\sum \vec{F}_x = \vec{0} \quad \sum \vec{F}_y = \vec{0} \quad \sum \vec{F}_z = \vec{0}$$

$$\sum \vec{M}_x = 0 \quad \sum \vec{M}_y = 0 \quad \sum \vec{M}_z = 0$$

TÓPICOS

Equilíbrio de corpos rígidos bidimensionais

Escolhendo os eixos x e y no plano da estrutura, temos:

$$\vec{F}_z = 0 \qquad \vec{M}_x = 0 \qquad \vec{M}_y = 0$$

Então as seis equações de equilíbrio reduzem-se a

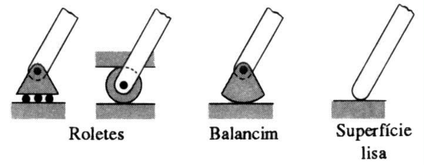
$$\sum \vec{F}_x = 0 \qquad \sum \vec{F}_y = 0 \qquad \sum \vec{M}_A = 0$$

onde, A é um ponto qualquer da estrutura.

Reações em vínculos bidimensionais

No caso de estruturas bidimensionais as forças e as reações dos vínculos que a suportam estão no plano. Sendo assim, é necessário conhecer os tipos de vínculos bidimensionais.

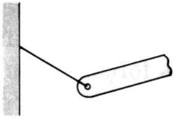
Vínculo



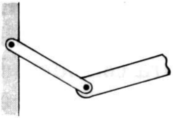
Reação

Reações em vínculos bidimensionais

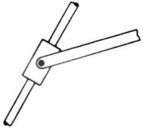
Vínculo



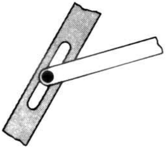
Cabo curto



Haste curta

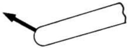


Cursor sobre haste lisa

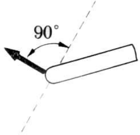


Pino liso deslizante

Reação



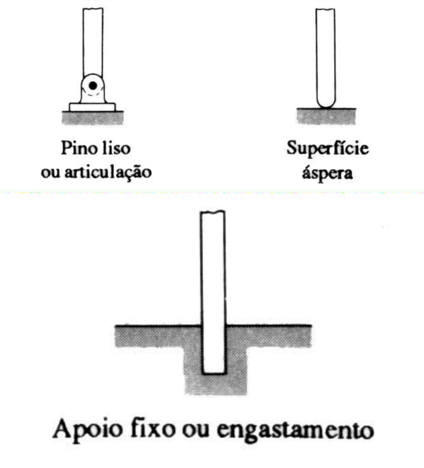
Força com linha de ação conhecida



Força com linha de ação conhecida

Reações em vínculos bidimensionais

Vínculo



Reação

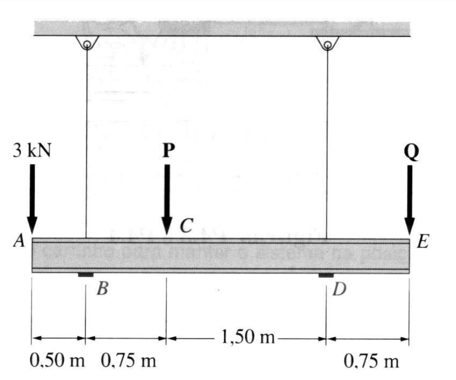
Equilíbrio de corpos rígidos bidimensionais

Reações estaticamente determinadas : Quando o número de reações de um corpo rígido (n^o de incógnitas) for igual ao número de equações para o equilíbrio;

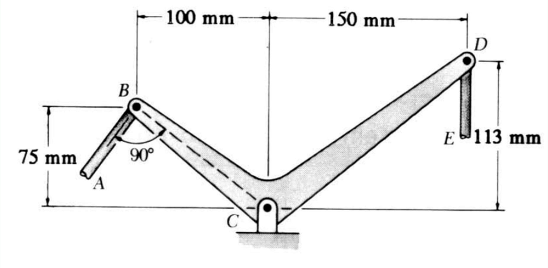
Reações estaticamente indeterminadas : Quando o número de reações de um corpo rígido (n^o de incógnitas) for maior do que o número de equações para o equilíbrio;

Vinculação parcial : Quando o número de reações de um corpo rígido (n^o de incógnitas) for menor do que o número de equações para o equilíbrio.

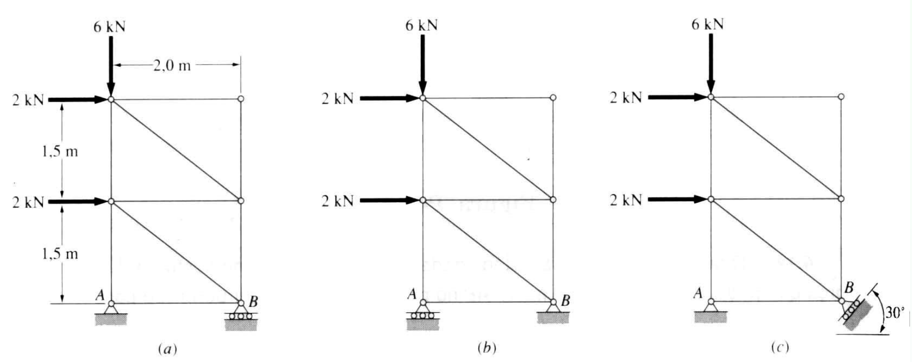
Três cargas são aplicadas a uma viga leve que está suspensa por cabos presos em *B* e *D*. Sabendo que a força de tração máxima permitida em cada cabo é 4 kN, determine o intervalo de valores de *Q* para os quais o carregamento é seguro, com **P**= 1 kN. Despreze o peso da viga.



Duas hastes *AB* e *DE* estão ligadas por um perfil. Sabendo que a tração na haste *AB* é de 750 N determine: (a) a tração na haste *DE* e (b) a reação em *C*.



Uma treliça pode ser apoiada das três maneiras ilustradas. Determine as reações nos apoios, em cada caso.



Tarefa mínima

- Ler e entender os exercícios resolvidos 5.15; 5.2; 5.3; 5.4 e 5.7 a 5.13;
- Fazer os problemas:
  - 19;
  - 20;
  - 21;
  - 32;
  - 34;
  - 42;
  - 44;
  - 53;
  - 61.

Requisitos para acompanhar a aula

- Produtos de vetores
  - Escalar;
  - Vetorial;
  - Misto.
- Resultante de forças
- Sistemas equivalentes de forças

TÓPICOS

Equilíbrio de corpos rígidos tridimensionais

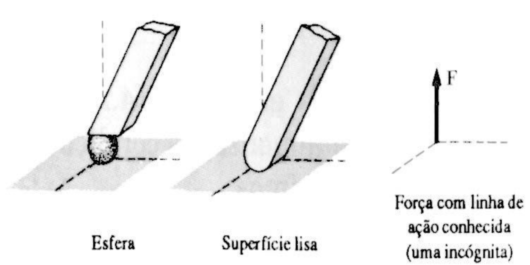
Para o equilíbrio de corpos rígidos tridimensionais deve-se fazer

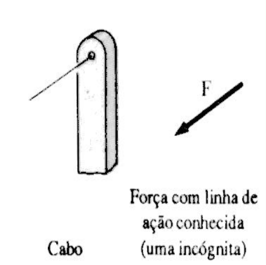
$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \sum \vec{F}_y = 0 \quad \sum \vec{F}_z = 0$$
$$\sum \vec{M}_x = 0 \quad \sum \vec{M}_y = 0 \quad \sum \vec{M}_z = 0$$

ou, na forma vetorial,

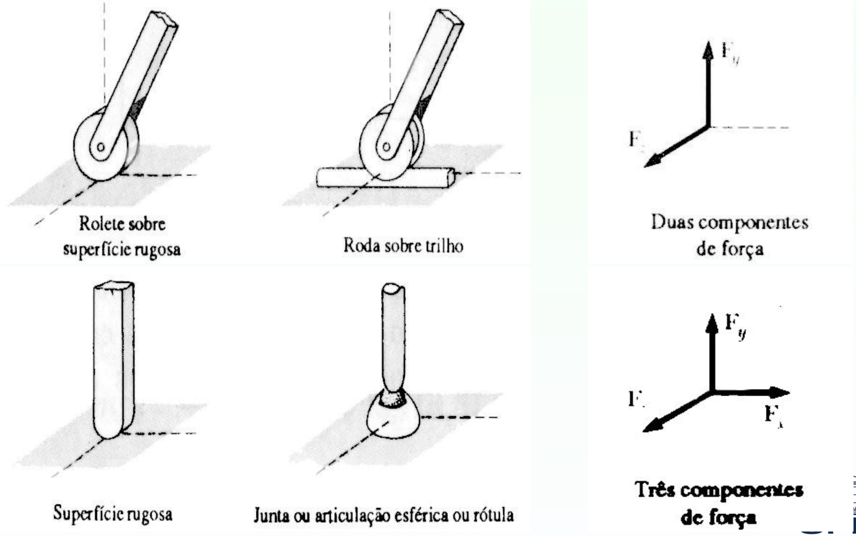
$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= 0 \\ \sum \vec{M}_O &= \sum \vec{r} \times \vec{F} = 0 \end{aligned}$$

Reações em vínculos tridimensionais

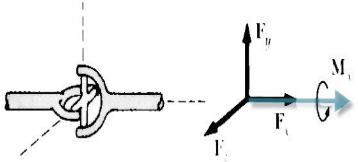




Reações em vínculos tridimensionais

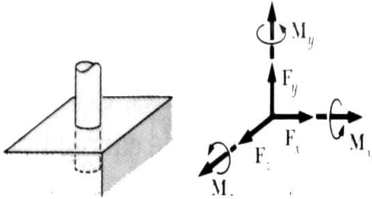


Reações em vínculos tridimensionais



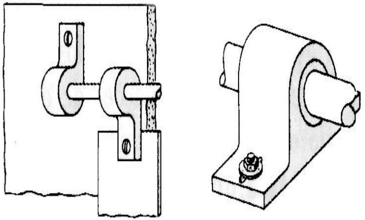
Junta universal

Três componentes de força e um binário

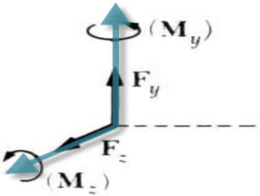


Apoio fixo ou engastamento

Três componentes de força e três binários

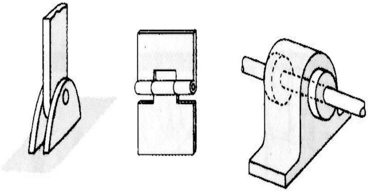


Dobradiça e mancal suportando somente carga radial



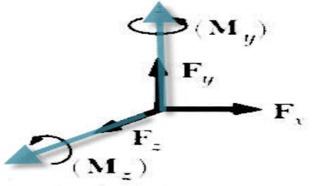
Duas componentes de força (e dois binários)

Reações em vínculos tridimensionais



Pino e suporte

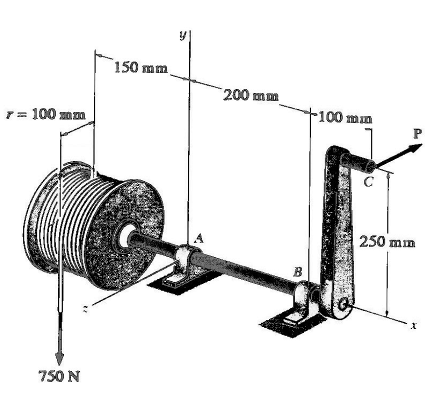
Dobradiça e mancal suportando empuxo axial e carga radial



Três componentes de força (e dois binários)

TÓPICOS

Exercícos sobre Equilíbrio em 3 D

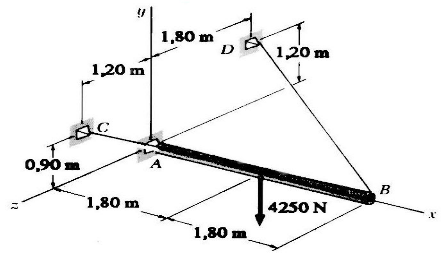


Um sarrilho é utilizado para erguer uma carga de 750 N. Determine:

a) o módulo da força horizontal **P** que deve ser aplicada a *C* para manter o equilíbrio e

b) as reações em *A* e *B*, supondo que o mancal em *B* não exerça empuxo axial.

Exercícos sobre Equilíbrio em 3 D

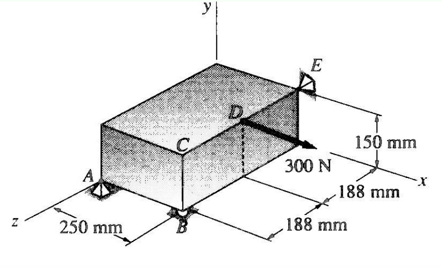


À lança AB de 3,60 m está aplicada a força de 4250 N. Determine:

a) a força de tração em cada cabo e

b) a reação na junta esférica em *A*.

Exercícos sobre Equilíbrio em 3 D



Uma caixa retangular tem juntas esféricas em *A* e *E* e um rolete apoiado na superfície horizontal em *B*. Determine a reação em B quando uma força horizontal de 300 N é aplicada ao ponto médio *D* de *CE*.

Tarefa mínima

- Ler e entender os exercícios resolvidos 5.15 a 5.19;
- Fazer os problemas:
  - 64;
  - 68;
  - 70;
  - 79;
  - 84;
  - 90;
  - 94;
  - 96.