1. REVISÃO DE MATEMÁTICA

1. MOTIVAÇÃO

Para se deduzir e resolver as equações que regem o movimento dos fluidos, precisa-se da Matemática. Portanto, este capítulo é dedicado à revisão da base matemática que será empregada ao longo da disciplina de Mecânica dos Fluidos.

2. ESCALAR

Escalar é uma grandeza que é definida através de uma magnitude. Além disso, para representar um escalar é necessário definir em que unidade sua magnitude é expressada. Exemplo: T = 100 °C, onde:

T = temperatura, é uma grande física do tipo escalar;

100 é a magnitude; e

°C = grau Celsius, é a unidade.

Deve-se notar que a magnitude depende da unidade empregada mas o seu significado não. Isto é, o ponto de ebulição da água pode ser representado por T = 100 °C = 212 °F, onde °F = grau Fahrenheit.

Outros exemplos de grandezas escalares: massa, pressão, tempo e comprimento.

3. SISTEMA DE COORDENADAS

Para se definir a posição de um ponto, uma superfície ou um sólido no espaço, usam-se os chamados sistemas de coordenadas, como aqueles vistos na Figura 1.

cartesiano (x,y,z) cilíndrico (r,θ,z)

Figura 1. Sistemas de coordenadas.

Quando se trabalhar no espaço bidimensional usaremos: cartesiano (x,y); e cilíndrico (r,z).

4. VETOR

Vetor é uma grandeza definida por magnitude (módulo) e direção. Associado a um vetor também tem-se uma unidade.

O vetor é representado por meio de um sistema de coordenadas como mostrado na Figura 2. Um exemplo é o vetor velocidade $\vec{V}$: $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j}\ m/s$ ou $\vec{V} = 4\hat{i} + 3\hat{j}\ m/s$ onde

$\vec{V}$ = velocidade, é uma grandeza física do tipo vetorial;

u = 4, é a componente do vetor $\vec{V}$ na direção x;

$\hat{i}$ é o vetor unitário na direção x;

v = 3, é a componente do vetor $\vec{V}$ na direção y;

$\hat{j}$ é o vetor unitário na direção y;

direção = α, é o ângulo entre o vetor $\vec{V}$ e a direção x;

m/s = metros por segundo, é a unidade da velocidade.

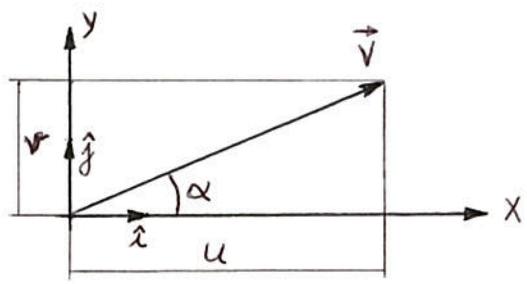

Figura 2. Representação de um vetor no sistema cartesiano bidimensional.

A magnitude ou módulo do vetor $\vec{V}$ é dado por

$$|\vec{V}|^2 = u^2 + v^2 \quad ou \quad |\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Para o exemplo, $|\vec{V}| = 5\ m/s$ e a direção α é obtida de

$$tg\,\alpha = \frac{v}{u} \quad ou \quad \alpha = arctg\left(\frac{v}{u}\right)$$

No caso do exemplo acima, α = 37°. Portanto, o vetor $\vec{V}$ pode ser representado por

$$\vec{V} = 4\hat{i} + 3\hat{j}\ m/s \quad ou \quad \vec{V} = 5\ m/s \text{ na direção de } 37^o \text{ em relação ao eixo } x$$

No espaço tridimensional, o vetor velocidade será representado por

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}\ m/s$$

Outros exemplos de grandezas vetoriais: força e posição.

A magnitude e a orientação absoluta no espaço dos vetores independem do sistema de coordenadas empregado. O que mudam são as componentes do vetor.

5. SOMA DE VETORES

A soma de dois vetores, ou a resultante, é obtida somando-se as componentes dos vetores em cada direção. Exemplo:

$$\vec{V}_1 = u_1 \hat{i} + v_1 \hat{j} \ m/s \quad e \quad \vec{V}_2 = u_2 \hat{i} + v_2 \hat{j} \ m/s$$

A resultante $\vec{V}_3$ será dada por $\vec{V}_3 = (u_1 + u_2)\hat{i} + (v_1 + v_2)\hat{j} \ m/s$ o que pode ser visto na Figura 3.

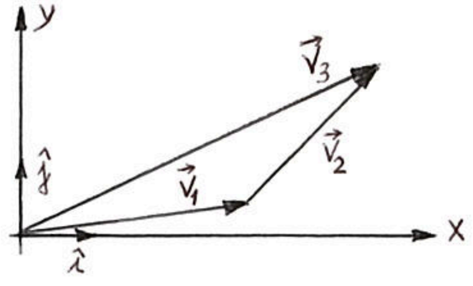

Figura 3. Soma de dois vetores.

6. PRODUTO ESCALAR

O produto escalar entre dois vetores é definido por

$$R = \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| \, |\vec{V}_2| \cos\alpha \qquad (1)$$

onde α é o ângulo entre os vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$.

Deve-se notar que o produto escalar entre dois vetores é denotado por um ponto entre os mesmos e o resultado desta operação (R) é um escalar.

O produto escalar entre os vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$ da Figura 3 resulta em

$$\hat{i}.\hat{i} = 1 \quad \hat{i}.\hat{j} = 0 \quad \hat{j}.\hat{i} = 0 \quad \hat{j}.\hat{j} = 1$$

O produto escalar também pode ser feito com as componentes dos vetores em vez de seus módulos. Para os vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ do item 5 tem-se

$$R = \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = (u_1\hat{i} + v_1\hat{j}) . (u_2\hat{i} + v_2\hat{j})$$

$$R = \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = u_1 u_2 \hat{i}.\hat{i} + u_1 v_2 \hat{i}.\hat{j} + v_1 u_2 \hat{j}.\hat{i} + v_1 v_2 \hat{j}.\hat{j}$$

$$R = \vec{V}_1 . \vec{V}_2 = u_1 u_2 + v_1 v_2$$

Portanto, deve-se perceber que o resultado é igual à soma dos produtos das componentes em cada direção.

7. PRODUTO VETORIAL

O produto vetorial entre dois vetores é definido por

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 x \vec{V}_2 = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

resultando em

$$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 x \vec{V}_2 = (v_1 w_2 - w_1 v_2)\hat{i} + (w_1 u_2 - u_1 w_2)\hat{j} + (u_1 v_2 - v_1 u_2)\hat{k}$$

ou seja, o resultado do produto vetorial entre dois vetores é um vetor. Esta operação é denotada pelo símbolo de multiplicação (x) entre dois vetores.

Para os vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ do item 5 cujas componentes w_1 e w_2 são nulas, tem-se $\vec{V}_3 = (u_1 v_2 - v_1 u_2)\hat{k}\ m/s$

Portanto, embora os vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ estejam no plano (x,y), a resultante do produto vetorial, $\vec{V}_3$, está na direção z.

O produto vetorial também pode ser definido por

$$\vec{V}_3 = |\vec{V}_1|\,|\vec{V}_2|\, sen\,\alpha\,\hat{n} \qquad (3)$$

onde $\hat{n}$ é um vetor unitário na direção perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$; o sentido de $\hat{n}$ é dado pela regra da mão direita.

Como exemplo, usando a Equação (2), o produto vetorial entre os vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$ da Figura 4 resulta em

$$\hat{i} x \hat{i} = 0 \quad \hat{i} x \hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j} x \hat{i} = -\hat{k} \quad \hat{j} x \hat{j} = 0$$

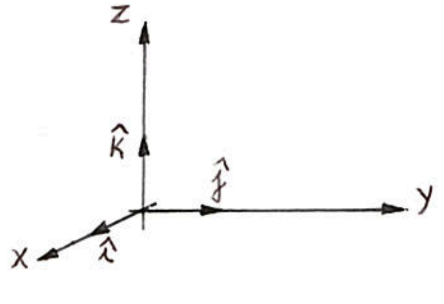

Figura 4. Vetores unitários no sistema de coordenadas cartesiano.

8. DERIVADA

Vamos considerar a função escalar $f = x^2$ representada na Figura 5.

Deseja-se calcular a inclinação α da função f entre os pontos P e 2. Sabe-se que $(tg\,\alpha)_{P,2} = \left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)_{P,2} = \frac{f_2 - f_P}{x_2 - x_P}$

Agora, como se poderia calcular a inclinação da função apenas no ponto P? Considerando-se $x_P = 2$ tem-se $f_P = 4$ e pode-se construir a seguinte tabela:

$\Delta x = x_2 - x_P$	x_2	f_2	$\Delta f = f_2 - f_P$	tg α
1	3	9	5	5
0,5	2,5	6,25	2,25	4,5
0,1	2,1	4,41	0,41	4,1
0,01	2,01	4,0401	0,0401	4,01
0,001	2,001	4,004001	0,004001	4,001
$\rightarrow 0$	$\rightarrow 2$	$\rightarrow 4$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 4$

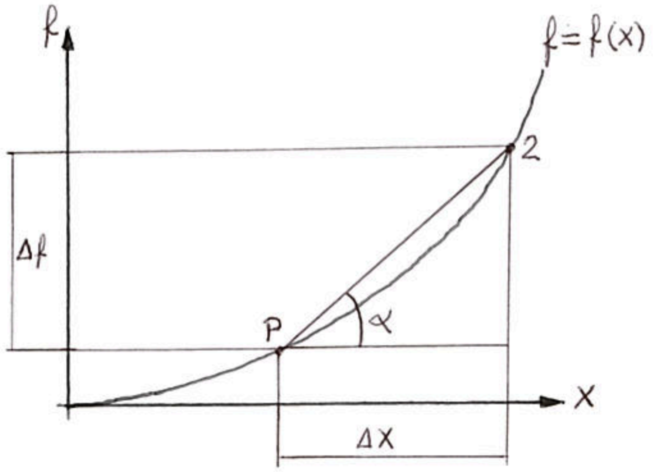

Figura 5. Gráfico da função $f = x^2$.

Portanto, verifica-se que no limite quando Δx tender a zero, a inclinação α da função f no ponto P tenderá a 4, ou seja,

$$(tg\,\alpha)_P = \underset{\Delta x \to 0}{limite} \frac{(f_2 - f_P)}{(x_2 - x_P)} = \underset{\Delta x \to 0}{limite} \frac{[f(x_P + \Delta x) - f(x_P)]}{\Delta x}$$

Assim, derivada é a tangente de uma função num determinado ponto, isto é $\left(\frac{df}{dx}\right)_P = (tg\,\alpha)_P$ ou

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_P = \underset{\Delta x \to 0}{limite} \frac{[f(x_P + \Delta x) - f(x_P)]}{\Delta x} \qquad (4)$$

A letra "d" é usada para indicar derivada total ou ordinária para o caso em que a função f depende apenas de uma variável (x). Quando a função f depende de duas ou mais variáveis, pode-se calcular a inclinação de f num ponto para cada uma das variáveis. Estas inclinações são chamadas de derivadas parciais e usa-se o símbolo ∂ para representá-las. Por exemplo, se f = f(x,y) tem-se

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P = \underset{\Delta x \to 0}{limite} \frac{[f(x_P + \Delta x, y_P) - f(x_P, y_P)]}{\Delta x}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P = \underset{\Delta y \to 0}{limite} \frac{[f(x_P, y_P + \Delta y) - f(x_P, y_P)]}{\Delta y}$$

e se x = x(t) e y = y(t), a derivada total de f em relação a t será dada por

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{5}$$

Exemplo 1: $x = t^3$, $y = t^2$ e $f = 2x + y^2$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 2t^2 \qquad \frac{dx}{dt} = 3t^2 \qquad \frac{dy}{dt} = 2t$$

Usando a Equação (5) tem-se $\frac{df}{dt} = 2(3t^2) + 2t^2(2t) = 6t^2 + 4t^3$

Outra forma de obter df/dt é substituir as funções x e y diretamente em f. Assim $f = 2x + y^2 = 2t^3 + t^4$. Agora f = f(t) e a derivada total será igual a equação acima, obviamente.

Exemplo 2: obter as derivadas parciais da função vetorial dada por

$$\vec{V} = 2x\hat{i} + 3x^2y^3\hat{j} \qquad \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = 2\hat{i} + 6xy^3\hat{j} \qquad \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} = 9x^2y^2\hat{j}$$

9. GRADIENTE

Dada uma função escalar f, o gradiente de f resulta numa função vetorial calculada por

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k} \tag{6}$$

onde $\vec{\nabla}$ é denominado de "operador nabla" e definido por

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{7}$$

10. DIVERGENTE

O divergente de uma função vetorial $\vec{V}$ resulta numa função escalar. Por exemplo, o divergente de $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$ resulta em

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{8}$$

11. LAPLACIANO

O laplaciano de uma função escalar f é calculado através de

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{9}$$

onde o operador laplaciano ∇^2 é dado por

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{10}$$

Lembra-se que as Equações (6) a (10) são válidas apenas para o sistema de coordenadas cartesiano. Existem equações semelhantes para os demais sistemas de coordenadas.