4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

1. MOTIVAÇÃO

COMO AS EQUAÇÕES BÁSICAS DA MECÂNICA DOS FLUIDOS NA FORMA INTEGRAL SÃO BASTANTE SIMPLES ELAS SÃO USADAS, EM GERAL, NA OBTENÇÃO DE SOLUÇÕES APROXIMADAS DOS PROBLEMAS.

AS EQUAÇÕES BÁSICAS NA FORMA INTEGRAL (FI) SÃO MUITO FÁCEIS DE SE RESOLVER ANALITICAMENTE E FORNECEM UM VALOR ÚNICO (GLOBAL) PARA CADA PROPRIEDADE CONSERVADA (MASSA, QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA) QUE REPRESENTA TODO O VOLUME DE CONTROLE. OS VALORES DAS FORÇAS, $\dot{Q}$ E POTÊNCIA TAMBÉM SÃO GLOBAIS.

PARA TRÊS EXEMPLOS ESPECÍFICOS, VAMOS EXAMINAR AGORA O QUE JÁ CONSEGUIMOS CALCULAR COM AS EQUAÇÕES INTEGRAIS E ALGUMAS DE SUAS LIMITAÇÕES.

- EXEMPLO 1: PROBLEMA MOSTRADO NA FIGURA 9 DO CAPÍTULO 3.

  O ESCOAMENTO SE DÁ EM REGIME PERMANENTE E O FLUIDO É INCOMPRESSÍVEL. SE CONHECERMOS OS PERFIS DE VELOCIDADES NAS SEÇÕES 1 E 2 E A GEOMETRIA DO V.C., CONSEGUIMOS APENAS OBTER $\overline{V}_3$. NÃO É POSSÍVEL OBTER O PERFIL NA SEÇÃO 3 NEM TÃO POUCO AS VELOCIDADES NO INTERIOR DO V.C.

• EXEMPLO 2: UM JATO D'ÁGUA COLIDE COM UMA PLACA METÁLICA CONFORME FIGURA 25 DO CAPÍTULO 3.

COM OS DADOS SUFICIENTES, É POSSÍVEL CALCULAR A FORÇA TOTAL DO LÍQUIDO CONTRA A PLACA E A PRESSÃO MÉDIA EXERCIDA PELA ÁGUA CONTRA A PLACA. MAS, NÃO É POSSÍVEL CALCULAR A PRESSÃO EM CADA PONTO DA PLACA, O QUE É NECESSÁRIO PARA SE DIMENSIONAR UMA ESTRUTURA COM SEGURANÇA.

• EXEMPLO 3: ESCOAMENTO NUM BOCAL CONVERGENTE-DIVERGENTE. VER FIGURA 19 DO CAPÍTULO 3.

A TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR ($\dot{Q}$) CALCULADA REPRESENTA UM VALOR GLOBAL DO CALOR TROCADO EM TODA A SUPERFÍCIE DO V.C. NÃO

É POSSÍVEL OBTER $\dot{Q}$ NEM O VALOR DA TEMPERATURA EM CADA PONTO DA SUPERFÍCIE DE CONTROLE. NESTE PROBLEMA, O CONHECIMENTO DA TEMPERATURA É NECESSÁRIO, POR EXEMPLO, PARA VERIFICAR SE NÃO HAVERÁ FUSÃO DO MATERIAL USADO NO BOCAL.

O EMPREGO DAS EQUAÇÕES BÁSICAS NA FORMA DIFERENCIAL (FD) PERMITE OBTER PERFIS DE VELOCIDADES, DISTRIBUIÇÕES DE FORÇA, DE $\dot{Q}$ E DE TEMPERATURA NA SUPERFÍCIE DE CONTROLE. ALÉM DISSO, OBTÊM-SE OS CAMPOS DAS PROPRIEDADES CONSERVADAS (MASSA, QUANTIDADE DE MOVIMENTO E ENERGIA) AO LONGO DO VOLUME DE CONTROLE INTEIRO.

A DESVANTAGEM DA FORMULAÇÃO DIFERENCIAL FRENTE À FORMULAÇÃO INTEGRAL É QUE AS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS SÃO MUITO MAIS DIFÍCEIS DE SE RESOLVER ANALITICAMENTE. EM CONTRAPARTIDA, AS SOLUÇÕES OBTIDAS COM A F.D SÃO DE QUALIDADE MUITO SUPERIOR, EM GERAL, ÀQUELAS OBTIDAS COM A FI. PORTANTO, ESTE É O MOTIVO PARA ESTUDARMOS AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO NA FORMA DIFERENCIAL.

NESTE CAPÍTULO VEREMOS AS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA MASSA, DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR E DA ENERGIA NA FORMA DIFERENCIAL E AS APLICAREMOS NA SOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS.

2. EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA

VAMOS CONSIDERAR UM ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL NUM SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS USANDO O VOLUME DE CONTROLE MOSTRADO NA FIGURA 1.

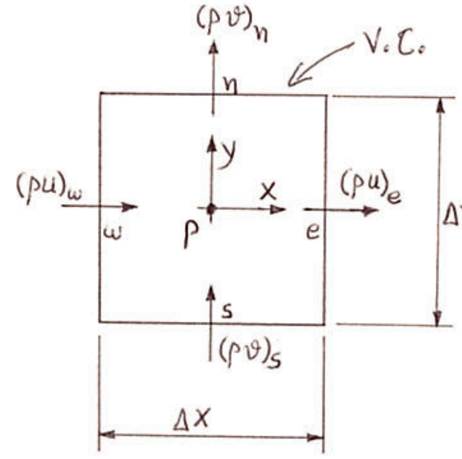


FIGURA 1.

$\Delta Z = 1$

w, e, s, n = FACES DO V.C. OU SUPERFÍCIES DO V.C.

ρ = MASSA ESPECÍFICA

u E v = COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE $\vec{V}$ NAS DIREÇÕES X E Y

SABEMOS DO CAPÍTULO 3 QUE

$$\left.\frac{\Delta M}{\Delta t}\right|_{V.C.} + \dot{M}_{SAI} - \dot{M}_{ENTRA} = 0 \qquad (1)$$

APLICANDO ESTA EQUAÇÃO AO VOLUME DE CONTROLE DA FIGURA 1 OBTEMOS

$$\frac{\Delta}{\Delta t}(\rho \Delta x . \Delta y . 1) + (\rho u)_e \Delta y 1 + (\rho v)_n \Delta x 1 - (\rho u)_w \Delta y 1 - (\rho v)_s \Delta x 1 = 0$$

DIVIDINDO ESTA EXPRESSÃO POR $\Delta V = \Delta x \Delta y 1$ TEMOS

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} + \frac{(\rho u)_e - (\rho u)_w}{\Delta x} + \frac{(\rho v)_n - (\rho v)_s}{\Delta y} = 0$$

TOMANDO-SE O LIMITE QUANDO $\Delta t, \Delta x$ E $\Delta y \to 0$ CHEGA-SE A

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \qquad (2)$$

ESTA É A EQUAÇÃO GERAL DE CONSERVAÇÃO DA MASSA NA FORMA DIFERENCIAL PARA COORDENADAS CARTESIANAS.

USANDO-SE O OPERADOR VETORIAL NABLA ($\vec{\nabla}$) A EQ. (2) SE RESUME A

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \qquad (3)$$

ESTA EQUAÇÃO FOI PRIMEIRAMENTE OBTIDA POR LEONHARD EULER EM 1757 E É VÁLIDA PARA QUALQUER SISTEMA DE COORDENADAS, ESCOAMENTO TRANSIENTE E FLUIDO COMPRESSÍVEL.

PARA ESCOAMENTOS EM REGIME PERMANENTE, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ E A EQ. (3) RESULTA EM

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \tag{4}$$

NO CASO DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS, ρ = CONSTANTE, A EQ. (3) SE RESUME A

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{5}$$

EM CERTOS PROBLEMAS COMO ESCOAMENTOS EM DUTOS CIRCULARES É MAIS APROPRIADO EMPREGAR O SISTEMA DE COORDENADAS CILÍNDRICAS. NESTE CASO A EQ. (3) RESULTA EM

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \tag{6}$$

ONDE v E w SÃO AS COMPONENTES DO VETOR VELOCIDADE $\vec{V}$ NAS DIREÇÕES r E z.

3. FUNÇÃO DE CORRENTE ψ

UMA APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA NA FORMA DIFERENCIAL É VISTA AGORA NESTE ITEM.

PODE-SE DEFINIR PARA ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS (x, y), EM CADA INSTANTE DE TEMPO, A CHAMADA FUNÇÃO DE CORRENTE $\psi(x, y)$. MATEMATICAMENTE ESTA FUNÇÃO É DEFINIDA DE TAL FORMA QUE SATISFAÇA A EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA PARA REGIME PERMANENTE. PORTANTO, PARA FLUIDOS COMPRESSÍVEIS TEMOS

$$\rho u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad E \qquad \rho v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{7}$$

A EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA PARA ESCOAMENTO EM REGIME PERMANENTE DE UM FLUIDO COMPRESSÍVEL, DA EQ. (2), É DADA POR

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

SUBSTITUINDO NESTA EXPRESSÃO AS EQS. (7) OBTEMOS

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = 0 \qquad \text{OU} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

OU AINDA

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \text{COMO QUERÍAMOS DEMONSTRAR.}$$

DEVE-SE PERCEBER QUE A DIMENSÃO DE ψ, OBTIDA DA INTEGRAÇÃO DAS EQS. (7), É DE FLUXO DE MASSA. OU SEJA, A SOLUÇÃO DAS EQS. (7) NUM DETERMINADO VOLUME DE CONTROLE NOS FORNECE O CAMPO DO FLUXO DE MASSA DO ESCOAMENTO. COM ESTE CAMPO É POSSÍVEL OBTER LINHAS COM UM VALOR CONSTANTE DO FLUXO DE MASSA. PORTANTO, DETERMINANDO-SE DUAS LINHAS CHAMADAS POR EXEMPLO DE ψ_2 E ψ_1, A DIFERENÇA ENTRE ELAS NOS INDICA O FLUXO DE MASSA QUE ESCOA ENTRE ESTAS DUAS LINHAS.

TRAÇANDO-SE DIVERSAS LINHAS DE ψ CONSTANTE NUM CAMPO DE ESCOAMENTO PODE-SE VISUALIZAR COMO SE DÁ O MOVIMENTO DO FLUIDO NO VOLUME DE CONTROLE.

AS LINHAS DE ψ CONSTANTE SÃO DENOMINADAS DE LINHAS DE CORRENTE. PODE-SE DEMONSTRAR QUE NÃO OCORRE FLUXO DE MASSA ATRAVÉS DE UMA LINHA DE CORRENTE.

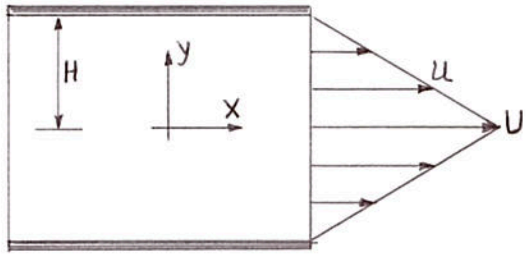
PARA ESCOAMENTOS DE FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS GERALMENTE USA-SE A SEGUINTE DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO DE CORRENTE:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{E} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{8}$$

DESTA FORMA, ψ NÃO REPRESENTA MAIS O FLUXO DE MASSA E SIM A VAZÃO.

VAMOS AGORA DETERMINAR A FUNÇÃO DE CORRENTE PARA UM PROBLEMA SIMPLES.

EXEMPLO: ESCOAMENTO ENTRE DUAS PLACAS COM PROFUNDIDADE UNITÁRIA CONFORMES MOSTRADO NA FIGURA 2.



PERFIL DE VELOCIDADES (LINEAR): $u = U\left(1 - \frac{y}{H}\right)$

$v = 0$

U = VELOCIDADE MÁXIMA DO PERFIL

FIGURA 2.

COMO O ESCOAMENTO É SIMÉTRICO EM RELAÇÃO AO EIXO X, VAMOS FAZER NOSSA ANÁLISE NA REGIÃO $y\,[0, H]$.

SABE-SE QUE $\psi(x, y)$ ASSIM

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

COM AS EQS. (7) TEMOS $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v$ E $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u$, PORTANTO

$$d\psi = -\cancelto{0}{\rho v}\,dx + \rho u\,dy \rightarrow d\psi = \rho u\,dy$$

VAMOS AGORA INTEGRAR ESTA EXPRESSÃO CONSIDERANDO QUE EM $y = 0 \rightarrow \psi = 0$:

$$\int_0^{\psi} d\psi = \int_0^{y} \rho u\,dy = \int_0^{y} \rho U\left(1 - \frac{y}{H}\right)dy = \rho U\left(y - \frac{y^2}{2H}\right)$$

OU

$$\psi = \rho\frac{Uy}{2H}(2H - y) \quad \text{OU AINDA} \quad y^2 - 2Hy + \frac{2H}{\rho U}\psi = 0$$

CONSIDERANDO OS SEGUINTES DADOS: $\rho = 1000\ kg/m^3$, $U = 1\ m/s$ E $H = 0,1\ m$ PODEMOS MONTAR A TABELA ABAIXO.

ψ (kg/s)	y/H	ÁREA
0	0	
		11%
10	0,11	
		12%
20	0,23	
		14%
30	0,37	
		18%
40	0,55	
		45%
50	1,0	

DESSE EXEMPLO DEVEMOS PERCEBER QUE:

1- COMO $v = 0$, AS LINHAS DE CORRENTE SÃO PARALELAS AO EIXO X

2- O MESMO FLUXO DE MASSA $\Delta\psi = 10$ kg/s REQUER ÁREAS CADA VEZ MAIORES PARA ESCOAR À MEDIDA QUE Y CRESCE

3- PARA FLUIDOS INCOMPRESSÍVEIS E $\Delta\psi$ CONSTANTE, QUANTO MAIOR O AFASTAMENTO ENTRE AS LINHAS DE CORRENTE, MENORES SÃO OS VALORES DA VELOCIDADE

ANSPARÊNCIAS