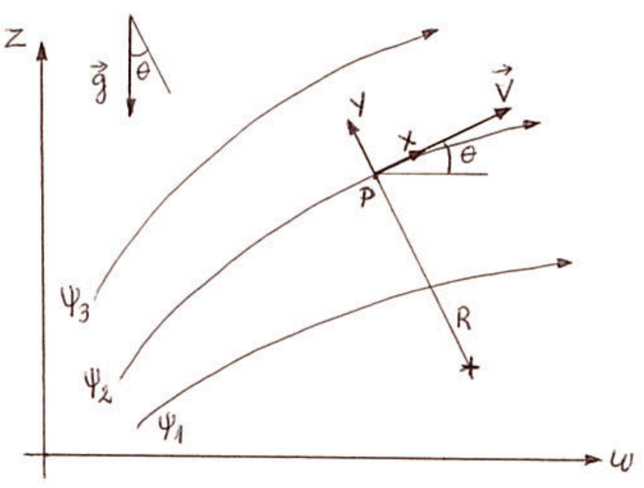
5. EQUAÇÃO DE BERNOULLI



g = ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL

ψ_1, ψ_2, ψ_3 = LINHAS DE CORRENTE

θ = INCLINAÇÃO DO VETOR VELOCIDADE $\vec{V}$ EM RELAÇÃO AO SISTEMA DE COORDENADAS (w, z)

R = RAIO DE CURVATURA DA LINHA DE CORRENTE ψ_2 NO PONTO P

FIGURA 5.

NOSSO OBJETIVO, NESTE ITEM, É DETERMINAR A RELAÇÃO ENTRE AS FORÇAS DE INÉRCIA, DE CORPO E DE PRESSÃO AO LONGO DE UMA LINHA DE CORRENTE E NA DIREÇÃO NORMAL À MESMA.

O SISTEMA DE COORDENADAS MAIS ADEQUADO PARA RESOLVER O PROBLEMA MOSTRADO NA FIGURA 5 É O CILÍNDRICO. PARA ESTE SISTEMA, AS EQUAÇÕES DE EULER SÃO DADAS POR

DIREÇÃO X:
$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho B_x - \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (24)$$

DIREÇÃO Y:
$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{u}{y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{u^2}{y}\right) = \rho B_y - \frac{\partial p}{\partial y} \qquad (25)$$

VAMOS CONSIDERAR QUE O ESCOAMENTO SEJA EM REGIME PERMANENTE. ASSIM, PARA A DIREÇÃO X TEREMOS

$$\rho V \frac{\partial V}{\partial x} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{OU} \qquad V \frac{dV}{dX} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

MAS

$$g_x = -g \,\text{SEN}\,\theta \qquad \text{E} \qquad \text{SEN}\,\theta = \frac{\partial z}{\partial x}$$

PORTANTO,

$$V \frac{dV}{dX} = -g \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \tag{26}$$

NO CASO DE UM ESCOAMENTO EM QUE Z = CONSTANTE, O EFEITO GRAVITACIONAL NÃO EXISTE E A EQ. (26) SE REDUZ A

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = - V \frac{dV}{dX} \tag{27}$$

UMA IMPORTANTE CONSTATAÇÃO PODE SER OBTIDA DA EQ. (27): QUANDO HÁ UM AUMENTO DE VELOCIDADE ($dV>0$) NO ESCOAMENTO HÁ UMA DIMINUIÇÃO DA PRESSÃO ($\partial p<0$), E VICE-VERSA.

$A=0 \quad B=VA$

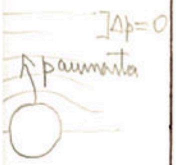
$\to p_2 < p_1$

AINDA CONSIDERANDO Z=CONSTANTE, A EQUAÇÃO DE EULER PARA A DIREÇÃO Y, EQ. (25), PARA O PROBLEMA DA FIGURA 5 SE REDUZ A

$$-\rho \frac{V^2}{R} = - \frac{\partial p}{\partial y}$$

OU

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{V^2}{R} \tag{28}$$



DA EQ. (28) VERIFICA-SE QUE A PRESSÃO CRESCE A PARTIR DO CENTRO DE CURVATURA. NO LIMITE, QUANDO $R \to \infty$, LINHAS DE CORRENTE PARALELAS, A PRESSÃO É CONSTANTE NA DIREÇÃO NORMAL (Y).

AGORA VAMOS INTEGRAR A EQ. (26) AO LONGO DA DIREÇÃO X:

$$\int V \frac{dV}{dx}\,dx = -\int g \frac{\partial z}{\partial x}\,dx - \int \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\,dx$$

$$\int V\,dV = -g\int dz - \frac{1}{\rho}\int dp$$

$$\frac{V^2}{2} = -gz - \frac{1}{\rho}p + C$$

ONDE C É UMA CONSTANTE, OU

$$\underbrace{\frac{p}{\rho}}_{\text{PRESSÃO}} + \underbrace{\frac{V^2}{2}}_{\text{INÉRCIA}} + \underbrace{gz}_{\text{CORPO}} = C \qquad (29)$$

FORÇAS: PRESSÃO INÉRCIA CORPO

A EQ. (29) É A CHAMADA EQUAÇÃO DE BERNOULLI, DEDUZIDA EM 1738. ESTA EQUAÇÃO É VÁLIDA SE SATISFEITAS AS SEGUINTES HIPÓTESES SIMPLIFICATIVAS:

1- REGIME PERMANENTE

2- FLUIDO INCOMPRESSÍVEL

3- g CONSTANTE

4- FLUIDO INVÍSCIDO

5- ESCOAMENTO AO LONGO DE UMA LINHA DE CORRENTE

VEREMOS AGORA ALGUNS EXEMPLOS DE APLICAÇÃO DA EQUAÇÃO DE BERNOULLI.

EXEMPLO 1: CALCULAR A VELOCIDADE COM QUE A ÁGUA DO RESERVATÓRIO MOSTRADO NA FIGURA 6 SAI PELA SEÇÃO 2. O NÍVEL h É MANTIDO CONSTANTE E A PRESSÃO ATMOSFÉRICA (p_a) ATUA NAS SEÇÕES 1 E 2.

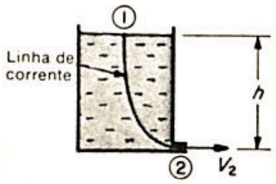


FIGURA 6.

DADOS:

$p_1 = p_2 = p_a$ $\quad$ $A_1 = 0,1\,m^2$

$h = 1\,m$ $\quad$ $A_2 = 0,005\,m^2$

$g = 9,8\,m/s^2$

$\rho = 1000\,kg/m^3$

APLICANDO-SE A EQ. (29) ENTRE OS PONTOS 1 E 2 OBTÉM-SE

$$\cancel{\frac{p_1}{\rho}} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \cancel{\frac{p_2}{\rho}} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

DA EQ. MASSA SABEMOS QUE $V_1 A_1 = V_2 A_2$ OU $V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1}$

ASSIM

LICAR $Z_1 - Z_2$
O EM Z_2
TIDO DE Z
M g

$$\frac{V_2^2}{2}\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \qquad \text{OU} \qquad \frac{V_2^2}{2}\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right] = g(z_1 - z_2) = gh$$

FINALMENTE,

$$V_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}}$$

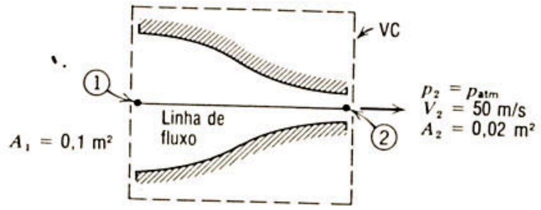
COM OS DADOS OBTÉM-SE $V_2 \cong 4,433\,m/s$.

SEM QUE HAJA ALTERAÇÃO SIGNIFICATIVA NO RESULTADO, QUANDO A RAZÃO ENTRE A ÁREA MAIOR E A MENOR FOR MAIOR OU IGUAL A 10, A EXPRESSÃO ACIMA REDUZ-SE A

$$V_2 = \sqrt{2gh} \qquad (30)$$

COM ESTA NOVA EXPRESSÃO O RESULTADO É $V_2 = 4,427\,m/s$, OU SEJA, APRESENTA UM ERRO DE $\cong 0,14\,‰$.

EXEMPLO 2: CALCULAR A PRESSÃO NO PONTO 1 DO BOCAL CONVERGENTE MOSTRADO NA FIGURA 7. FLUIDO É O AR.



$\rho = 1{,}23\ kg/m^3$

FIGURA 7.

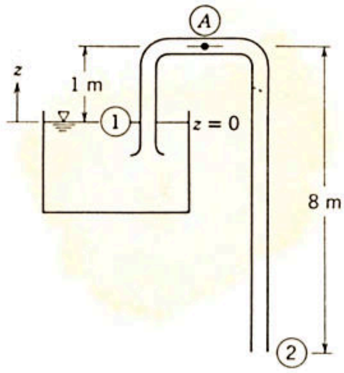
DA EQ. (29):
$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2$$

CONSIDERANDO z = CONSTANTE E SABENDO-SE DA EQ. MASSA QUE $V_1 A_1 = V_2 A_2 \rightarrow V_1 = V_2 \frac{A_2}{A_1} = 10\ m/s$. ASSIM A EXPRESSÃO ACIMA RESULTA EM

$$(p_1 - p_{atm}) = \frac{\rho}{2}(V_2^2 - V_1^2) \cong 1{,}48\ kPa$$

DEVE-SE NOTAR QUE ESTE VALOR REPRESENTA A PRESSÃO MANOMÉTRICA NA SEÇÃO 1.

EXEMPLO 3: CALCULAR A VELOCIDADE DA ÁGUA NA SEÇÃO 2 E A PRESSÃO NO PONTO "A" PARA O PROBLEMA MOSTRADO NA FIGURA 8. TANTO A SEÇÃO 1 COMO A 2 ESTÃO SUBMETIDAS À PRESSÃO ATMOSFÉRICA.



$A_1 >> A_2$

$\rho = 1000\ kg/m^3$

$g = 9,8\ m/s^2$

$p_1 = 101\ kPa$

FIGURA 8.

APLICANDO-SE A EQUAÇÃO DE BERNOULLI ENTRE OS PONTOS 1 E 2 OBTÉM-SE

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + g z_2$$

COMO $p_1 = p_2$ E $A_1 >> A_2 \rightarrow V_1 \cong 0$,

$$\frac{V_2^2}{2} = g(z_1 - z_2) \longrightarrow V_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)}$$

$$z_1 = 0 \Longrightarrow V_2 \cong 11,7\ m/s$$

A EQUAÇÃO DE BERNOULLI APLICADA ENTRE OS PONTOS 1 E A RESULTA EM

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + g z_1 = \frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + g z_A$$

SABEMOS QUE $z_1 = 0$, $V_1 \cong 0$ E $V_A = V_2$ JÁ QUE O DUTO TEM SEÇÃO CONSTANTE, ASSIM

$$p_A = p_1 - \rho g z_A - \rho \frac{V_2^2}{2}$$

COM OS DADOS

$$p_A = 101 \times 10^3 - 9,8 \times 10^3 - 68,4 \times 10^3 = 22,8\ kPa$$

CESSIDADE
OCÇÃO P./
IODO ESC.

DEVE-SE NOTAR QUE A PRESSÃO NO PONTO A É MENOR QUE A PRESSÃO ATMOSFÉRICA (p_1).

EXEMPLO 4: UM AVIÃO MOVE-SE COM VELOCIDADE DE 150 km/h EM MEIO AO AR. SABE-SE QUE A VELOCIDADE DO AR RELATIVA A ASA DESTE AVIÃO, NO PONTO A, É DE 60 m/s. CALCULAR A PRESSÃO MANOMÉTRICA NO PONTO A. O PROBLEMA É MOSTRADO ESQUEMATICAMENTE NA FIGURA 9.

FIGURA 9. a) ASA EM MOVIMENTO; b) AR EM MOVIMENTO.

PLICAR PORQUE TRANSIENTE OU PERMANENTE

SE CONSIDERARMOS A ASA EM MOVIMENTO, O PROBLEMA SE DÁ EM REGIME TRANSIENTE E A EQUAÇÃO DE BERNOULLI (EQ. 29) QUE DEDUZIMOS NÃO PODE SER APLICADA. MAS, SE CONSIDERARMOS A ASA IMÓVEL E O AR EM MOVIMENTO, O PROBLEMA PROCESSA-SE EM REGIME PERMANENTE. NESTE CASO, OS DADOS SÃO:

$V_{AR} = 150$ km/h $\cong 41,7$ m/s $\qquad \rho_{AR} = 1,2$ kg/m^3 $\qquad p_{AR}$ = PRESSÃO ATMOSFÉRICA

$Z_{AR} = 0$ $\qquad Z_A = 0,1$ m $\qquad g = 9,8$ m/s^2

A APLICAÇÃO DA EQ. BERNOULLI RESULTA EM

$$\frac{p_{AR}}{\rho} + \frac{V_{AR}^2}{2} + \cancel{gZ_{AR}}^{\,0} = \frac{p_A}{\rho} + \frac{V_A^2}{2} + gZ_A$$

$$(p_A - p_{AR}) = \rho\frac{(V_{AR}^2 - V_A^2)}{2} - \rho g Z_A$$

COM OS DADOS,

ALAR SOBRE TENTAÇÃO $p<0$; SIMÉTRICA OU c/ α

$$(p_A - p_{AR}) = -1117 - 1,2 \cong -1,12 \text{ kPa}$$

DEVE-SE PERCEBER O EFEITO INSIGNIFICANTE DA FORÇA DE CORPO NESTE PROBLEMA.

6. TIPOS DE PRESSÃO

A PRESSÃO QUE APARECE NAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES, DE EULER E DE BERNOULLI É DENOMINADA DE PRESSÃO TERMODINÂMICA OU PRESSÃO ESTÁTICA.

ATRAVÉS DA EQ. (28) VIMOS QUE QUANDO AS LINHAS DE CORRENTE NUM ESCOAMENTO SÃO PARALELAS NÃO HÁ VARIAÇÃO DA PRESSÃO NA DIREÇÃO NORMAL AO ESCOAMENTO. PORTANTO, POR MEIO DE UM ORIFÍCIO NA PAREDE DE UM DUTO, CONFORME MOSTRADO NA FIGURA 10a, É POSSÍVEL MEDIR A PRESSÃO ESTÁTICA DO FLUIDO NA SEÇÃO ONDE ESTÁ O ORIFÍCIO AO LIGÁ-LO A UM MANÔMETRO. A PRESSÃO ESTÁTICA, EM QUALQUER PONTO DE UM ESCOAMENTO, É MEDIDA USANDO-SE O SENSOR MOSTRADO NA FIGURA 10b.

...CAR ΔX
...PONTA E
...CIOS →
...S CORRENTE //

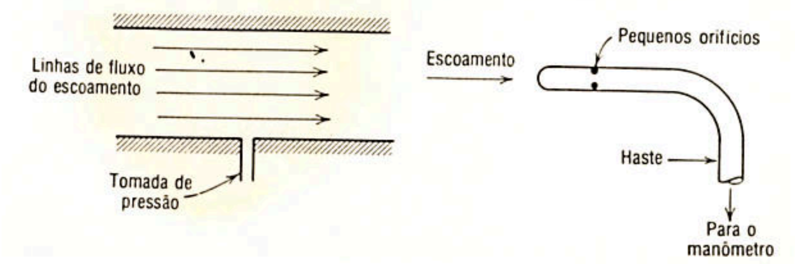


FIGURA 10. (a) (b)

VAMOS CONSIDERAR O DISPOSITIVO APRESENTADO NA FIGURA 11. HÁ UM DUTO QUE ESTÁ CONECTADO A UM MANÔMETRO NUMA DAS EXTREMIDADES E, PORTANTO, NÃO HÁ ESCOAMENTO NESTA EXTREMIDADE. NA OUTRA EXTREMIDADE DO DUTO HÁ UM ORIFÍCIO POSICIONADO FRONTALMENTE A UM ESCOAMENTO. AQUI, ENTÃO, PODE HAVER PASSAGEM DE MASSA.

AO SE COLOCAR ESTE DISPOSITIVO NO MEIO DE UM ESCOAMENTO, HAVERÁ ENTRADA DE MASSA PELO ORIFÍCIO ~~A~~ ATÉ QUE O REGIME PERMANENTE SEJA ALCANÇADO. A PARTIR DESTE MOMENTO É POSSÍVEL APLICAR-SE A EQUAÇÃO DE BERNOULLI.

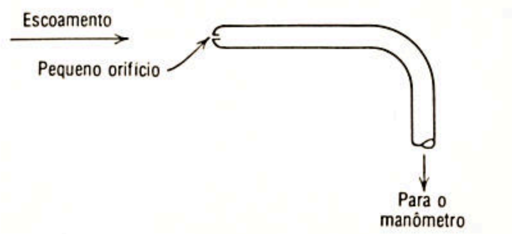


FIGURA 11.

Se a pressão e a velocidade do escoamento forem p e V, e no orifício do duto da Figura 11 tivermos p_0 e V_0 e, ainda, considerarmos que z seja constante, a aplicação da equação de Bernoulli resulta em

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{V_0^2}{2}$$

Agora, deve-se perceber que como não há mais fluxo de massa no orifício quando o regime permanente é alcançado, $V_0 = 0$. Desta forma, a pressão no orifício e, por extensão, a pressão medida pelo manômetro será dada por

ida p/ fluido compressível

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2 \qquad (31)$$

DE SER < p?

A PRESSÃO p_0 É DENOMINADA DE PRESSÃO DE ESTAGNAÇÃO OU PRESSÃO TOTAL. A EQ. (31) PODE SER REESCRITA COMO

$$p_0 = p + p_d \tag{32}$$

ONDE

$$p_d = \frac{1}{2}\rho V^2 \quad \text{(PRESSÃO DINÂMICA)} \tag{33}$$

SE JUNTARMOS OS DISPOSITIVOS DAS FIGURAS 10a E 11, CONFORME MOSTRADO NA FIGURA 12a, PODEREMOS MEDIR AS PRESSÕES ESTÁTICA E TOTAL NO PONTO A E ASSIM CALCULAR A VELOCIDADE DO ESCOAMENTO NESTE PONTO. ATRAVÉS DA EQ. (31) PODE-SE OBTER

$$V = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}} \tag{34}$$

A MEDIÇÃO SIMULTÂNEA DAS PRESSÕES ESTÁTICA E TOTAL NUM PONTO QUALQUER DE UM ESCOAMENTO É FEITA POR MEIO DO CHAMADO TUBO DE PITOT, MOSTRADO NA FIGURA 12b E QUE RESULTA DA JUNÇÃO DOS DISPOSITIVOS APRESENTADOS NAS FIGURAS 10b E 11.

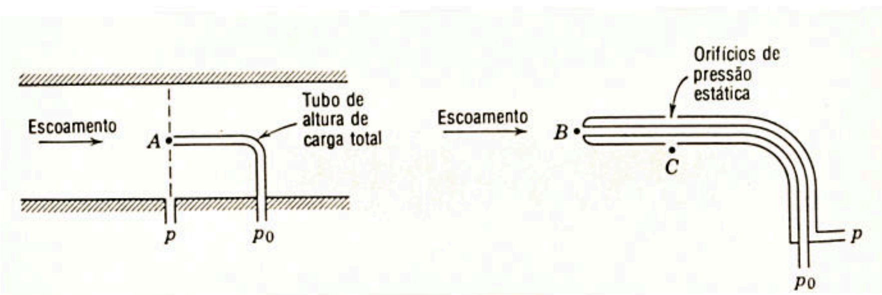


FIGURA 12. (a) (b)

TURBAÇÃO DO ...AMENTO

O DIÂMETRO DOS TUBOS DE PITOT PODEM SER TÃO PEQUENOS QUANTO 1,6 mm. OS ORIFÍCIOS DAS TOMADAS DE PRESSÃO DEVEM TER DIÂMETRO INFERIOR A 0,1 mm PARA QUE AS MEDIDAS DE PRESSÃO SEJAM INDEPENDENTES DO TAMANHO DESTES ORIFÍCIOS.

...ÉDIA

EXEMPLO: CALCULAR A VELOCIDADE COM QUE A ÁGUA ESCOA NO INTERIOR DE UM DUTO NUMA DETERMINADA SEÇÃO ONDE UM MANÔMETRO DE MERCÚRIO APRESENTA 40 mm DE DESNÍVEL, CONFORME MOSTRADO NA FIGURA 13.

DADOS: $\rho_{H_2O} = 1000\ kg/m^3$ $\rho_{Hg} = 13\,600\ kg/m^3$ $g = 9{,}8\ m/s^2$

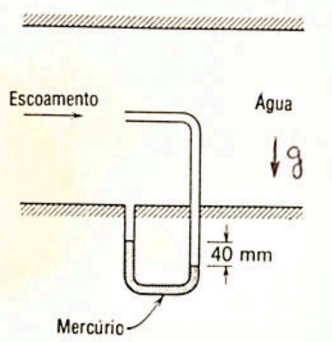


FIGURA 13.

LICAR

APLICANDO-SE A EQUAÇÃO DA ESTÁTICA DOS FLUIDOS CHEGA-SE A

$$p = p_0 + \rho_{H_2O}\, g h - \rho_{Hg}\, g h \quad \text{OU} \quad (p_0 - p) = (\rho_{Hg} - \rho_{H_2O})\, g h$$

SUBSTITUINDO ESTA RELAÇÃO NA EQ. (34) TEM-SE

$$V = \sqrt{\frac{2gh(\rho_{Hg} - \rho_{H_2O})}{\rho_{H_2O}}} \cong 3{,}14\ m/s$$