

## 7. CAMADA LÍMITE

APESAR DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES TEREM SIDO OBTIDAS EM 1845 SÓ EM 1908 ELAS FORAM RESOLVIDAS PARA UM PROBLEMA PRÁTICO POR BLASIUS. E ISTO SÓ FOI POSSÍVEL DEPOIS QUE PRANDTL PROPÕS EM 1904 O CONCEITO DE CAMADA LÍMITE.

A CAMADA LÍMITE É DEFINIDA COMO A REGIÃO EM QUE A VELOCIDADE DO ESCOAMENTO VARIA DA VELOCIDADE DE UM OBJETO ATÉ 99% DA VELOCIDADE DO ESCOAMENTO NÃO PERTURBADO POR ESTE OBJETO.

UM EXEMPLO DE CAMADA LÍMITE É MOSTRADO NA FIGURA 14 ONDE O AR ESLOA SOBRE UMA PLACA PLANA.

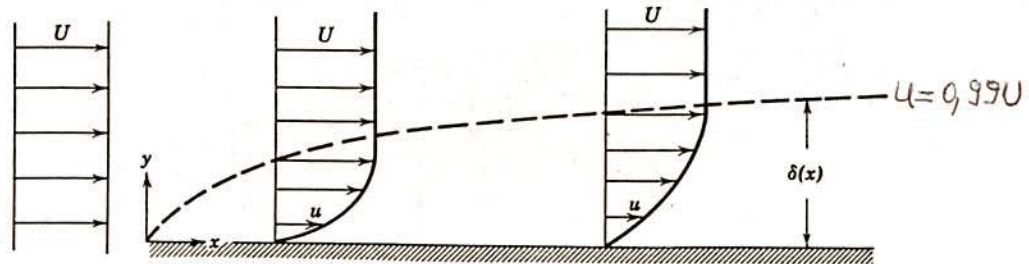


FIGURA 14.

UMA IMPORTANTÍSSIMA CONSTATAÇÃO EXPERIMENTAL USADA NO CONCEITO DE CAMADA LÍMITE É QUE A VELOCIDADE DO FLUÍDO EM CONTATO COM UM OBJETO É IGUAL À VELOCIDADE DO PRÓPRIO OBJETO. A ISTO SE DÁ A DENOMINAÇÃO DE CONDIÇÃO DE CONTOURO DE NÃO-ESCORREGAMENTO, COMO PODE SER VISTO NA FIGURA 15.

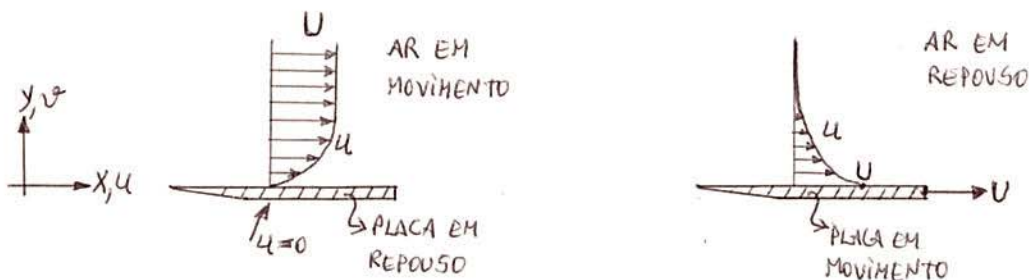


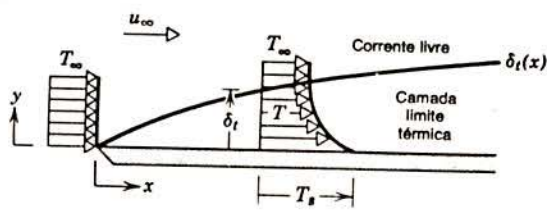
FIGURA 15.

PARA A COMPONENTE DO VETOR VELOCIDADE NORMAL A UM OBJETO ( $\theta$ ), ADOTA-SE A CONDIÇÃO DE CONTORNO DE IMPERMEABILIDADE, OU SEJA, O FLUIDO NÃO ATRAVESSA O OBJETO ( $v_n = 0$ ).

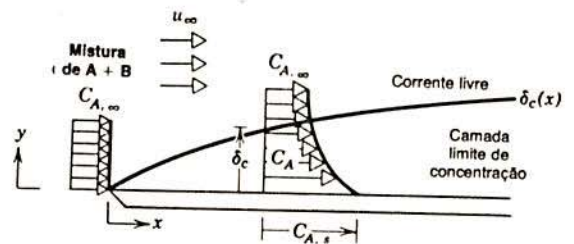
65

DEVE-SE PERCEBER QUE A LINHA QUE DEFINE A CAMADA LÍMITE NÃO É UMA LINHA DE CORRENTE!

EXISTEM PLO MENOS TRÊS TIPOS DE CAMADA LÍMITE. AQUELA MOSTRADA NA FIGURA 14 E RELACIONADA À VELOCIDADE DE UM ESCOAMENTO É DENOMINADA DE CAMADA LÍMITE CINÉTICA OU HIDRODINÂMICA. OS OUTROS DOIS TIPOS SÃO A CAMADA LÍMITE TÉRMICA E A CAMADA LÍMITE DE CONCENTRAÇÃO CONFORME MOSTRADO NA FIGURA 16.



C.L. TÉRMICA



C.L. DE CONCENTRAÇÃO

FIGURA 16.

A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES (EQ. 18) PARA A DIREÇÃO X E ESCOAMENTO ISOBÁRICO BIDIMENSIONAL EM REGIME PERMANENTE, SEM FORÇAS DE CORPO, FLUIDO INCOMPRESSÍVEL COM  $\mu$  CONSTANTE SE RESUME A

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (35)$$

ONDE

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (\text{VISCOSIDADE CINEMÁTICA, m}^2/\text{s}) \quad (36)$$

VAMOS ANALISAR A ORDEM DE GRANDEZA DOS TERMOS DA EQ. (35) PARA ESTIMAR A ESPESSURA DA CAMADA LÍMITE HIDRODINÂMICA NA REGIÃO MOSTRADA NA FIGURA 17.

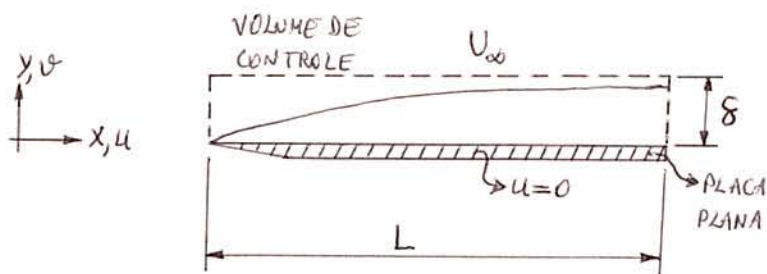


FIGURA 17.

DE EXPERIMENTOS, SABE-SE QUE A ESPESSURA ( $\delta$ ) DA CAMADA LÍMITE PARA UMA PLACA DE COMPRIMENTO  $L$  É MUITO PEQUENA EM RELAÇÃO A  $L$ , OU SEJA,  $L \gg \delta$ . ALÉM DISSO, TEM-SE

$$u \sim U_\infty \quad x \sim L \quad y \sim \delta \quad (37)$$

ONDE O SÍMBOLO  $\sim$  REPRESENTA ORDEM DE GRANDEZA.

DA EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA PARA ESTE PROBLEMA TEMOS

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (38)$$

COM AS RELAÇÕES (37) NA EQ. (38) CHEGA-SE A

$$\frac{U_\infty}{L} \sim \frac{v}{\delta} \rightarrow v \sim \frac{U_\infty \delta}{L} \quad (39)$$

USANDO AS RELAÇÕES (37) E (39) NA EQ. (35) OBTÉM-SE

$$U_\infty \frac{U_\infty}{L} + \frac{U_\infty \delta}{L} \frac{U_\infty}{\delta} \sim \nu \frac{U_\infty}{L^2} + \nu \frac{U_\infty}{\delta^2}$$

COMO  $L \gg \delta \rightarrow \nu \frac{U_\infty}{L^2} \ll \nu \frac{U_\infty}{\delta^2}$  E O TERMO  $\nu \frac{U_\infty}{L^2}$  PODE SER

DESPREZADO. ASSIM,

$$\frac{U_\infty^2}{L} \sim \nu \frac{U_\infty}{\delta^2} \quad \text{OU} \quad \frac{\delta^2}{L} \sim \frac{\nu}{U_\infty}$$

DIVIDINDO POR  $L$  TEM-SE

$$\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \sim \frac{\nu}{U_\infty L} \quad \text{OU} \quad \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \sim \frac{1}{Re_L} \quad (40)$$

ONDE

$$Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} \quad (\text{NÚMERO DE REYNOLDS BASEADO EM } L; \text{ ADIMENSIONAL}) \quad (41)$$

A EXPRESSÃO (40) PODE SER REESCRITA COMO

$$\left(\frac{L}{\delta}\right)^2 \sim Re_L \quad (42)$$

O QUE PERMITE INTERPRETAR O NÚMERO DE REYNOLDS COMO UM PARÂMETRO QUE RELACIONA A ESPESURA DA CAMADA LÍMITE PARA UMA PLACA DE COMPRIMENTO  $L$ . FORA DA REGIÃO DA CAMADA LÍMITE, O NÚMERO DE REYNOLDS REPRESENTA A RAZÃO ENTRE AS FORÇAS DE INÉRCIA E AS FORÇAS VISCOSAS.

67

DA EXPRESSÃO (40). PODEMOS, FINALMENTE, OBTER A ORDEM DE GRANDEZA DA ESPESURA DA CAMADA LÍMITE:

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_L}} \quad (43)$$

A SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS Eqs. (35) E (38) OBTIDA POR BLASIUS EM 1908 FORNECE

$$\frac{\delta}{L} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_L}} \quad \text{OU} \quad \frac{\delta}{X} = \frac{5,0}{\sqrt{Re_x}} = 5,0 \sqrt{\frac{\nu}{u_{\infty} X}} \quad (44)$$

BEI COMO O PERFIL DE VELOCIDADES  $u$  MOSTRADO NA FIGURA 18. ESTE PERFIL TEM COMPROVAÇÃO EXPERIMENTAL CONFORME OS RESULTADOS APRESENTADOS NA FIGURA 19.

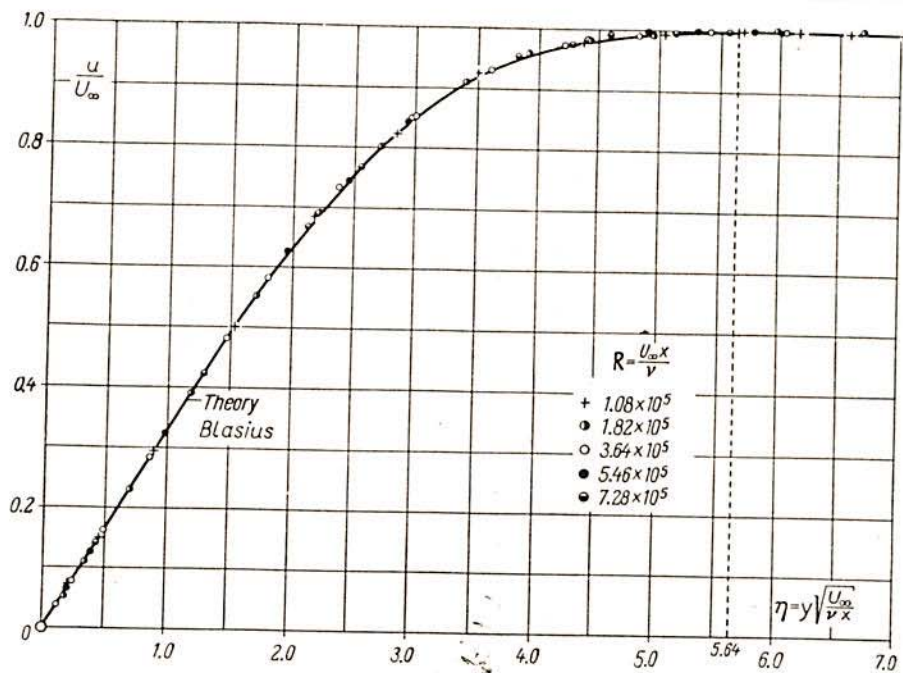


FIGURA 19. PERFIL DE VELOCIDADES DE BLASIUS COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS.

NA FIGURA 20 PODE-SE VERIFICAR A ESPESSURA DA CAMADA LÍMITE EM FUNÇÃO DA VELOCIDADE DO ESCORAMENTO DE AR SOBRE UMA PLACA PLANA.

ATRAVÉS DA EQ. (49) CONSTATA-SE QUE:

1- QUANTO MAIOR A VELOCIDADE  $U_\infty$  DO ESCORAMENTO, MENOR É A ESPESSURA DA CAMADA LÍMITE;

68

2- QUANTO MAIS VISCOZO É O FLUIDO ( $\nu$  MAIOR), MAIS ESPESSE É A CAMADA LÍMITE; E

3- PARA  $U_\infty$  E  $\nu$  CONSTANTES, A ESPESSURA DA CAMADA LÍMITE CRESCE COM O COMPRIMENTO  $X$ .

CONSIDERANDO A FIGURA 17, PODE-SE MOSTRAR ATRAVÉS DA ANÁLISE DE ORDEM DE GRANDEZA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES QUE

$$\frac{\partial p}{\partial x} \gg \frac{\partial p}{\partial y} \sim 0 \quad (45)$$

ISSO SIGNIFICA QUE A VARIÇÃO DE PRESSÃO QUE OCORRE ENTRE A PAREDE DE UM OBJETO E O EXTREMO DA CAMADA LÍMITE PODE SER DESPREZADA.

QUANDO HÁ O ESCOAMENTO DE UM FLUIDO SOBRE UM OBJETO SURGE A CHAMADA FORÇA DE ARRASTO VISCOZO ( $F_v$ ) CUJO SENTIDO É O MESMO DO ESCOAMENTO.

O ARRASTO VISCOZO ( $F_v$ ) ~~DA~~ RESULTA DO EFEITO DA VISCOSIDADE NA CAMADA LÍMITE. ELE É OBTIDO ATRAVÉS DA TENSÃO CÍSLHANTE ( $\tau_{yx}$ ) EXISTENTE NA SUPERFÍCIE DO OBJETO.

$$\text{COMO JÁ VIMOS (EQ. 17), } \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

MAS EM  $y=0 \rightarrow v=0$  ENTÃO

$$\tau_w = \mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} \quad (46)$$

ONDE  $\tau_w$  É A TENSÃO CÍSLHANTE NA PAREDE DO OBJETO. O VALOR DE  $\tau_w$  É ADIMENSIONALIZADO PELA PRESSÃO DINÂMICA ( $p_d$ ) DO ESCOAMENTO RESULTANDO NO COEFICIENTE DE ATRITO ( $C_f$ ):

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = \frac{\tau_w}{p_d} \quad (47)$$

PARA O CASO DE PLACAS PLANAS, O COEFICIENTE DE ATRITO MÉDIO ( $\bar{C}_{fL}$ ) OBTIDO POR BLASIUS É

$$\bar{C}_{fL} = \frac{1,328}{\sqrt{Re_L}} \quad (48)$$

CONHECIDO  $\bar{c}_w$ , A FORÇA DE ARRASTO VISCOSO É OBTIDA POR

$$F_u = \bar{c}_w A_w \quad (49)$$

ONDE  $A_w$  É A ÁREA DO OBJETO EM CONTATO COM O FLUÍDO.

EXEMPLO: AR ESCOANDO SOBRE O AEROFÓLIO DE UM CARRO DE FÓRMULA 1.

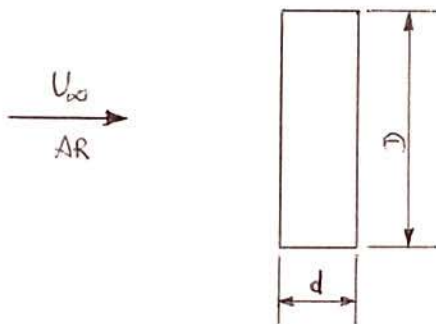
DADOS:  $U_\infty = 90 \text{ m/s} = 324 \text{ km/h}$

$$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu = 1,5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$d = 0,3 \text{ m}$$

$$D = 1,5 \text{ m}$$



COM OS DADOS,  $Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = \frac{90 \times 0,3}{1,5 \times 10^{-5}} = 1,8 \times 10^6$

DA EQ. (48),  $\bar{c}_L = 9,90 \times 10^{-4}$

PRESSÃO DINÂMICA:  $p_d = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 = 4860 \text{ Pa}$

E

$$\bar{c}_w = p_d \bar{c}_L = 4,81 \text{ Pa}$$

A ÁREA DO AEROFÓLIO EM CONTATO COM O FLUÍDO É:

$$A_w = 2 d D = 0,9 \text{ m}^2$$

PORTANTO,

$$F_u = \bar{c}_w A_w = 4,33 \text{ N}$$

A POTÊNCIA DISSIPADA PELO ATRITO É DADA POR

$$\dot{W} = F_u U_\infty = 3,90 \text{ W}$$



CAMADA LIMITE  
Solucao de Blasius

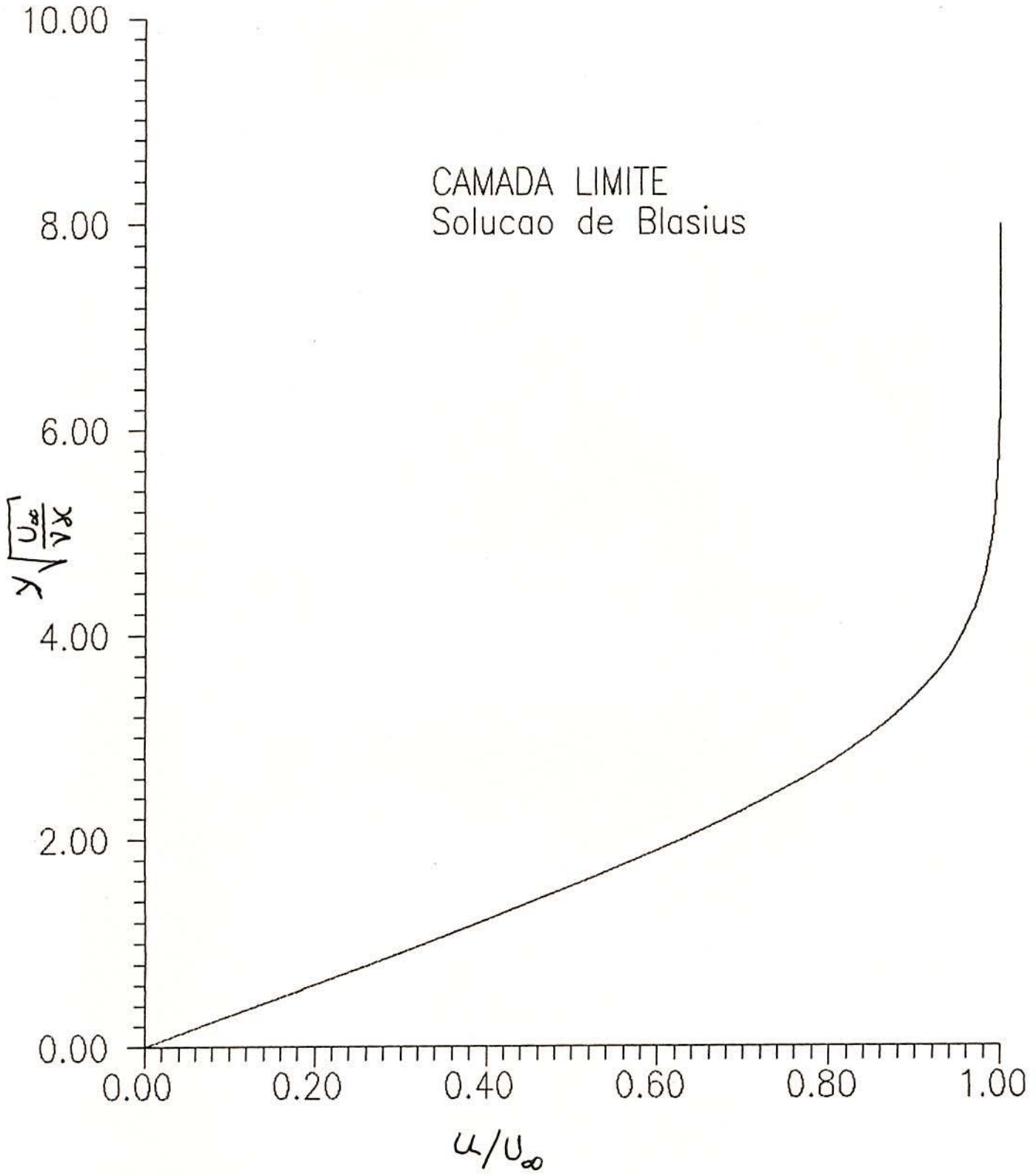


FIGURA 18.

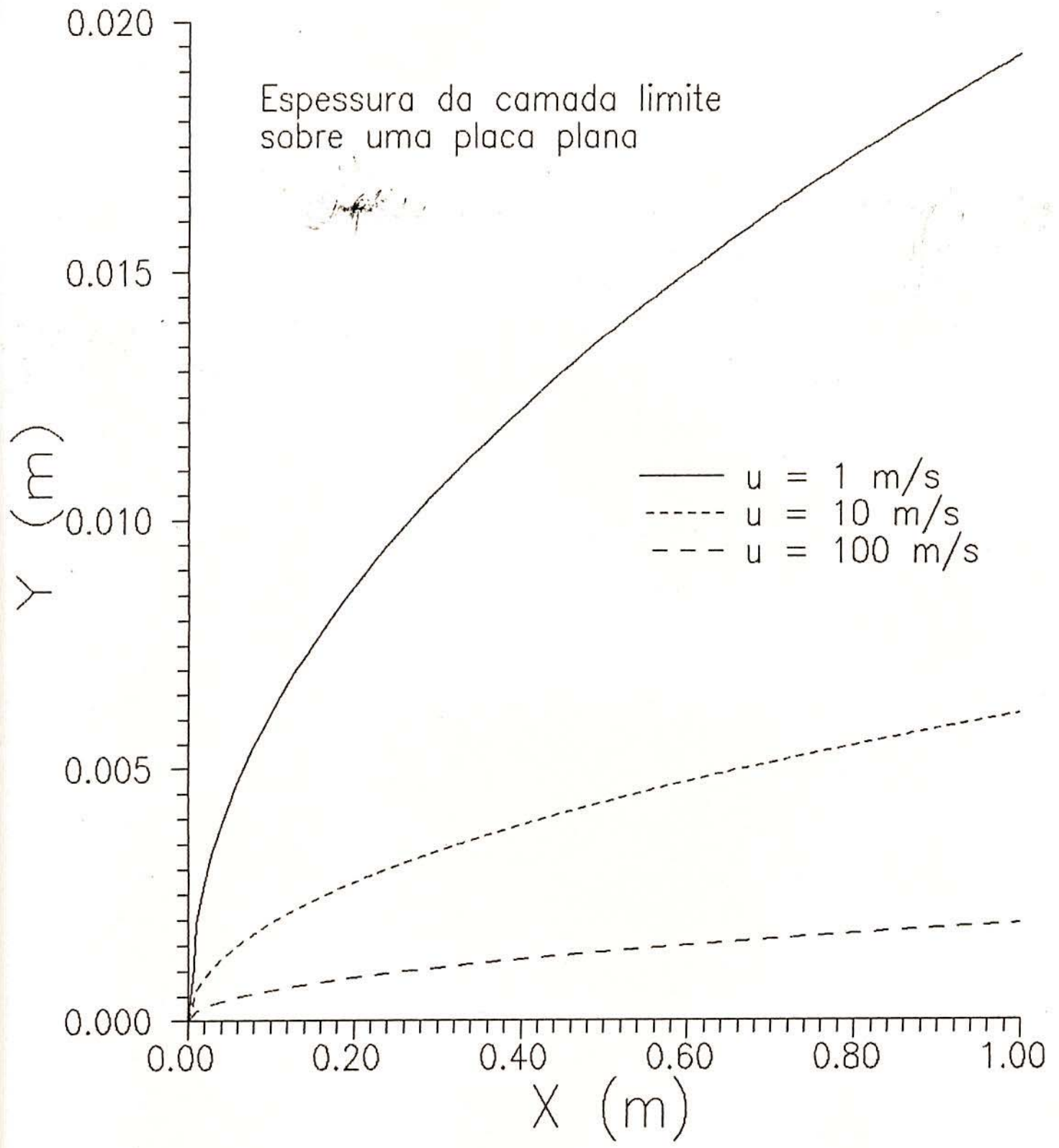


FIGURA 20.