8. ESCOAMENTO PLENAMENTE DESENVOLVIDO

VAMOS CONSIDERAR O ESCOAMENTO LAMINAR DE UM PERFIL DE VELOCIDADES UNIFORME $\overline{U}$ NUM DUTO FORMADO POR DUAS PLACAS PLANAS E PARALELAS DISTANCIADAS POR D, CONFORME MOSTRADO NA FIGURA 21. DEVIDO À EXISTÊNCIA DAS PAREDES, SURGIRÃO DUAS CAMADAS LIMITES QUE AUMENTARÃO DE ESPESSURA ATÉ À METADE DA DISTÂNCIA ENTRE AS PLACAS $(D/2)$.

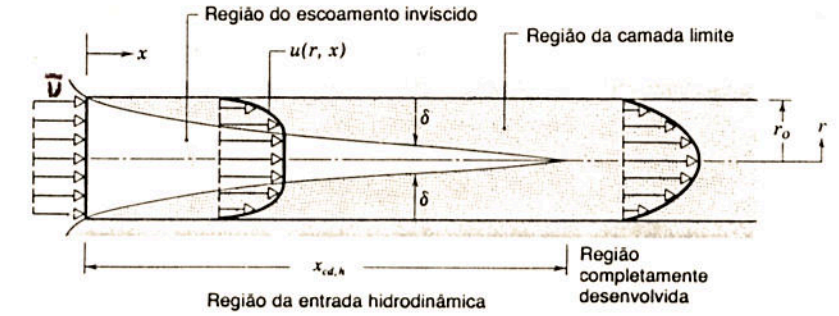

FIGURA 21.

L OU $X_{CD,H}$ É DENOMINADO DE COMPRIMENTO DE MISTURA, COMPRIMENTO DE ENTRADA OU REGIÃO DA ENTRADA HIDRODINÂMICA. É A DISTÂNCIA NECESSÁRIA PARA AS DUAS CAMADAS LIMITES SE DESENVOLVEREM E ATINGIREM A METADE DA DISTÂNCIA ENTRE AS PLACAS. PORTANTO, NA REGIÃO $0 \leq X \leq L$ OS PERFIS DE VELOCIDADES MUDAM COM X DEVIDO AO CRESCIMENTO DAS CAMADAS LIMITES. A PARTIR DE $X = L$ OS PERFIS DE VELOCIDADES NÃO VARIAM MAIS COM X PORQUE AS CAMADAS LIMITES NÃO PODEM AUMENTAR MAIS SUAS ESPESSURAS. E, ENTÃO, TEM-SE O CHAMADO PERFIL DE VELOCIDADES COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO.

AS ESTIMATIVAS PARA O COMPRIMENTO L SÃO:

• ENTRE PLACAS PLANAS: $$\frac{L}{D} \cong 0{,}0065\, Re_D \qquad (50)$$

• DUTO CIRCULAR: $$\frac{L}{D} \cong 0{,}058\, Re_D \qquad (51)$$

ONDE Re_D É O NÚMERO DE REYNOLDS BASEADO NA DISTÂNCIA ENTRE AS PLACAS OU NO DIÂMETRO DO DUTO CIRCULAR.

PORTANTO, PARA UM ESCOAMENTO ENTRE PLACAS PLANAS A $Re_D = 1000$, $L \cong 6{,}5D$. PARA UM DUTO CIRCULAR, $L \cong 58D$.

VAMOS, AGORA, OBTER A SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PERFIL DE VELOCIDADES COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO PARA UM ESCOAMENTO ENTRE PLACAS PLANAS E PARALELAS.

COMO JÁ VIMOS, PARA UM FLUIDO INCOMPRESSÍVEL, COM μ CONSTANTE E SEM FORÇAS DE CORPO, A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES NA DIREÇÃO X É (EQ. 18):

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad (52)$$

PARA ESCOAMENTO EM REGIME PERMANENTE, $\partial u/\partial t = 0$ E PARA ESCOAMENTO COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO:

$$v = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (53)$$

PORTANTO, NÃO EXISTEM FORÇAS DE INÉRCIA NO ESCOAMENTO COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO E EM REGIME PERMANENTE. A EQ. (18) SE REDUZ, ENTÃO, A

$$\mu\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \qquad (54)$$

ESTA EQUAÇÃO REPRESENTA UMA RELAÇÃO ENTRE FORÇAS VISCOSAS E DE PRESSÃO.

INTEGRANDO-SE A EQ. (54) UMA VEZ,

INTEGRANDO-SE A EQ. (54) UMA VEZ:

$$\int \mu \frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dy}\right) dy = \int \frac{dp}{dx}\, dy \quad \therefore \quad \mu \frac{du}{dy} = \frac{dp}{dx}\, y + C_1$$

E PELA SEGUNDA VEZ

$$\int \mu \frac{du}{dy}\, dy = \int \left(\frac{dp}{dx} y + C_1\right) dy \quad \therefore$$

$$\mu u = \frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2 \qquad (55)$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO:

- $y = 0 \rightarrow u = 0 \Longrightarrow 0 = C_2$
- $y = D \rightarrow u = 0 \Longrightarrow 0 = \frac{dp}{dx}\frac{D^2}{2} + C_1 D \rightarrow C_1 = -\frac{D}{2}\frac{dp}{dx}$

COM C_1 E C_2 NA EQ. (55)

$$\mu u = \frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} - \frac{D}{2} y \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{Dy}{2}\right)$$

OU

$$u = \frac{D^2}{2\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right)\left[\left(\frac{y}{D}\right)^2 - \left(\frac{y}{D}\right)\right] \qquad (56)$$

DA EQ.(56) VEMOS QUE O PERFIL COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO TEM A FORMA DE UMA PARÁBOLA.

CONHECIDO $u(y)$, PODEMOS OBTER A VELOCIDADE MÉDIA $\overline{U}$ ATRAVÉS DE

$$\overline{U} = \frac{1}{D}\int_0^y u\, dy \qquad (57)$$

CUJA SOLUÇÃO FORNECE

$$\overline{U} = -\frac{D^2}{12\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right) \qquad (58)$$

IGUALANDO-SE AS EQS. (56) E (58) PODE-SE ELIMINAR A PRESSÃO E OBTER

$$u = 6\bar{U}\left[\left(\frac{y}{D}\right) - \left(\frac{y}{D}\right)^2\right] \qquad (59)$$

FAZENDO $\frac{du}{dy} = 0$ ENCONTRAMOS QUE u É MÁXIMO EM $y = D/2$. E VALE

$$u_{max} = \frac{3}{2}\bar{U} \qquad (60)$$

PORTANTO, O PERFIL DE VELOCIDADES COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO DO ESCOAMENTO ENTRE PLACAS PLANAS E PARALELAS É AQUELE APRESENTADO NA FIGURA 22.

NO CASO DE DUTOS CIRCULARES, A SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES FORNECE PARA O PERFIL DE VELOCIDADES COMPLETAMENTE DESENVOLVIDO:

$$u = 2\bar{U}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] \qquad (61)$$

E

$$u_{max} = 2\bar{U} \qquad (62)$$

ONDE R É O RAIO DO DUTO.

O PERFIL DE VELOCIDADES DADO PELA EQ. (61) É CHAMADO DE PERFIL OU ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLE.

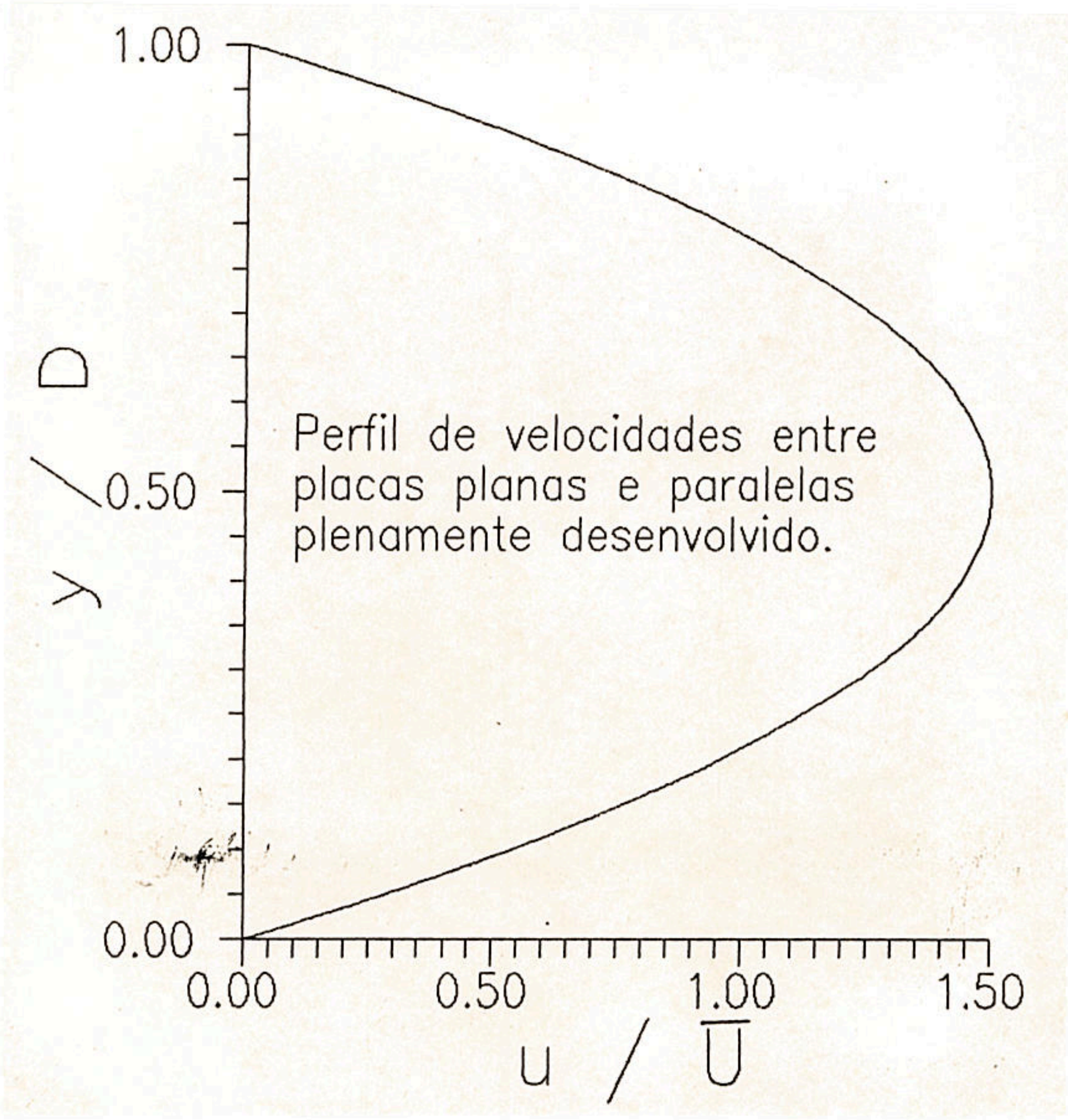
1.00
0.50
0.00
y / D
Perfil de velocidades entre
placas planas e paralelas
plenamente desenvolvido.
0.00
0.50
1.00
1.50
u / $\overline{U}$

FIGURA 22.

SE AGORA CONSIDERARMOS O ESCOAMENTO QUE OCORRE ENTRE DUAS PLACAS PARALELAS ONDE UMA ESTÁ IMÓVEL E A OUTRA TEM VELOCIDADE U E ONDE $dp/dx = 0$, A SOLUÇÃO GERAL DA EQ. (55) SE REDUZ A

$$\mu u = C_1 y + C_2$$

COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO:

- $y = 0 \rightarrow u = 0 \Rightarrow 0 = C_2$
- $y = D \rightarrow u = U \Rightarrow \mu U = C_1 D \longrightarrow C_1 = \mu \frac{U}{D}$

E, PORTANTO,

$$\mu u = \mu \frac{U}{D} y \longrightarrow \qquad u = \frac{y}{D} U \qquad (63)$$

ESTE RESULTADO É MOSTRADO NA FIGURA 23. O PERFIL DE VELOCIDADES DA EQ. (63) É DENOMINADO DE PERFIL OU ESCOAMENTO DE COUETTE.

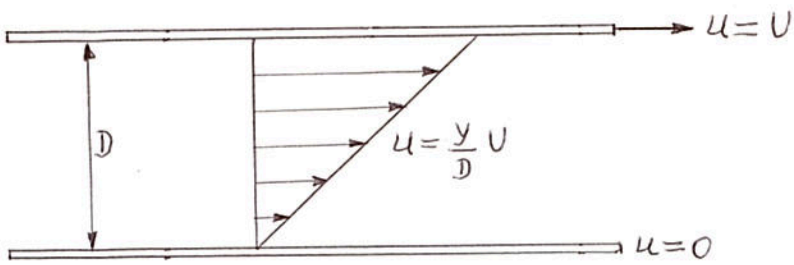

FIGURA 23.

CONHECIDOS OS PERFIS DE VELOCIDADES, COMO NOS TRÊS PROBLEMAS ACIMA, PODE-SE OBTER $\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}$, CALCULAR A TENSÃO NA PAREDE (τ_w) COM A EQ. (46) E A FORÇA DE ATRITO (F_a) COM A EQ. (49).

VAMOS, AGORA, REESCREVER A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES, NA DIREÇÃO X, PARA ρ E μ CONSTANTES:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\rho B_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad ($$

COMO NA TRANSFERÊNCIA DE CALOR, OS TERMOS COM DERIVADAS DE 2ª ORDEM NA EQ. ACIMA REPRESENTAM DIFUSÃO, SÓ QUE NO CASO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES TEM-SE DIFUSÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR.

JÁ OS TERMOS RELATIVOS ÀS FORÇAS DE INÉRCIA, DERIVADAS DE 1ª ORDEM, REPRESENTAM ADVECÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR.

A SOMA DA ADVECÇÃO COM A DIFUSÃO RESULTA NA CONVECÇÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR.

É IMPORTANTE QUE SE SAIBA QUE NUM PROBLEMA CUJA GEOMETRIA SEJA SIMÉTRICA COM RELAÇÃO A UM EIXO, O ESCOAMENTO NÃO APRESENTARÁ NECESSARIAMENTE SIMETRIA.

ALÉM DISSO, SABE-SE QUE PARA DETERMINADOS ESCOAMENTOS EXISTEM MAIS DE UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES. UMA DELAS SERÁ A MAIS ENCONTRADA NA NATUREZA POR SER A SOLUÇÃO MAIS ESTÁVEL.

RTIGO
TERS:

$Re_h = 90 \rightarrow$
ÇÃO ESTÁVEL
SIMÉTRICA.

$Re_h = 90 \rightarrow$
ÇÃO ESTÁVEL
SSIMÉTRICA

9. EQUAÇÃO DA ENERGIA

SE SEGUIRMOS O MESMO PROCEDIMENTO EMPREGADO NA DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES OBTEREMOS PARA A EQUAÇÃO DA ENERGIA A SEGUINTE EQUAÇÃO DIFERENCIAL:

$$\overbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho c_p u T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho c_p v T)}^{A} = \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)}^{B} + \overbrace{\dot{q}}^{C}$$

$$+ \underbrace{2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}_{D}$$

$$+ \underbrace{\beta T\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right)}_{E} \qquad (64)$$

ONDE

c_p = CALOR ESPECÍFICO À PRESSÃO CONSTANTE

ρ = MASSA ESPECÍFICA

u, v = COMPONENTES CARTESIANAS DO VETOR VELOCIDADE

T = TEMPERATURA

k = CONDUTIVIDADE TÉRMICA

$\dot{q}$ = GERAÇÃO INTERNA DE CALOR

μ = VISCOSIDADE ABSOLUTA

β = COEFICIENTE DE EXPANSÃO TÉRMICA

p = PRESSÃO

OS GRUPOS DE TERMOS DA EQ. (64) REPRESENTAM:

A = ADVECÇÃO DE CALOR

B = DIFUSÃO OU CONDUÇÃO DE CALOR

C = GERAÇÃO INTERNA DE CALOR

D = DISSIPAÇÃO VISCOSA DE CALOR

E = TRABALHO REVERSÍVEL

NO CASO DE FLUIDO INCOMPRESSÍVEL COM PROPRIEDADES CONSTANTES, SEM GERAÇÃO DE CALOR E CUJA DISSIPAÇÃO VISCOSA SEJA DESPREZÍVEL, A EQ. (64) SE REDUZ A

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \qquad (65)$$

ONDE

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad \text{(DIFUSIVIDADE TÉRMICA)} \qquad (66)$$

SE NÃO HOUVER ESCOAMENTO $(u = v = 0)$ TEM-SE A EQUAÇÃO DE LAPLACE OU EQUAÇÃO DO CALOR:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad \text{OU} \quad \nabla^2 T = 0 \qquad (67)$$