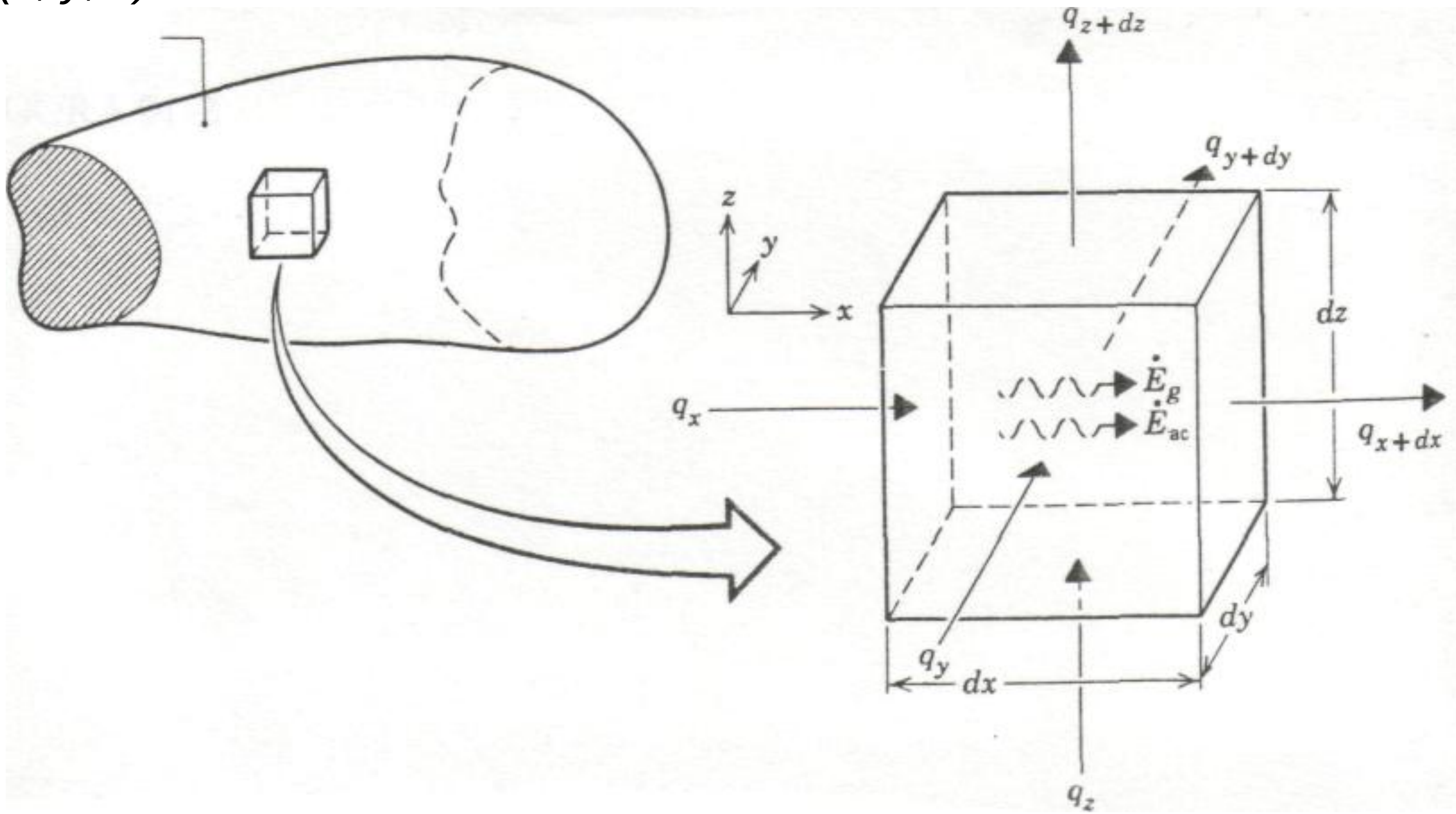
Equação da Difusão do Calor

(Equação da distribuição de temperatura)

- O conhecimento da distribuição de temperatura pode ser usado para o julgamento da integridade estrutural num sólido, através da determinação de tensões, expansões e deflexões térmicas. Também pode ser usada para se otimizar a espessura de um material isolante ou para determinar a compatibilidade entre um revestimento e o material. Através da distribuição de temperatura num meio é possível determinarmos o fluxo de calor.

T (x, y, z)



Equação de balanço
(Conservação de energia)

[Fluxo de calor + Fluxo de calor - Fluxo de calor = Fluxo de calor]
entra gerado sai armazenado

Fluxo de calor que entra $\rightarrow q_x + q_y + q_z$

$$q_x = -kdydz\frac{\partial T}{\partial x} \qquad q_y = -kdxdz\frac{\partial T}{\partial y} \qquad q_z = -kdxdy\frac{\partial T}{\partial z}$$

Fluxo de calor que sai → $q_x + dx + q_y + dy + q_z + dz$

Pela série de Taylor, temos:

$$q_x + d_x = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} d_x;$$

$$q_y + d_y = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} d_y;$$

$$q_z + d_z = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} d_z$$

Sendo:

$$q_x - q_x + dx = \frac{\partial\left(k\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x}\,dxdydz$$ Eq. 2.2

$$q_y - q_y + dy = \frac{\partial\left(k\,\frac{\partial T}{\partial y}\right)}{\partial y}\,dxdydz$$ Eq. 2.3

$$q_z - q_z + dz = \frac{\partial\left(k\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)}{\partial z}\,dxdydz$$ Eq. 2.4

Fluxo de calor gerado $(E_g) \rightarrow q_{ger} = q\, dxdydz$ Eq. 2.5

Dentro de um meio pode haver uma fonte de energia que proporciona um termo associado à taxa de geração de energia térmica. Esta geração é a manifestação de um processo de conversão de energia elétrica, química ou nuclear em energia térmica. O termo é positivo se há uma fonte e negativo de consome energia (sorvedouro). Exemplos: bobinas elétricas, combustão, reatores, etc.

q^o - representa a taxa de geração de energia por unidade de volume (W/m^3)

Fluxo de calor armazenado *(E_{ac})* $\rightarrow$ $q_{arm} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dxdydz$

Eq. 2.6

O fluxo acumulado está associado a variação de energia interna, ou seja a mudança do estado térmico. Caso este termo exista, o corpo estará se resifriando ou se aquecendo.

Substituindo as equações 2.2 a 2.6 em 2.1 e dividindo pelo volume dxdydz, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$ *Eq. 2.7*

Equação da difusão do calor

Eq. 2.7

Os três primeiros termos da equação referem-se a um fluxo ser unidimensional (T varia somente com x), bidimensional (a T varia com x e com y) ou tridimendional (a T varia nas três dimensões x, y e z).

O termo *q* *é* o termo de calor gerado; $\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$

e a ser o tipo de regime (permanente ou transiente).

Considerando k como sendo constante com a temperatura, temos:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\frac{q}{k}=\frac{1}{\mathrm{alfa}}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad \text{Eq.2.8}$$

onde α = coeficiente de difusividade térmica (m²/s), mede a relação entre a capacidade do material em conduzir energia e sua capacidade em acumular energia

$$alfa=\frac{k}{\rho C_p}$$

Estudaremos casos simplificados da equação da distribuição de temperatura:

a) Fluxo de calor unidimensional, sem geração de calor e regime permanente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)=0$$

b) Fluxo de calor unidimensional, com geração de calor e regime permanente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)+q=0$$

c) Fluxo de calor unidimensional, sem geração de calor e regime transiente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial x}\right) = \rho C_p\,\frac{\partial T}{\partial t}$$

d) Fluxo de calor bidimensional, sem geração de calor e regime permanente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0$$

Também podemos usar a equação da difusão de calor em coordenadas cilíndricas ou esféricas.

- Coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial 0/}\left(k\frac{\partial T}{\partial 0/}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)+q=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

- Coordenadas esféricas

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sen^2 0}\frac{\partial}{\partial 0/}\left(k\frac{\partial T}{\partial 0/}\right)+\frac{1}{r^2 sen^2 0}\frac{\partial}{\partial 0}\left(ksen0\frac{\partial T}{\partial 0}\right)+q=\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t}$$

2.2 Equacionamento Diferencial (Condições de Contorno e Condições iniciais)

Condição de contorno é uma afirmação matemática relativa ao comportamento da variável dependente.

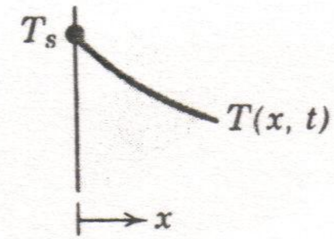
As condições de contorno (c.c.) especificam a condição térmica na superfície das fronteiras da região.

- Condições utilizadas:
- temperatura
- fluxo de calor especificado
- condições de contorno convectivas (balanço)

Tabela 2.1 Condições de contorno da equação de difusão do calor na superfície ($x = 0$)

1. Temperatura da superfície constante

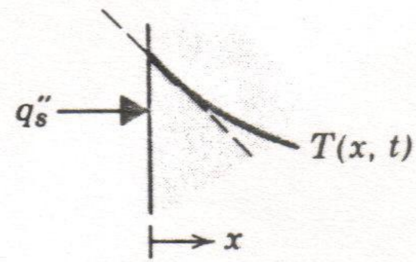
$$T(0, t) = T_s \qquad (2.24)$$



2. Fluxo de calor constante na superfície

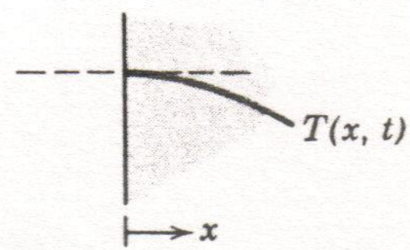
(a) Fluxo de calor diferente de zero

$$-k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = q_s'' \qquad (2.25)$$



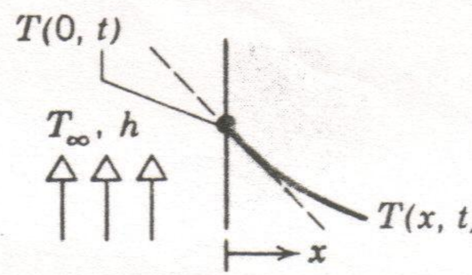
(b) Superfície adiabática ou isolada

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \qquad (2.26)$$



3. Condições convectivas na superfície

$$-k \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h[T_\infty - T(0, t)] \qquad (2.27)$$



-A condição de temperatura constante é chamada de condição de Dirichlet ou condição de contorno de 1° espécie. Exemplo sólido em fusão ou líquido em ebulição.

-A condição de fluxo de calor constante é chamada de condição de Neumann ou condição de contorno de 2° espécie. Exemplo Justapor um calefator elétrico.

-A condição convectiva corresponde ao aquecimento ou resfriamento na superfície (Balanço).