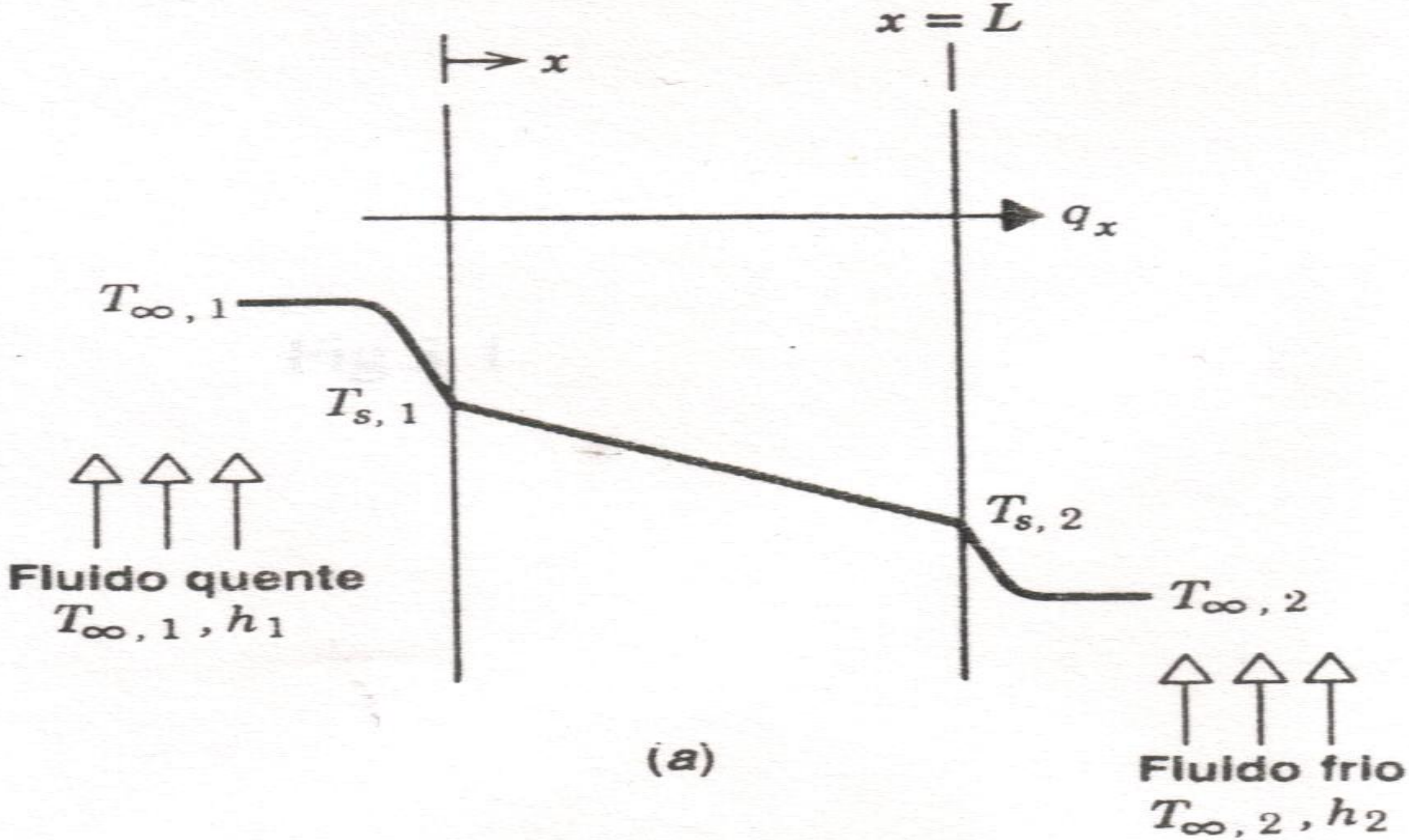
# Condução Unidimensional em Regime Permanente

- Num sistema unidimensional os gradientes de temperatura existem somente ao longo de uma única coordenada, e a transferência de calor ocorre exclusivamente nesta direção.
- Em regime permanente a temperatura é independente do tempo.
- $\Rightarrow$ Objetivo: Expressar a distribuição de temperatura e a taxa de calor.

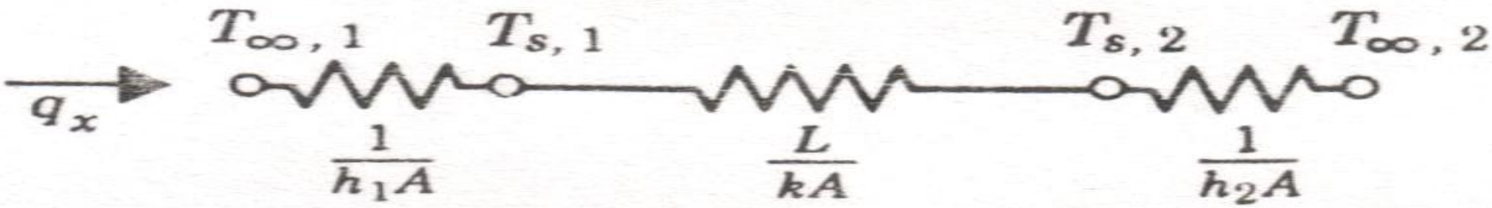
# Parede Plana

- A temperatura é função exclusivamente da coordenada x e o calor se transfere somente nesta direção.
- Considere a figura abaixo - Uma parede que separa dois fluidos de temperaturas diferentes.



$x = L$
$x$
$q_x$
$T_{\infty,1}$
$T_{s,1}$
$T_{s,2}$
$T_{\infty,2}$
Fluido quente
$T_{\infty,1}, h_1$
Fluido frio
$T_{\infty,2}, h_2$


(a)



$q_x$
$T_{\infty,1}$
$T_{s,1}$
$T_{s,2}$
$T_{\infty,2}$
$\frac{1}{h_1 A}$
$\frac{L}{kA}$
$\frac{1}{h_2 A}$


(b)

- Considerando regime permanente, fluxo unidimensional e sem geração de calor, a equação da difusão de calor se resume a:

$$\frac{d}{dx}\left(k\,\frac{dT}{dx}\right)=0$$

; Considerando K constante com temperatura e integrando temos,

$$k\,\frac{dT}{dx}=C_1$$

integrando novamente temos:

$\mathbf{T} = C1 \,.\mathbf{x} + C2$          Eq. 3.1

As condições de contorno são:

p/   $x = 0 \quad \Rightarrow T = Ts1$

p/   $x = L \quad \Rightarrow T = Ts2$

Substituindo as c.c. cc1 $\Rightarrow \quad C_2 = T_{s1}$

cc2 $\Rightarrow \quad C_1 = \dfrac{\left(T_{s2} - T_{s1}\right)}{L}$

Temos: $T = \left(T_{s2} - T_{s1}\right)\dfrac{x}{L} + T_{s1}$

Observamos que a distribuição de temperatura é linear.

O fluxo de calor $\Rightarrow$

$$q_x = -kA\frac{dT}{dx} = -KA\frac{(T_{s2} - T_{s1})}{L}$$

ou

$$q_x'' = \frac{k}{L}(T_{s1} - T_{s2})$$

# Resistência Térmica

- **Lei de Ohm**
- U = R.i - A diferença de potencial (medida) é proporcional a intensidade de corrente pela resistência.

- Podemos resolver problemas de transferência de calor por **analogia** com a Lei de Ohm.

U1 U2 T1 T2

$i \Rightarrow$ Equivalente $q \Rightarrow$

R Rt

**Resistência térmica**

É a oposição que o material oferece a passagem do calor.

Parede Plana

$$q_x = KA\frac{\Delta T}{x} \quad \Rightarrow \quad q_x = \frac{\Delta T}{x / kA}$$

Logo a resistência térmica será $R_t = x/kA$

T1 T2

Circuito q $\Rightarrow$

x/kA

Este conceito é muito utilizado para paredes compostas, ou seja uma associação de materiais diferentes.

# Paredes Compostas

- Definição: São paredes que se constituem pela justaposição de diferentes materiais.
- Aplicações: fornos, estufa, câmaras frigoríficas e isolamentos em geral.

Solução: Analogia

Em geral: Rtot = $\sum$ Rt = $\dfrac{\Delta T}{q} = \dfrac{1}{UA}$

# Resistência térmica de contato ( Rt” - K/Wm2 )

A resistência térmica de contato pode ser atribuída a rugosidade da superfície. Quando fazemos a junção de materiais diferentes ocorre a formação de “ buracos” que contém ar, portanto ocorrerá uma resistência a  passagem do calor. Essa troca será por condução e radiação. Essa resistência pode ser minimizada através do uso de graxas, metais moles, ceras etc, que possuem um alto coeficiente de condutividade térmica.

# Abordagem Alternativa

Considerando regime permanente, podemos fazer uma outra análise usando a conservação de energia:

Equação de Fourier :

$$q = -kA(x)\,\frac{dT}{dx} \qquad ou \qquad q\int \frac{dx}{A(x)} = -\,k(T)\int dT$$

Onde: $\int \frac{dx}{A(x)} \quad \Rightarrow$ **Fator de forma**

**Sistemas Radiais**

**Parede Cilíndrica (tubos)**

Considerando Regime permanente, fluxo unidimensional e sem geração de calor temos:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{d\,r}\left(k\,r\frac{d\,T}{d\,r}\right) = 0 \qquad \text{Eq. 3.3.1}$$

Integrando a equação 3.3.1 temos:

$$k\,r\frac{d\,T}{d\,r}=C_1$$

; como k é constante com T, integrando novamente,

$$T = C_1 \ln r + C_2 \qquad \text{eq 3.3.2}$$

Condições de contorno: cc1. $r = r1 \Rightarrow T = T_{S1}$

cc2. $r = r2 \Rightarrow T = T_{S2}$

Substituindo:

$$T = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\ln\left(r_2 / r_1\right)} \ln \frac{r}{r_2} + T_{s2}$$

**Fluxo de calor**

**Utilizando Fourier:**

$$q_r = -kA \frac{dT}{dr}$$

$$q_r = -k2\pi rL \frac{dT}{dr}$$ Integrando

$$q_r \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -2k\pi L \int_{T_{S1}}^{T_{S2}} dT$$

$$q_r = 2k\pi L \frac{(T_{s1} - T_{s2})}{\ln(r_2 / r_1)}$$ Logo:

$$q_r = \frac{(T_{s1} - T_{s2})}{\dfrac{\ln(r_2 / r_1)}{2k\pi L}} = \frac{\Delta T}{R_t}$$

A resistência térmica oferecida por um cilindro é:

$$R_t = \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2k\pi L}$$

No sistema abaixo, temos:

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{1/2\pi r_1 L h_1 + \frac{\ln(r_2 / r_1)}{2k_a \pi L} + \frac{\ln(r_3 / r_2)}{2k_b \pi L} + \frac{\ln(r_4 / r_3)}{2k_c \pi L} + 1/2\pi r_4 L h_4}$$

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{tot}} = U_1 A_1 (T_{\infty,1} - T_{\infty,4})$$

onde A1 = 2π r1L

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1}{k_a}\frac{\ln(r_2/r_1)}{} + \frac{r_1}{k_b}\frac{\ln(r_3/r_2)}{} + \frac{r_1}{k_c}\frac{\ln(r_4/r_3)}{} + \frac{r_1}{r_4}\frac{1}{h_4}}$$

Sendo:

$U_1A_1 = U_2A_2 = U_3A_3 = U_4A_4 = (\Sigma R_t)^{-1}$

**Parede Esférica**

Para uma parede esférica, utilizando Fourier, deduza o fluxo de calor e a resistência térmica.

$$q_r = -kA\frac{dT}{dr} \Rightarrow \quad q_r = -k4\pi\, r^2 \frac{dT}{dr}$$

Utilizando as seguintes condições de contorno:

cc1. $r = r_1 \quad \Rightarrow T = T_1$

cc2. $r = r_2 \quad \Rightarrow T = T_2$

$$q_r = \frac{4k\pi(T2 - T1)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \quad ; \qquad q_r = \frac{4k\pi(T2 - T1)}{\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

# Espessura Crítica de Isolamento

- **Sistemas Radiais**

**Considere um tubo recoberto com isolante que dissipa calor para o ambiente.**

$r_L$

h , T∞ ↑↑ k isol.

r

Circuito:

T1 T $T\infty$

$$\frac{\ln(r/r_1)}{2k_{isol}\pi L} \qquad \frac{1}{2\pi r L h_1}$$

Considerando r = r2

Se $\uparrow$ r2 $\uparrow$ Rcond $\downarrow$R conv $\Rightarrow$ Logo a adição de material isolante pode diminuir ou aumentar o fluxo de calor, dependendo da Rt= Rcond + Rconv com r2.

$$\frac{dR}{dr} = \frac{d}{dr}\left( \frac{\ln\left( r \middle/ r_1 \right)}{2k_{isol}\pi L} + \frac{1}{2h\pi rL} \right) = 0$$

$$\frac{dR}{dr} = \left( \frac{1}{r2k_{isol}\pi L} + 0 - \frac{1}{2h\pi r^2 L} \right) = 0$$

$$r_c = \frac{k_{isol}}{h} \Rightarrow$$ **Raio Crítico de um tubo**

$$\frac{d^2 R}{dr^2} \rangle \ 0$$ $\Rightarrow$ Logo é uma condição de

mínimo.

R mínima $\Rightarrow$ q máximo

q $\uparrow$ **rc**

**A** **B**

$\rightarrow$

**r**

**Região A** $\Rightarrow$ $\uparrow$ **r2 (isolante)** $\Rightarrow$ $\Uparrow$ **q**

**Região B** $\Rightarrow$ $\uparrow$ **r2 (isolante)** $\Rightarrow$ $\Downarrow$ **q**

Uso do raio crítico:

Isolamento de um cabo elétrico, onde se deseja dissipar mais calor para o ambiente, refrigeração quando o fluxo de calor deve ser conservado num mínimo.

Isolamentos em geral desejamos diminuir a perda de calor e devemos utilizar uma espessura acima do raio crítico.

Em geral: para situações envolvendo convecção forçada, o raio crítico é muito pequeno. Logo só devemos levar em conta o raio crítico quando o processo for de convecção natural, onde o h $<$ 10 W/m2 K em tubos de pequeno diâmetro.