



# SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON 3D COM MÚLTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON

D. F. MORO<sup>1</sup>, C. H. MARCHI<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidade Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

<sup>2</sup> Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Mecânica  
Email para contato: difmoro@gmail.com, chmcfid@gmail.com

RESUMO – Múltiplas extrapolações de Richardson (MER) são aplicadas à equação de Poisson 3D para reduzir o erro de discretização da solução numérica. É aplicado o método das diferenças finitas, domínio de cálculo cúbico, malhas uniformes, esquema de segunda ordem de acurácia, com três variáveis de interesse, condições de contorno de Dirichlet, malhas até 1025x1025x1025 nós, precisões dupla e quádrupla e até 9 níveis de extrapolação de Richardson. Esta é a primeira aplicação de MER para um problema 3D. Verificou-se que: (1) MER reduz significativamente o erro de discretização, chegando a ordens de acurácia de até 16, (2) uma maior redução do erro é obtida utilizando precisão quádrupla e número maior de níveis de extrapolação e (3) MER possui o mesmo desempenho qualitativo em 3D do que o obtido em 2D.

## 1. INTRODUÇÃO

Em Transferência de Calor Computacional (TCC), a extrapolação de Richardson (ER) (Richardson, 1910) já foi aplicada a problemas tridimensionais (3D), como a equação de Advecção-Difusão (Ma e Ge, 2010), para reduzir o erro de discretização. Para uma dada variável de interesse, ER é aplicado baseado em pelo menos duas soluções numéricas obtidas em duas malhas com números de nós diferentes.

A aplicação múltipla de ER resulta nas Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER), isto aumenta ainda mais a eficiência de ER na redução do erro de discretização. MER já foi aplicado a equações de condução de calor unidimensionais (1D) e bidimensionais (2D), como a equação de Advecção-Difusão 1D e a equação de Laplace 2D (Marchi et al., 2013). No entanto, na nossa revisão bibliográfica, não foi encontrado nenhuma aplicação de MER para problemas 3D de TCC.

Portanto, nosso objetivo principal com o presente trabalho é aplicar a teoria de MER (Marchi et al., 2013) na solução de um problema 3D (equação de Poisson) e o objetivo secundário é investigar se o desempenho de MER, já conhecido em problemas 2D, é mantido em problemas 3D.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático considerado neste trabalho é a equação de Poisson 3D, a qual é definida pela Eq. (1):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = f \quad (1)$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as direções coordenadas,  $0 < x, y, z < 1$ ,  $T$  representa a temperatura, e o termo fonte é dado por  $f(x, y, z) = -3\pi^2 \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) \text{sen}(\pi z)$ .

Fisicamente, esta equação pode modelar o problema da condução de calor com geração de calor em um sólido com propriedades constantes em regime permanente, tanto como vários outros problemas físicos. A solução analítica da Eq. (1) é  $T(x, y, z) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) \text{sen}(\pi z)$ . As condições de contorno são do tipo Dirichlet, com o valor em cada um dos seis contornos dado pela solução analítica.

As variáveis de interesse neste trabalho, ou seja, as variáveis em que MER é aplicado são: (a) temperatura no centro do domínio, localizado em  $x = y = z = \frac{1}{2}$ , denominada por  $T_c$ ; (b) a temperatura média do domínio, denominada por  $T_m$ ; e (c) a taxa de transferência de calor no contorno  $x = 1$ , denominado por  $Q_e$ . As variáveis  $T_m$  e  $Q_e$  são definidas matematicamente pelas Eqs. (2) e (3):

$$T_m = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 T(x, y, z) dx dy dz \quad (2)$$

$$Q_e = -k \int_0^1 \int_0^1 \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} dy dz \quad (3)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica do material, definido neste trabalho pela unidade.

### 3. MODELO NUMÉRICO

A Eq. (1) é então discretizada usando o método das diferenças finitas (Tannehill et al., 1997), malha uniforme e esquema CDS (*Central Differencing Scheme*) de segunda ordem de acurácia. Desta forma um sistema de equações algébricas é obtido, o qual é resolvido usando o HeptaDiagonal Matrix Algorithm (HDMA), um método próprio que foi desenvolvido para este trabalho e que se baseia no TriDiagonal Matrix Algorithm (TDMA) (Patankar, 1980). A versão do HDMA para problemas bidimensionais com cinco diagonais não nulas, chamado PentaDiagonal Matrix Algorithm (PDMA) (Moro et al., 2015).

O valor nulo foi utilizado como estimativa inicial para a solução em cada malha. O processo iterativo foi executado até que a norma l1 do resíduo do sistema de equações algébricas chegasse no erro de máquina. Os programas foram implementados em linguagem Fortran 2008, versão Intel 14.1, um utilizando precisão dupla (Real\*8) e outro utilizando precisão quádrupla (Real\*16).

A forma de obtenção das variáveis de interesse foram:  $T_c$ : foi obtida diretamente do nó central de cada malha;  $T_m$ : foi obtida pela integração numérica com a regra do trapézio.  $Q_e$ : foi obtida pela integração numérica com a regra do trapézio precedida pelo uso do esquema UDS (*Upwind Differencing Scheme*) (Tannehill et al., 1997) de segunda ordem de acurácia na derivada no contorno.

Para cada variável de interesse, a solução numérica ( $\phi$ ) na malha  $g$  com  $m$  extrapolações de Richardson é dada pela Eq. (4) (Marchi et al., 2013).

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1} \quad (4)$$

onde  $r = h_{g-1}/h_g$  é a razão de refino (usado o valor 2 neste trabalho, por ser o mínimo valor inteiro disponível), e a variável  $p_m$  representa a ordem verdadeira do erro de discretização, como explicado por Marchi et al. (2013). A Eq. (4) é válida para  $g = [2,G]$  e  $m = [1,g-1]$ .

## 4. RESULTADOS

Com precisão dupla (Real\*8), foram obtidas soluções numéricas para as variáveis de interesse em malhas com  $3^3$ ,  $5^3$ ,  $9^3$ ,  $17^3$ ,  $33^3$ ,  $65^3$ ,  $129^3$ ,  $257^3$ ,  $513^3$  e  $1025^3$  nós; então  $G = 10$  malhas, e para precisão quádrupla (Real\*16), a malha mais fina foi  $513^3$  nós; então  $G = 9$  malhas. O tempo de CPU e memória RAM necessários para rodar a última simulação até o erro de máquina foram: 5,1 dias e 140 GB na precisão dupla e 30,1 dias e 35 GB na precisão quádrupla. A Fig. 1 resume os resultados obtidos para a variável  $T_c$  (resultados qualitativamente equivalentes foram obtidos para as variáveis  $T_m$  e  $Q_e$ ), notando que  $h = \frac{L_x}{N_x-1} = \frac{L_y}{N_y-1} = \frac{L_z}{N_z-1}$ :

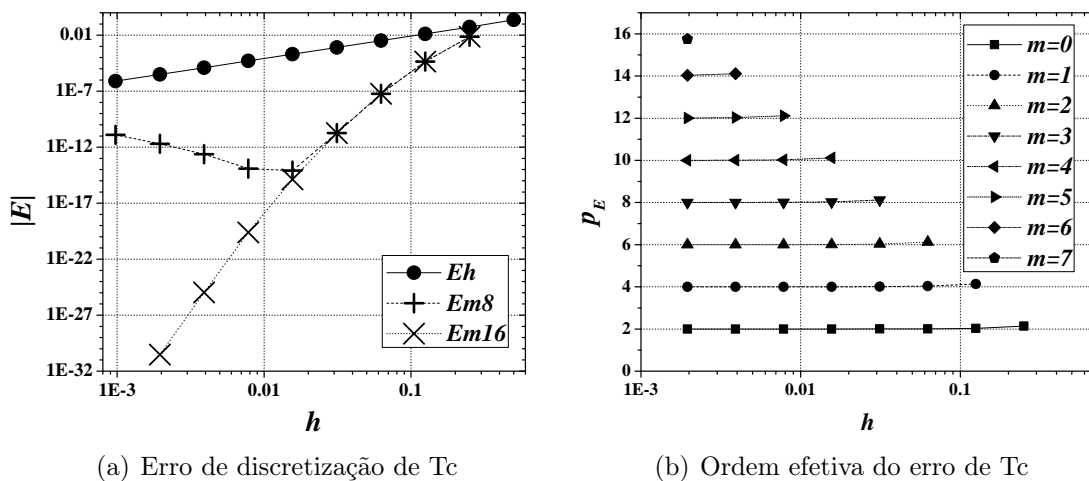


Figura 1 – Análises de erros e ordens da variável  $T_c$

Na Fig. 1(a) está representado o erro de discretização (erro entre a aproximação numérica e a solução analítica) de acordo com o tamanho de malha ( $h$ ),  $E_h$  é o erro sem qualquer extrapolação,  $E_{m8}$  e  $E_{m16}$  são os resultados extrapolados com precisões dupla e quádrupla respectivamente (Real\*8 e Real\*16) para  $g = [2,G]$  e  $m = g-1$ , com  $G = 10$  e 9 malhas respectivamente. É possível analisar que a partir da malha de  $65^3$  o erro de discretização com MER para precisão dupla ( $E_{m8}$ ) começa a aumentar o erro de discretização enquanto que  $E_{m16}$  continua reduzindo o erro de discretização.

Na Fig. 1(b) está representado a ordem efetiva ( $p_E$ ) do erro versus o tamanho de malha ( $h$ ) e o número de níveis de extrapolação ( $m$ ) em precisão quádrupla. É possível



analisar que ao aumentar o número de níveis de extrapolação a ordem de acurácia da solução com MER aumenta até chegar em 16 na malha  $513^3$ .

## 5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, a teoria de (Marchi et al., 2013) Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER) foi aplicada para reduzir o erro de discretização da solução numérica na equação de Poisson 3D. O trabalho foi feito considerando: método das diferenças finitas, domínio de cálculo cúbico, malhas uniformes, aproximações de segunda ordem de acurácia, três variáveis de interesse, condições de contorno de Dirichlet, malhas até  $1025^3$  nós, precisões dupla e quádrupla, número suficiente de iterações para chegar-se no erro de máquina e até nove níveis de extrapolação de Richardson. Com a realização deste trabalho, foi verificado que na equação de Poisson 3D: (1) MER é extremamente eficiente para reduzir o erro de discretização das variáveis primárias e secundárias analisadas, não importando o número de aproximações utilizado. Foi obtido a partir de aproximações cuja acurácia é de segunda ordem, uma ordem de acurácia extrapolada de 16. (2) A maior redução do erro com MER é obtida usando-se maior precisão nos cálculos, maior número de extrapolações (m) e número maior de malhas. (3) Quando o erro de máquina é maior que o erro de discretização, MER perde o efeito de redução do erro numérico. (4) MER tem o mesmo desempenho qualitativo em 3D do que o obtido em problemas 2D.

## 6. REFERÊNCIAS

- MA, Y.; GE, Y. A high order finite difference method with Richardson extrapolation for 3D convection diffusion equation. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 215, pp. 3408–3417, 2010.
- MARCHI, C.; NOVAK, L.; SANTIAGO, C.; VARGAS, A. Highly accurate numerical solutions with Repeated Richardson Extrapolation for 2D Laplace equation. *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, pp. 7386–7397, 2013.
- MORO, D.; MARCHI, C.; PINTO, M. Um método iterativo eficiente para resolver sistemas de equações pentadiagonais. Em *III Congresso de Matemática Aplicada e Computacional – CMAC Sudeste*, Vitória. SBMAC, 2015.
- PATANKAR, S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Taylor and Francis, Washington, 1980.
- RICHARDSON, L. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. Em *Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A*, volume Vol. 210, p. pp. 307–357, 1910.
- TANNEHILL, J.; ANDERSON, D.; PLETCHER, R. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor and Francis, Washington, 2<sup>a</sup> edição, 1997.