



Solução da equação de Poisson 3D com múltiplas extrapolações de Richardson

Diego Fernando Moro

Orientador: Carlos Henrique Marchi

Curitiba, 11 a 13 de Junho de 2016

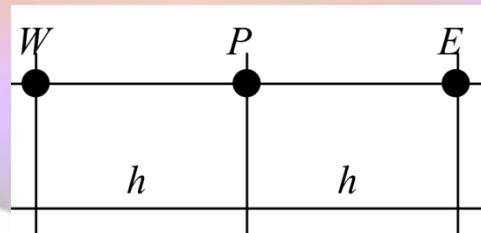


Introdução

- Problemas na Engenharia:
 - Métodos experimentais
 - Métodos analíticos
 - **Métodos numéricos**
- Aproximações numéricas, por exemplo segunda derivada (CDS-2)

$$\Lambda_P^{ii} = \frac{\lambda_E + \lambda_W - 2\lambda_P}{h^2} - \frac{\Lambda_P^{iv}}{12} h^2 - \frac{\Lambda_P^{vi}}{360} h^4 + \dots$$

- Erros numéricos

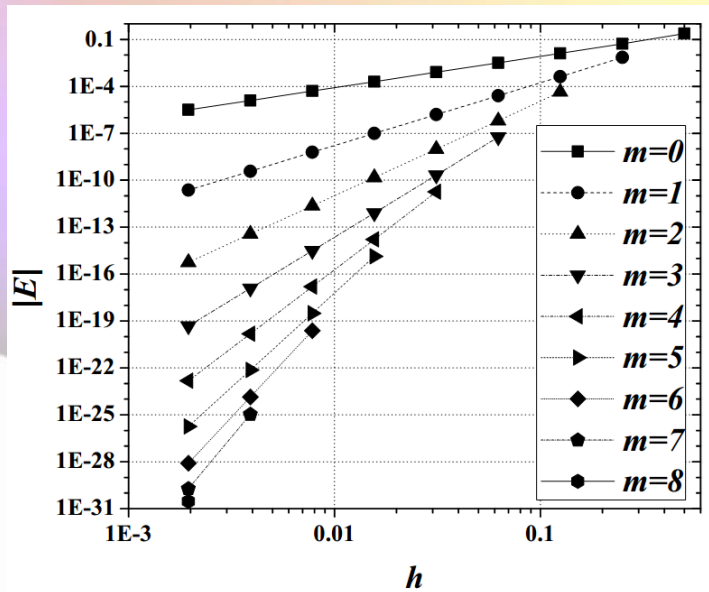


Extrapolação de Richardson (ER)

- Para h suficientemente pequeno:

$$E_h \approx K h^{p_L}, \quad \phi_\infty - \phi_1 = K h_1^{p_L}$$

- Aplicando a equação acima a duas malhas consecutivas 1 e 2, onde 1 é a uma malha fina

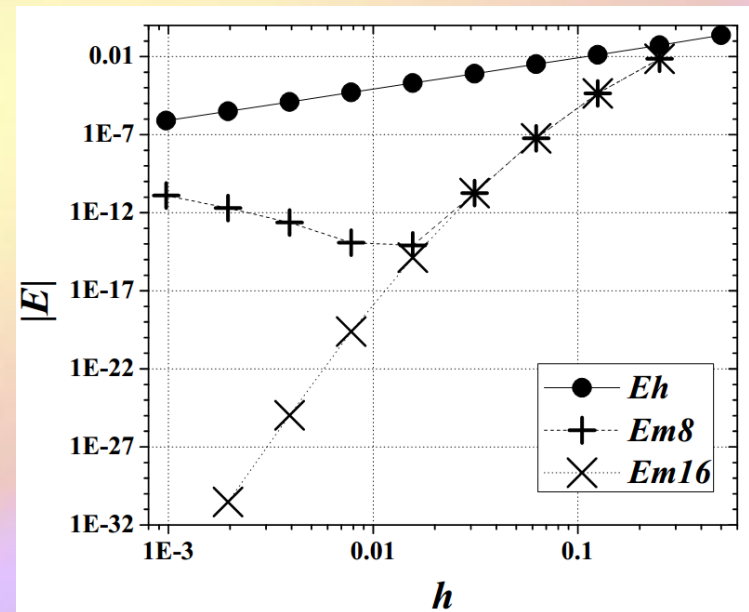


(h), 2 é uma malha grossa ($r h$), r é a taxa de refino e p_L é a ordem assintótica. Encontramos a Eq.:

$$\phi_\infty = \phi_1 + \frac{\phi_1 - \phi_2}{r^{p_L} - 1}$$

Múltiplas extrapolações de Richardson (MER)

- Eliminação das parcelas consecutivas das ordens de erro
- Solução encontrada possui ordem de acurácia equivalente a utilizar métodos de alta ordem (dependendo do número de níveis de extrapolação utilizado)



Revisão bibliográfica / Objetivos

- Na literatura há muitos trabalhos onde a ER já foi aplicada (Ma e Ge, 2010), no entanto MER foi aplicada basicamente a dois tipos de problemas Advecção Difusão 1D e Laplace 2D (Marchi et al., 2013)
- Este trabalho tem por objetivo: aplicar a teoria de MER para um problema 3D e investigar seu desempenho

Modelo Matemático

- Equação de Poisson 3D:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = f$$

onde: $f(x,y,z) = -3\pi^2 \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) \text{sen}(\pi z)$

- Solução analítica:

$$T(x,y,z) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) \text{sen}(\pi z)$$

- Três variáveis analisadas: T_c , T_m e Q_e

Modelo Numérico

- Discretização da equação diferencial usando método das diferenças finitas e esquema CDS
- Resolver o sistema de equações heptadiagonal gerado pelo método HDMA baseado no PDMA (Moro et al., 2015)
- Processo iterativo executado até que a média da norma L1 do resíduo do sistema de equações chegasse no erro de máquina da precisão utilizada

Resultados

- Malhas simuladas: 3^3 , 5^3 , 9^3 , 17^3 , 33^3 , 65^3 , 129^3 , 257^3 , 513^3 nós em precisão quádrupla e mais a malha 1025^3 em precisão dupla
- Os tamanhos de cada elemento da malha foram calculados por:

$$h_x = h_y = h_z = \frac{L_x}{N_x - 1} = \frac{L_y}{N_y - 1} = \frac{L_z}{N_z - 1}$$

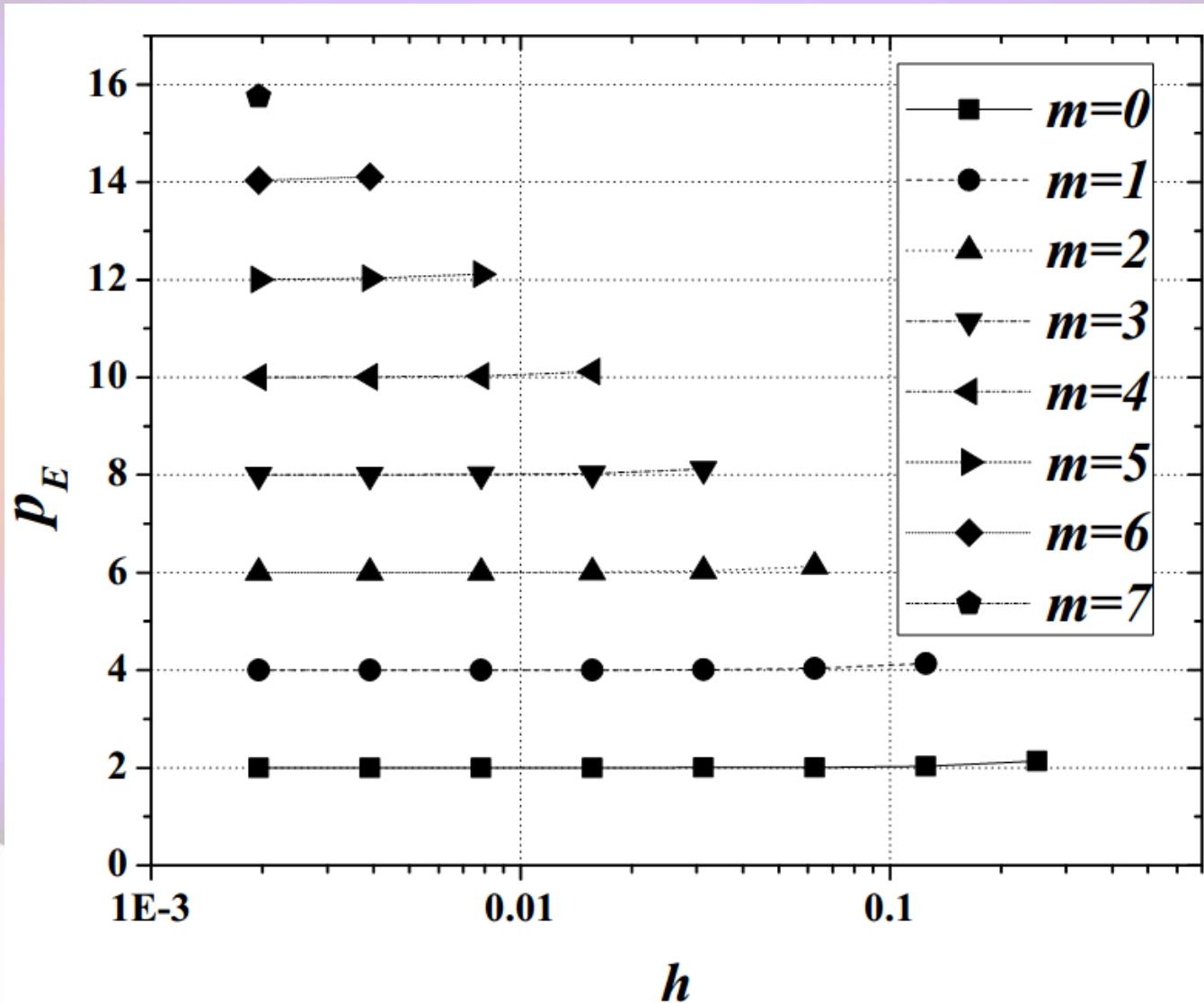
Resultados – Relatório Simulações

Precisão dupla

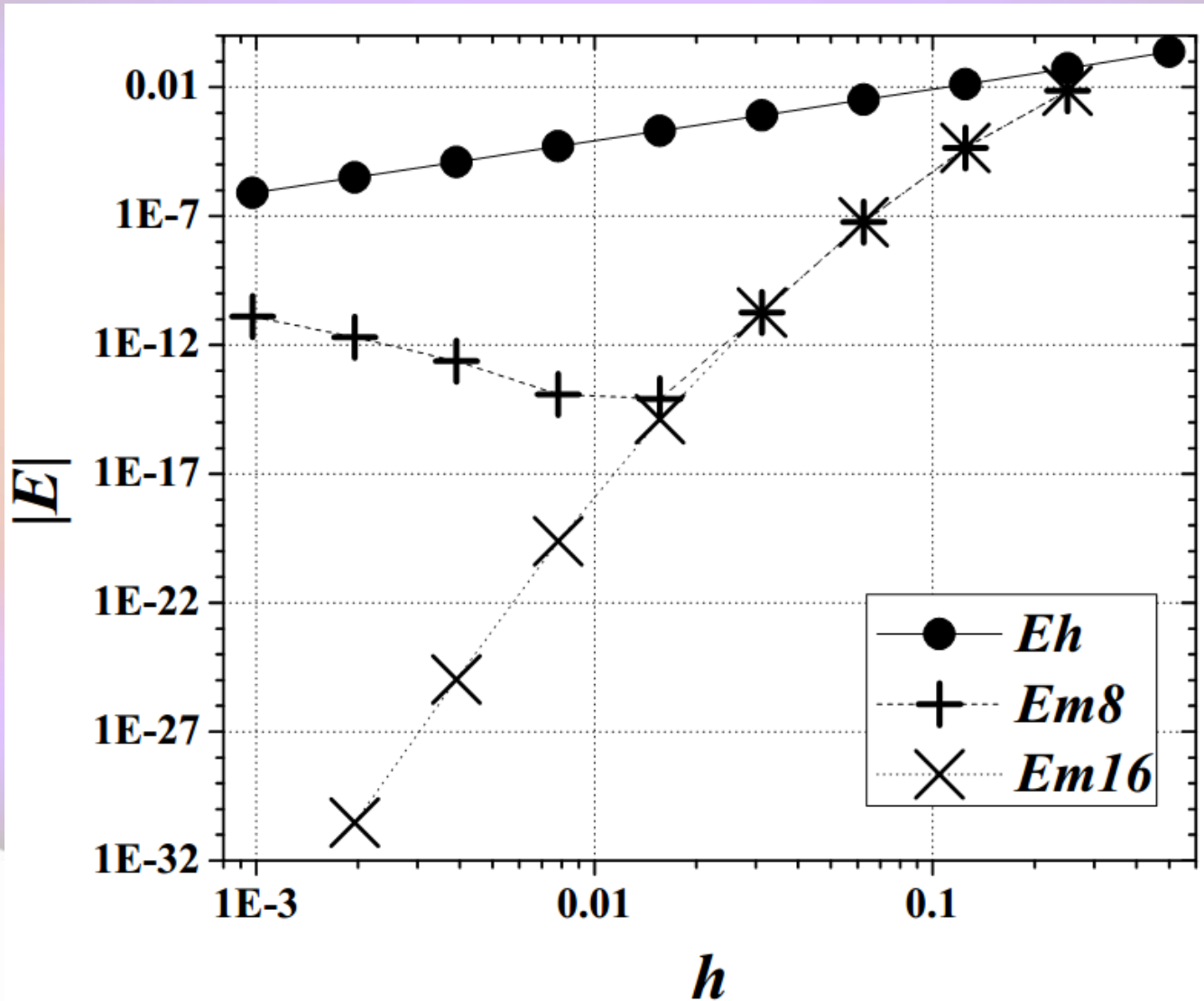
Precisão quádrupla

Nx=Ny=Nz	Ntotal	itmax	itEpi	tCPU	RAM (Mb)	itmax	itEpi	RAM (Mb)	tCPU (s)
3	27	1	1	0,000 s	3,24	1	1	3,328	0,000 s
5	125	80	40	0,001 s	3,272	160	90	3,352	0,004 s
9	729	150	80	0,002 s	3,344	360	210	3,504	0,084 s
17	4913	250	175	0,013 s	3,876	800	520	4,596	1,758 s
33	35937	500	300	0,202 s	7,84	1600	1120	12,548	30,273 s
65	274625	1000	650	3,978 s	39,456	3200	2400	76,036	8,435 min
129	2146689	2000	1400	1,13 min	288,568	6400	4480	574,272	2,278 h
257	16974593	4000	2480	19,20 min	2123,832	12800	8560	4523,608	1,710 dias
513	135005697	8000	5600	8,83 h	17971,424	25600	15000	35937,032	30,143 dias
1025	1076890625	16000	9000	5,08 dias	143310,568				

Resultados – Ordens de acurácia



Resultados – Redução do E_h



Conclusão

- A partir de aproximações numéricas de segunda ordem de acurácia foi possível obter até uma ordem de acurácia extrapolada de 16
- Quando o erro de máquina é maior que o erro de discretização, MER não deve ser mais utilizado

Conclusão

- A maior redução do E_h com MER é obtida utilizando-se maior precisão nos cálculos
- O principal objetivo deste trabalho foi alcançado: MER tem desempenho (reduzir E_h) semelhante ao 2D para as variáveis analisadas (T_c pontual, T_m global e Q_e global)



Obrigado !

- Diego Fernando Moro
 - Email: difmoro@ufpr.br; difmoro@gmail.com

- Orientador: Carlos Henrique Marchi
 - Email: chmcf@gmail.com; marchi@ufpr.br

