

# Validação da solução numérica do escoamento de ar a 17,25 bar e 833 K em tubeira com razão de expansão 6,6

**Diego F. Moro**

PG-Mec, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR

E-mail: [difmoro@ufpr.br](mailto:difmoro@ufpr.br)

**Carlos H. Marchi, Luciano K. Araki**

Depto. Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná (UFPR), Curitiba, PR

E-mails: [marchi@ufpr.br](mailto:marchi@ufpr.br); [lucaraki@ufpr.br](mailto:lucaraki@ufpr.br)

**Guilherme Bertoldo, Jonas J. Radtke**

Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)

85601-970, Francisco Beltrão, PR

E-mails: [gbertoldo@utfpr.edu.br](mailto:gbertoldo@utfpr.edu.br); [jonas@utfpr.edu.br](mailto:jonas@utfpr.edu.br)

**Eduardo M. Germer**

Depto. Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Curitiba, PR

E-mail: [eduardomg@utfpr.edu.br](mailto:eduardomg@utfpr.edu.br)

**Resumo:** Neste trabalho, simulações numéricas foram obtidas com o código computacional Mach2D 7.0, cujas principais características são: permite simulação de escoamentos em qualquer regime de velocidade, emprega sistema de coordenadas não-ortogonais de base cartesiana ou axissimétrica, permite simulação de escoamentos invíscido, laminar e turbulento. Ele foi utilizado para a simulação do escoamento invíscido no interior da tubeira axissimétrica de um motor-foguete. As soluções numéricas das variáveis de interesse (coeficiente de descarga, empuxo total adimensionalizado e 20 pontos de pressão) foram comparadas com resultados experimentais da literatura. A tubeira tem diâmetro na garganta de 40,64 mm, razões de compressão e expansão de áreas de 9,76 e 6,63 respectivamente, e opera à temperatura e pressão de estagnação de 833 K e 17,25 bar. Na malha mais fina, foram obtidas diferenças de no máximo 0,5% entre as soluções numéricas e os resultados experimentais para o coeficiente de descarga e o empuxo total; e para os 20 pontos de pressão, o erro médio obtido foi de 2,4%.

**Palavras-chave:** tubeira, motor-foguete, propulsão, onda de choque oblíqua, validação.

## 1 Introdução

A simulação de escoamentos é muito importante para projetos de motores-foguete, aerodinâmica, entre outros. Seus resultados são utilizados, por exemplo, para a seleção de materiais que possam resistir às condições de trabalho do foguete. Estes escoamentos são modelados matematicamente por equações diferenciais, no entanto muitas simplificações são feitas. Por exemplo, em escoamento invíscido, desconsideramos a viscosidade do fluido; em escoamento laminar, consideramos o escoamento bem ordenado; e por fim em escoamento turbulento temos uma maior complexidade a ser modelada.

Em poucos casos, estas equações diferenciais podem ser resolvidas analiticamente, mas de modo geral são utilizados métodos numéricos para a sua resolução. Um dos métodos numéricos é o método dos volumes finitos, onde o domínio do problema é dividido em volumes de controle sobre os quais as equações diferenciais são integradas e resolvidas.

Mas o que garante a acurácia dos resultados numéricos, se não existem soluções analíticas para serem comparadas? Nestes casos utilizamos resultados experimentais para a comparação com os resultados numéricos; este processo é chamado de validação.

Neste trabalho, resultados experimentais foram comparados com soluções numéricas. Os resultados experimentais foram extraídos do artigo de Back et al. [1], de uma equipe do JPL (Jet Propulsion Laboratory) da NASA (National Aeronautics and Space Administration). São eles: 20 pontos de pressão ao longo da parede da tubeira, coeficiente de descarga (fluxo de massa real / fluxo de massa da solução analítica 1D) e empuxo total adimensionalizado (empuxo total real / empuxo total da solução analítica 1D).

## 2 Metodologia

Para a tubeira (Figura 1) simulada, o artigo de Back et al. [1] apresenta na forma gráfica os resultados experimentais da pressão ( $p$ ) em 20 pontos ao longo da tubeira, do coeficiente de descarga ( $C_d$ ) e do empuxo total adimensionalizado ( $F^*$ ). A leitura destes gráficos teve que ser feita utilizando um leitor de pdf com suporte a medições. Isso adiciona erros aos resultados experimentais. Para uma validação mais adequada, os resultados experimentais deveriam ser tabelados e acompanhados de suas respectivas incertezas.

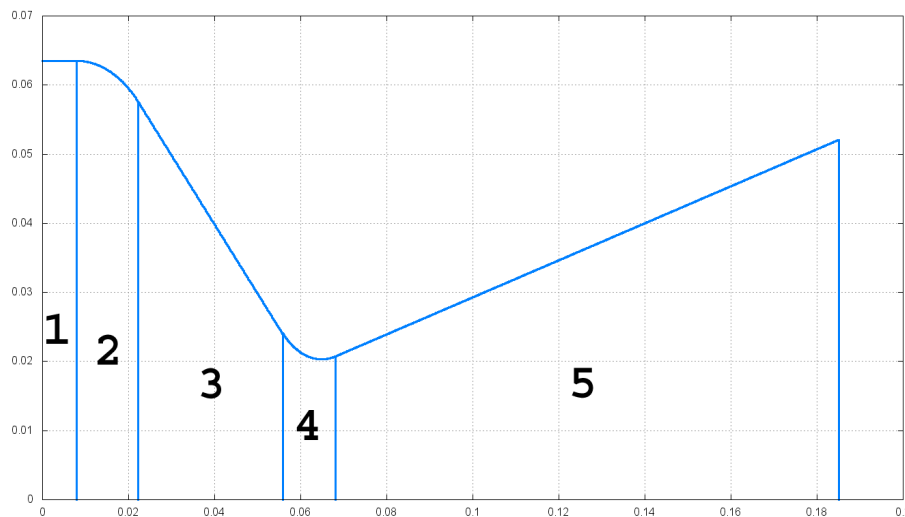


Figura 1: Esquema da tubeira real

A tubeira da Figura 1 foi dividida em cinco seções, da esquerda para a direita:

1. Câmara de combustão: seção com raio de 63,5 mm e comprimento de 7,874 mm.
2. Transição de seção com arredondamento de raio 20,32 mm e comprimento 14,376 mm.
3. Tronco de cone convergente de comprimento 33,630 mm e ângulo com a horizontal de 45°.
4. Transição de seção até a garganta com arredondamento de raio 12,7 mm e comprimento 12,268 mm.
5. Tronco de cone divergente de comprimento 11,891 mm e ângulo com a horizontal de 15°.

As soluções numéricas foram obtidas com o código Mach2D 7.0 [3]. Ele permite a simulação de escoamentos invíscido, laminar e turbulento (modelo Baldwin-Lomax) de fluido compressível, contínuo, não-reativo, termicamente perfeito (de entalpia e energia interna dependentes apenas da temperatura), com propriedades variáveis, com dissipação viscosa, e escoamento bidimensional plano ou axissimétrico em qualquer regime de velocidade.

O Mach2D é um código que utiliza o método dos volumes finitos para a resolução das equações diferenciais de conservação da massa, quantidade de movimento linear axial e transversal, e ainda a conservação da energia térmica, além da equação de estado dos gases perfeitos. Foi programado em linguagem Fortran 90. Os esquemas de aproximação das derivadas são de primeira ou segunda ordens de acurácia, denominados UDS (Upstream Differencing Scheme) e CDS (Central Differencing Scheme) respectivamente.

Neste trabalho, o Mach2D foi utilizado para simular o escoamento de ar na tubeira do motor-foguete, considerando o escoamento invíscido e axissimétrico, com pressão de estagnação de 1725,07

kPa (250,2 psia), temperatura de estagnação de 833,33 K (1500°R), razão de calores específicos de 1,4 e constante do gás perfeito de 286,9 J/(kg.K).

A malha base está representada na Figura 2. Nesta malha, o domínio de cálculo da tubeira foi dividido em 24 volumes de controle na direção axial e 10 volumes de controle na direção transversal. Todas as medidas estão em metros.

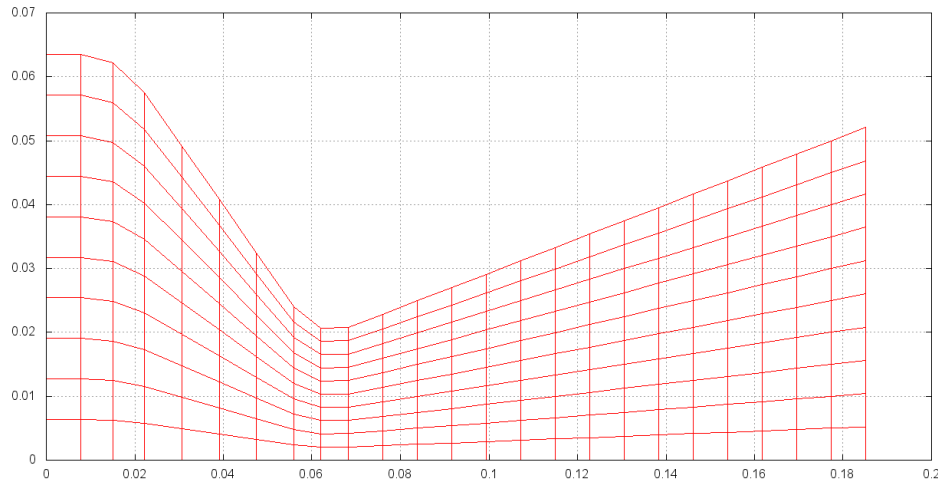


Figura 2: Malha base com 24 x 10 volumes

As especificações dos computadores utilizados nas simulações são apresentadas na Tabela 1. As soluções numéricas de primeira ordem de acurácia foram obtidas com o computador i7 e as soluções de segunda ordem de acurácia foram obtidas com o computador CFD-6.

Descrição	i7	CFD-6
Processador	Intel i7 3770	Intel Core 2 Duo E6700
Frequência do clock	3.4 GHz	2.66 GHz
Frequência do boost	3.9 GHz	
Número de núcleos	4	2
Número de threads	8	
Memória RAM	8 Gb	8 Gb
HD	500 Gb	160 Gb
Placa Mãe	Gigabyte GA-B75M-D3H	Intel DQ965GF
Sistema Operacional	Windows 7 64 bits	Windows XP 64 bits
Ambiente de Programação	Visual Studio 2008	Visual Studio 2005
Versão do compilador Fortran	11.1.3471	11.1.3471.2005

Tabela 1: Especificações dos computadores utilizados

As características gerais das simulações são apresentadas nas Tabelas 2 e 3. Nestas tabelas,  $n_x$  é o número de volumes de controle na direção axial;  $n_y$  é o número de volumes de controle na direção transversal;  $\Delta t$  é o passo de tempo, que serve como parâmetro de relaxação do sistema de equações;  $i_t$  é o número de iterações realizadas até ser atingido o erro de máquina;  $t_{CPU}$  é o tempo de CPU da simulação; e RAM é a quantidade de memória usada pelo código. Só se conseguiu convergência do processo iterativo para oito malhas com UDS e cinco malhas com CDS.

Simulação	Data	$n_x$	$n_y$	$\Delta t$ (s)	$i_t$	$t_{CPU}$	RAM (MB)
BCK.E.F3.001	04/04 18:22	24	10	5.00E-05	300	0.046 s	4.717
BCK.E.F3.002	04/04 18:22	48	20	5.00E-05	350	0.166 s	5.573
BCK.E.F3.003	04/04 18:22	96	40	1.20E-05	775	1.394 s	8.605
BCK.E.F3.004	04/04 18:23	192	80	5.50E-06	1875	14.096 s	20.274
BCK.E.F3.005	04/04 18:24	384	160	2.70E-06	4500	2.9 min	66.319
BCK.E.F3.006	04/04 18:28	768	320	1.30E-06	8650	31.7 min	247.436
BCK.E.F3.007	04/04 19:13	1536	640	6.70E-07	25050	6.4 h	970.968
BCK.E.F3.008	05/04 07:10	3072	1280	3.30E-07	78875	3.6 dias	3795.724

Tabela 2: Características gerais das simulações com UDS (1ª ordem de acurácia)

### 3 Resultados

As comparações entre o coeficiente de descarga numérico e o experimental estão nas Tabelas 4 e 5. Considera-se o erro como a diferença entre o resultado experimental e a solução numérica.

Nas Tabelas 6 e 7 são mostradas comparações entre o coeficiente de descarga numérico e a solução analítica de Kliegel e Levine [2] para o mesmo problema mas considerando-se escoamento potencial.

As comparações entre o empuxo total adimensionalizado ( $F_v^*$ ) numérico e o experimental estão nas Tabelas 8 e 9.

Simulação	Data	nx	ny	$\Delta t$ (s)	it	tCPU	RAM (MB)
BCK.CDS.01	22/04 16:17	24	10	3.00E-05	2325	0.718 s	3.545
BCK.CDS.02	22/04 16:19	48	20	4.90E-06	16125	16.969 s	4.421
BCK.CDS.03	22/04 16:19	96	40	4.90E-06	11475	49.593 s	7.625
BCK.CDS.04	22/04 17:09	192	80	1.80E-06	20925	8 min	19.23
BCK.CDS.05	22/04 17:40	384	160	6.00E-07	61650	1.9 h	64.938

Tabela 3: Características gerais das simulações com CDS (2ª ordem de acurácia)

Simulação	nx	ny	Cd numérico	Cd experimental	Erro	Erro (%)
BCK.E.F3.001	24	10	1.07467496859766E+00		-9.6934446E-02	9.91%
BCK.E.F3.002	48	20	1.04214071229329E+00		-6.4400190E-02	6.59%
BCK.E.F3.003	96	40	1.01408273600131E+00		-3.6342213E-02	3.72%
BCK.E.F3.004	192	80	9.99170727444336E-01	0.9777	-2.1430205E-02	2.19%
BCK.E.F3.005	384	160	9.90503255188312E-01		-1.2762733E-02	1.31%
BCK.E.F3.006	768	320	9.86014527168918E-01		-8.2740046E-03	0.85%
BCK.E.F3.007	1536	640	9.83686484488864E-01		-5.9459619E-03	0.61%
BCK.E.F3.008	3072	1280	9.82519011555088E-01		-4.7784890E-03	0.49%

Tabela 4: Comparação entre as soluções numéricas com UDS e o resultado experimental do Cd

Simulação	nx	ny	Cd numérico	Cd experimental	Erro	Erro (%)
BCK.CDS.01	24	10	9.52129618741408E-01		2.5610904E-02	2.62%
BCK.CDS.02	48	20	9.75952526808685E-01		1.7879958E-03	0.18%
BCK.CDS.03	96	40	9.80059667451581E-01	0.9777	-2.3191449E-03	0.24%
BCK.CDS.04	192	80	9.80707197487315E-01		-2.9666749E-03	0.30%
BCK.CDS.05	384	160	9.81034162657062E-01		-3.2936401E-03	0.34%

Tabela 5: Comparação entre as soluções numéricas com CDS e o resultado experimental do Cd

Simulação	nx	ny	Cd numérico	Cd analítico	Erro	Erro (%)
BCK.E.F3.001	24	10	1.07467496859766E+00	9.81343035872330E-01	-9.3331933E-02	9.51%
BCK.E.F3.002	48	20	1.04214071229329E+00	9.81652219817358E-01	-6.0488492E-02	6.16%
BCK.E.F3.003	96	40	1.01408273600131E+00	9.81652219817358E-01	-3.2430516E-02	3.30%
BCK.E.F3.004	192	80	9.99170727444336E-01	9.81652219817358E-01	-1.7518508E-02	1.78%
BCK.E.F3.005	384	160	9.90503255188312E-01	9.81652736356521E-01	-8.8505188E-03	0.90%
BCK.E.F3.006	768	320	9.86014527168918E-01	9.81653864079020E-01	-4.3606631E-03	0.44%
BCK.E.F3.007	1536	640	9.83686484488864E-01	9.81653864079020E-01	-2.0326204E-03	0.21%
BCK.E.F3.008	3072	1280	9.82519011555088E-01	9.81653864079020E-01	-8.6514748E-04	0.09%

Tabela 6: Comparação entre as soluções numéricas com UDS e analítica do Cd

Simulação	nx	ny	Cd numérico	Cd analítico	Erro	Erro (%)
BCK.CDS.01	24	10	9.52129618741408E-01	9.81343035872330E-01	2.9213417E-02	2.98%
BCK.CDS.02	48	20	9.75952526808685E-01	9.81652219817358E-01	5.6996930E-03	0.58%
BCK.CDS.03	96	40	9.80059667451581E-01	9.81652219817358E-01	1.5925524E-03	0.16%
BCK.CDS.04	192	80	9.80707197487315E-01	9.81652219817358E-01	9.4502233E-04	0.10%
BCK.CDS.05	384	160	9.81034162657062E-01	9.81652736356521E-01	6.1857370E-04	0.06%

Tabela 7: Comparação entre as soluções numéricas com CDS e analítica do Cd

Simulação	nx	ny	$F_v^*$ numérico	$F_v^*$ experimental	Erro	Erro (%)
BCK.E.F3.001	24	10	9.79758391285342E-01		-1.2820155E-02	1.33%
BCK.E.F3.002	48	20	9.81129938288365E-01		-1.4191702E-02	1.47%
BCK.E.F3.003	96	40	9.75170710039538E-01		-8.2324742E-03	0.85%
BCK.E.F3.004	192	80	9.72657128231212E-01	0.9669	-5.7188924E-03	0.59%
BCK.E.F3.005	384	160	9.70705202221129E-01		-3.7669664E-03	0.39%
BCK.E.F3.006	768	320	9.69725780594103E-01		-2.7875447E-03	0.29%
BCK.E.F3.007	1536	640	9.69198713112863E-01		-2.2604773E-03	0.23%
BCK.E.F3.008	3072	1280	9.68941753714627E-01		-2.0035179E-03	0.21%

Tabela 8: Comparação entre as soluções numéricas com UDS e o resultado experimental de  $F_v^*$

Simulação	nx	ny	$F_v^*$ numérico	$F_v^*$ experimental	Erro	Erro (%)
BCK.CDS.01	24	10	9.39824123618495E-01		2.7114112E-02	2.80%
BCK.CDS.02	48	20	9.62609740213554E-01		4.3284956E-03	0.45%
BCK.CDS.03	96	40	9.67033055358875E-01	0.9669	-9.4819509E-05	0.01%
BCK.CDS.04	192	80	9.67973688223628E-01		-1.0354524E-03	0.11%
BCK.CDS.05	384	160	9.68353935801554E-01		-1.4157000E-03	0.15%

Tabela 9: Comparação entre as soluções numéricas com CDS e o resultado experimental de  $F_v^*$

As Tabelas 10 e 11 apresentam a média do erro percentual da pressão ao longo da parede da tubeira, considerando todos os 20 pontos experimentais do artigo [1], das soluções numéricas obtidas respectivamente com UDS e CDS.

Simulação	nx	ny	Erro percentual médio
BCK.E.F3.001	24	10	41.37%
BCK.E.F3.002	48	20	15.41%
BCK.E.F3.003	96	40	7.07%
BCK.E.F3.004	192	80	3.54%
BCK.E.F3.005	384	160	2.09%
BCK.E.F3.006	768	320	2.05%
BCK.E.F3.007	1536	640	2.21%
BCK.E.F3.008	3072	1280	2.41%

Tabela 10: Erro percentual médio da pressão na parede da tubeira para UDS

Simulação	nx	ny	Erro percentual médio
BCK.CDS.01	24	10	18.44%
BCK.CDS.02	48	20	4.15%
BCK.CDS.03	96	40	3.35%
BCK.CDS.04	192	80	2.66%
BCK.CDS.05	384	160	2.11%

Tabela 11: Erro percentual médio da pressão na parede da tubeira para CDS

A Figura 3 mostra o campo do número de Mach obtido com UDS na malha mais refinada (3072 x 1280 nós), com cerca de 4 milhões de nós. Nota-se a existência de uma onda de choque oblíqua, cuja existência já foi comprovada experimentalmente.

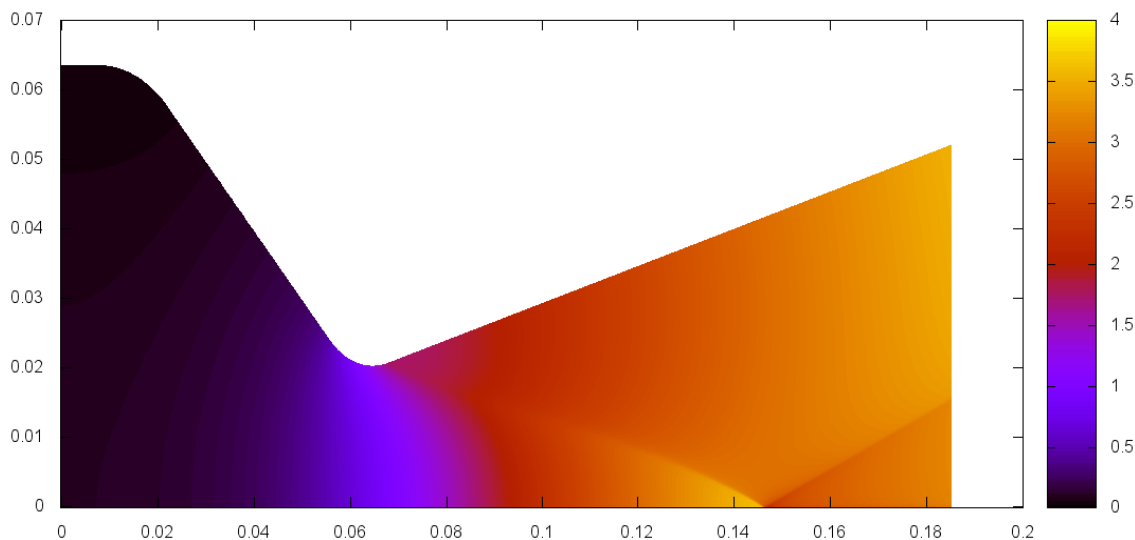


Figura 3: Campo do número de Mach com UDS

#### 4 Conclusão

Para as variáveis globais  $C_d$  e  $F_v^*$ , a diferença entre os resultados numéricos e experimentais foi de no máximo 0,5% e 0,3% na malha mais fina respectivamente do UDS e CDS.

Já no caso das variáveis locais, como a pressão ao longo da parede da tubeira, a diferença média entre os resultados numéricos e experimentais foi de no máximo 2,4% e 2,1% na malha mais fina respectivamente do UDS e CDS.

Portanto, para a malha mais fina que se conseguiu convergência, os erros entre os resultados experimentais e as soluções numéricas obtidas com UDS e CDS são praticamente equivalentes.

Em um trabalho que está em andamento, vamos comparar as soluções do escoamento invíscido do presente trabalho com novos resultados numéricos de escoamentos laminares e turbulentos. O objetivo é verificar se os erros entre as soluções numéricas e experimentais diminuem com o aumento da complexidade do modelo matemático.

## **Agradecimentos**

Os autores agradecem o apoio financeiro do CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), AEB (Agência Espacial Brasileira) através do Programa Uniespaço, e CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). O primeiro autor é bolsista da CAPES. O segundo autor é bolsista do CNPq.

## **Referências**

- [1] L. H. Back, P. F. Massier, H. L. Gier, Comparison of measured and predicted flows through conical supersonic nozzles with emphasis on transonic region, *AIAA Journal*, vol. 3, pp. 1606–1614, (1965).
- [2] J. R. Kliegel, J. N. Levine, Transonic flow in small throat radius of curvature nozzles, *AIAA Journal*, vol. 7, pp. 1375–1378, (1969).
- [3] C. H. Marchi, L. K. Araki, “Relatório técnico do projeto CFD-10/UFPR: códigos Mach2D 6.1 e RHG2D 1.0”, UFPR, Curitiba, 2009.