

4. CONDUÇÃO DE CALOR 1Dp COM ÁREA VARIÁVEL

4.1 Coordenadas Cilíndricas

4.1.1 Modelo matemático

A partir da equação de conservação da energia térmica, considerando-se:

- problema unidimensional (1D)
- regime permanente (p)
- coordenadas cilíndricas
- geração de calor (\dot{q})

obtém-se a equação diferencial do problema, dada por

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(kr \frac{dT}{dr} \right) + \dot{q} = 0 \quad (4.1)$$

onde

T = temperatura ($^{\circ}\text{C}$ ou K)

r = direção coordenada radial [raio] (m)

k = condutividade térmica (W/mK)

\dot{q} = taxa de geração de calor por volume (W/m^3)

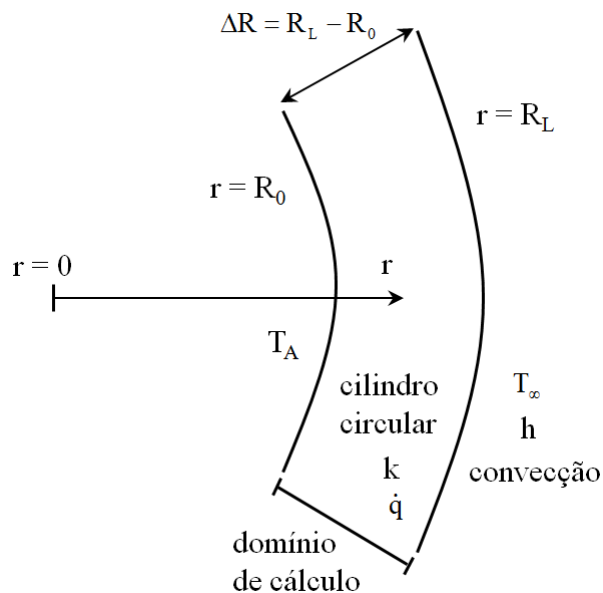


Figura 4.1: Esquema do problema físico

Condições de contorno (CC):

- Dirichlet (T conhecida) em $r = R_0$, dada por

$$T(R_0) = T_A \text{ (valor conhecido)} \quad (4.2)$$

- Robin (convecção) em $r = R_L = L$, dada por

$$q_L = - \underbrace{\left(kA \frac{dT}{dr} \right)_L}_{\text{condução}} = \underbrace{h (T_L - T_\infty) A_L}_{\text{convecção}} \quad (4.3)$$

onde

h = coeficiente de transferência de calor por convecção ($\text{W}/\text{m}^2\text{K}$)

T_∞ = temperatura do fluido em contato com o contorno em $r = R_L$ ($^\circ\text{C}$ ou K)

A_L = área da superfície do contorno em $r = R_L$ (m^2)

Na eq.(4.3) são conhecidos A_L , h e T_∞ ; e são desconhecidos q_L , k , T_L e $(dT/dr)_L$.

4.1.2 Discretização

Integrando-se a eq.(4.1) sobre o volume de controle (VC) P da fig. 4.2, obtém-se:

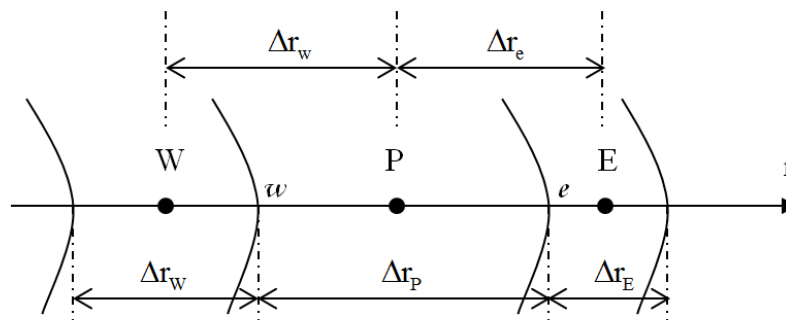


Figura 4.2: Malha 1D não-uniforme de nós centrados entre faces

$$\int_{r_w}^{r_e} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\overbrace{kr \frac{dT}{dr}}^f \right) + \dot{q} \right] dr = 0 \quad (4.4)$$

Multiplicando-se a eq. (4.4) por r e separando-se os termos, obtém-se

$$\int_{r_w}^{r_e} df + \int_{r_w}^{r_e} r \dot{q} dr = 0 \quad (4.5)$$

onde

$$f = \left(kr \frac{dT}{dr} \right) \quad (4.6)$$

Com a solução analítica da primeira integral da eq. (4.5), e considerando-se $r = r_p$ e $\dot{q} = \dot{q}_p$ na segunda integral, chega-se a

$$f_e - f_w + r_p \dot{q}_p \Delta r_p = 0 \quad (4.7)$$

ou com a eq.(4.6)

$$\left(kr \frac{dT}{dr} \right)_e - \left(kr \frac{dT}{dr} \right)_w + r_p \dot{q}_p \Delta r_p = 0 \quad (4.8)$$

- k_e e k_w podem ser obtidos com as eqs. (2.18) a (2.20), apenas mudando-se x por r .
- r_e , r_w , r_p e Δr_p são obtidos da malha gerada, de forma semelhante às eqs.(2.7) a (2.9).
- \dot{q}_p é um dado do problema.
- As duas derivadas da eq.(4.8) podem ser aproximadas com o esquema CDS-2 (fig.2.3), resultando em

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_w \approx \frac{(T_p - T_w)}{\Delta r_w} \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_e \approx \frac{(T_E - T_p)}{\Delta r_e} \quad (4.10)$$

Com as eqs. (4.9) e (4.10) em (4.8), chega-se a

$$k_e r_e \frac{(T_E - T_p)}{\Delta r_e} - k_w r_w \frac{(T_p - T_w)}{\Delta r_w} + r_p \dot{q}_p \Delta r_p = 0 \quad (4.11)$$

que na forma do sistema de equações

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_E + b_p \quad (4.12)$$

resulta em

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes:} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_w = k_w r_w / \Delta r_w \\ a_e = k_e r_e / \Delta r_e \\ a_p = a_w + a_e \end{array} \right. \\ \text{termo fonte:} \quad b_p = \dot{q}_p r_p \Delta r_p \end{array} \right\} P = 1 \text{ a } N \text{ (volumes reais)} \quad (4.13)$$

4.1.3 Aplicação das condições de contorno

A condição de contorno em $r = R_0$, dada pela eq.(4.2), pode ser aplicada com o VC fictício $P = 0$, conforme mostrado na fig.2.4, resultando em

$$a_p = 1; \quad a_w = 0; \quad a_e = -1; \quad b_p = 2T_A \quad (P = 0) \quad (4.14)$$

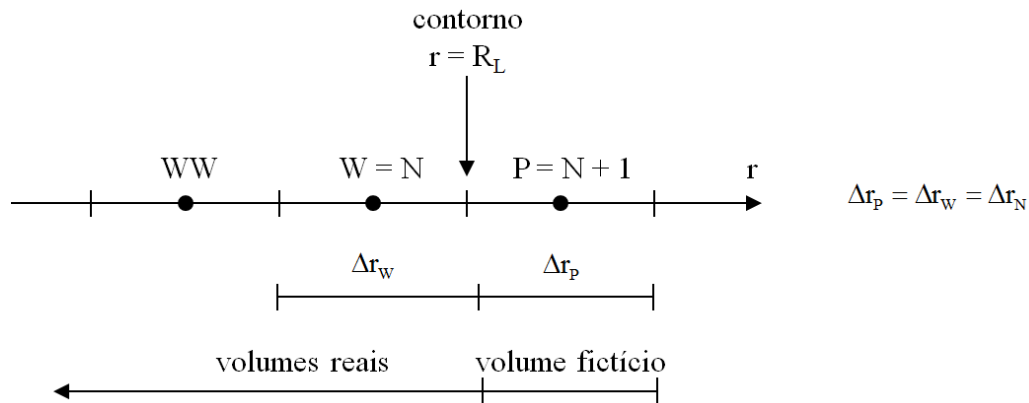


Figura 4.3: Aplicação da CC em $r = RL$

Para aplicar a CC em $r = R_L$, dada pela eq.(4.3), é necessário aproximar a sua derivada e T_L . Com a fig.4.3 e o esquema CDS-2, tem-se:

$$\left(\frac{dT}{dr} \right)_L \approx \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r_N} \quad (P = N + 1) \quad (4.15)$$

$$T_L \approx \frac{(T_P + T_W)}{2} \quad (P = N + 1) \quad (4.16)$$

Com as eqs.(4.15) e (4.16) na eq.(4.3), obtém-se

$$-k_L A_L \frac{(T_P - T_W)}{\Delta r_N} = h \left[\frac{(T_P + T_W)}{2} - T_\infty \right] A_L$$

ou na forma da eq.(4.12),

$$a_w = \frac{k_L}{\Delta r_N} - \frac{h}{2}; \quad a_e = 0; \quad a_p = \frac{k_L}{\Delta r_N} + \frac{h}{2}; \quad b_p = hT_\infty \quad (P = N + 1) \quad (4.17)$$

4.1.4 Algoritmo

O algoritmo para resolver o problema definido pelas eqs. (4.1) a (4.3) é essencialmente o mesmo da seção 2.8, acrescentando-se que:

a) quando necessário, T_L pode ser obtido com a eq.(4.16);

b) q_L pode ser obtido através das eqs.(4.3) e (4.15), isto é:

$$q_L = -k_L A_L \frac{(T_{P=N+1} - T_{P=N})}{\Delta r_{P=N}} \quad (4.18)$$

onde $k_L = k(T_L)$ e a área em $r = R_L$ é dada por

$$A_L = 2\pi R_L z \quad (4.19)$$

onde z é o comprimento do duto. Se a troca de calor ocorre em apenas uma parte do duto, 2π deve ser substituído pelo ângulo em radianos da região de troca de calor.

4.2 Aletas

4.2.1 Modelo matemático

A partir da equação de conservação da energia térmica, considerando-se:

- problema unidimensional (1D) na direção x
- regime permanente (p)
- área de condução de calor variável com x
- convecção de calor na superfície da aleta
- figura 4.4

obtem-se a equação diferencial do problema, dada por

$$\underbrace{\frac{d}{dx} \left(k A_c \frac{dT}{dx} \right)}_{\text{condução}} = \underbrace{h(T - T_\infty) \frac{dA_s}{dx}}_{\text{convecção}} \quad (4.20)$$

onde

T = temperatura

x = direção coordenada

k = condutividade térmica

A_c = área de condução de calor em cada posição x

h = coeficiente de transferência de calor por convecção

T_∞ = T do fluido em contato com a aleta

A_s = área da superfície da aleta

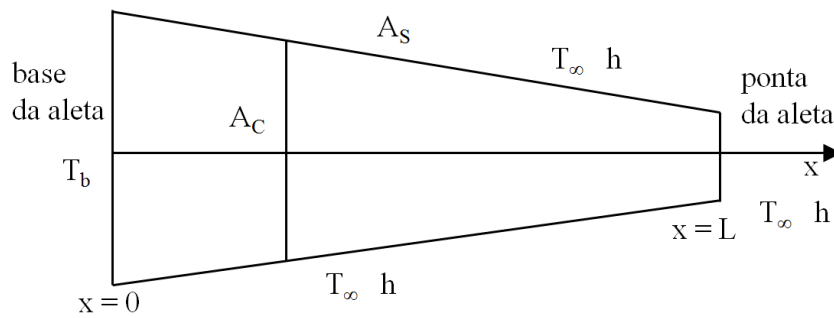


Figura 4.4: Esquema do problema da aleta

Condições de contorno:

- em $x = 0$, Dirichlet (T conhecida), dada por

$$T(0) = T_b \quad (T \text{ da base da aleta, conhecida}) \quad (4.21)$$

- em $x=L$, Robin (convecção), dada por

$$q_L = - \underbrace{\left(k A_C \frac{dT}{dx} \right)_L}_{\text{condução}} = \underbrace{h (T_L - T_\infty) (A_C)_L}_{\text{convecção}} \quad (4.22)$$

Na eq.(4.22) são conhecidos $(A_C)_L$, h , T_∞ ; e são desconhecidos: k_L , q_L , T_L , $(dT/dx)_L$.

Variáveis de interesse:

a) taxa de transferência de calor (q) da aleta obtida em sua base (b) através de

$$q_b = - \left(k A_C \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} \quad (4.23)$$

b) q da aleta obtido por integração do calor perdido por convecção através de

$$q_h = \int_0^L h (T - T_\infty) dA_s + h (T_L - T_\infty) (A_C)_L \quad (4.24)$$

c) T na ponta da aleta: T_L

Física e matematicamente, sabe-se que $q_b = q_h$.

4.2.2 Discretização

Integrando-se a eq. (4.20) sobre o VC P da fig. 4.5, obtém-se

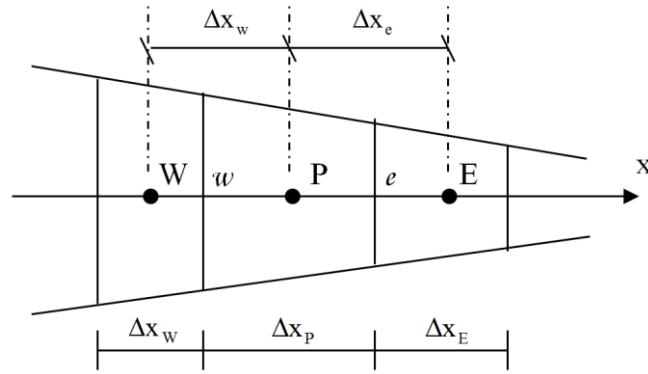


Figura 4.5: Malha 1D não-uniforme de nós centrados entre faces para uma aleta de área variável

$$\int_{x_w}^{x_e} \frac{d}{dx} \left(kA_C \frac{dT}{dx} \right) dx = \int_{x_w}^{x_e} h(T - T_\infty) \frac{dA_S}{dx} dx \quad (4.25)$$

ou

$$\int_{x_w}^{x_e} df = h \int_{x_w}^{x_e} (T - T_\infty) dA_S \quad (4.26)$$

onde

$$f = kA_C \frac{dT}{dx} \quad (4.27)$$

Considerando-se T constante dentro de cada VC P, a eq.(4.26) resulta em

$$f_e - f_w = h (T_P - T_\infty) (\Delta A_S)_P$$

ou com a eq.(4.27)

$$\left(kA_C \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(kA_C \frac{dT}{dx} \right)_w = h (T_P - T_\infty) (\Delta A_S)_P \quad (4.28)$$

onde

- $(\Delta A_S)_P$ é a área da superfície de cada VC P em contato com o fluido que está a T_∞ .
- k_e e k_w podem ser obtidos das eqs.(2.18) a (2.20).
- $(A_C)_e$ e $(A_C)_w$ são as áreas de condução do calor pela aleta nas faces leste (e) e oeste (w) do VC P.
- A_s e A_c são obtidos da malha gerada em função de cada tipo de aleta (cônica, plana, anular, etc.).

As duas derivadas da eq. (4.28) podem ser aproximadas com o esquema CDS-2 (fig. 2.3):

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_e \approx \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x_e} \quad (4.29)$$

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_w \approx \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x_w} \quad (4.30)$$

Com as eqs. (4.29) e (4.30) em (4.28), chega-se a

$$k_e(A_c)_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x_e} - k_w(A_c)_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x_w} = h(T_P - T_\infty)(\Delta A_S)_P \quad (4.31)$$

A eq. (4.31) pode ser colocada na forma da eq. (4.12), resultando em

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes:} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_w = k_w(A_c)_w / \Delta x_w \\ a_e = k_e(A_c)_e / \Delta x_e \\ a_p = a_w + a_e + h(\Delta A_S)_P \end{array} \right. \\ \text{termo fonte:} \quad b_p = h(\Delta A_S)_P T_\infty \end{array} \right\} P = 1 \text{ a } N \text{ (volumes reais)} \quad (4.32)$$

4.2.3 Aplicação das condições de contorno

A CC em $x=0$, dada pela eq. (4.21), pode ser aplicada com o VC fictício $P=0$ da fig. 2.4, resultando em

$$a_p = 1; \quad a_w = 0; \quad a_e = -1; \quad b_p = 2T_b \quad (P = 0) \quad (4.33)$$

A CC em $x=L$, dada pela eq. (4.22), pode ser aplicada com o VC fictício $P=N+1$ da fig. 2.5, e seguindo o procedimento da subseção 4.1.3. Isso resulta em

$$a_w = \frac{k_L}{\Delta x_N} - \frac{h}{2}; \quad a_e = 0; \quad a_p = \frac{k_L}{\Delta x_N} + \frac{h}{2}; \quad b_p = hT_\infty \quad (P = N + 1) \quad (4.34)$$

4.2.4 Algoritmo

O algoritmo para resolver o problema definido pelas eqs. (4.20) a (4.22) é essencialmente o mesmo da seção 2.8, acrescentando-se que:

- quando necessário T_L pode ser obtido com a eq. (4.16);
- q_b , definido pela eq. (4.23), pode ser obtido através de

$$q_b = -k_{x=0}(A_c)_{x=0} \frac{(T_{P=1} - T_{P=0})}{\Delta x_{P=1}} \quad (4.35)$$

c) q_h , definido pela eq. (4.24), pode ser obtido através de

$$q_h = h \sum_{p=1}^N [(T_p - T_\infty)(\Delta A_s)_p] + h(T_L - T_\infty)(A_c)_L \quad (4.36)$$

4.2.5 Casos simplificados

1º) condução de calor 1Dp com área (A_c) variável mas sem convecção: basta fazer $h=0$. Neste caso, a eq. diferencial (4.20) se reduz a

$$\frac{d}{dx} \left(k A_c \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (4.37)$$

2º) aleta com A_c e k constantes, e malha uniforme (Δx constante): os coeficientes da eq. (4.32) se reduzem a

$$a_w = a_e = k \frac{A_c}{\Delta x}; \quad a_p = a_w + a_e + hC\Delta x; \quad b_p = hC\Delta x T_\infty \quad (P = 1 \text{ a } N) \quad (4.38)$$

onde C é o perímetro da aleta em contato com o fluido. Neste caso, a equação diferencial (4.20) se reduz a

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{hC}{kA_c} (T - T_\infty) \quad (4.39)$$

São conhecidas as soluções analíticas das eqs. (4.37) e (4.39).