

## 5. CONDUÇÃO DE CALOR 2Dp

### 5.1 Modelo matemático

A partir da equação de conservação da energia térmica, considerando-se:

- problema bidimensional (2D)
- regime permanente (p)
- coordenadas cartesianas
- propriedades constantes ( $\dot{q}$ ,  $k$ )

obtém-se a equação diferencial do problema, dada por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (5.1)$$

onde

$T$  = temperatura ( °C ou K)

$x, y$  = direções coordenadas na horizontal e vertical, respectivamente (m)

$k$  = condutividade térmica (W/m.K)

$\dot{q}$  = taxa de geração de calor por volume (W/m<sup>3</sup>)

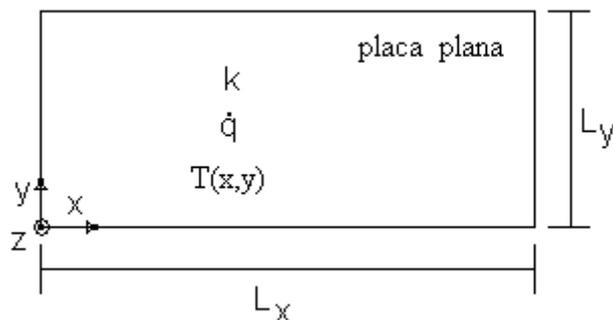


Figura 5.1: Esquema do problema físico

Exemplo de condições de contorno (CC):

$$T(0, y) = T(L_x, y) = T(x, 0) = 0 \quad (5.2)$$

$$T(x, L_y) = \text{sen}\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \quad (5.3)$$

Variáveis de interesse:

- $T(x,y)$ , da solução das eqs.(5.1) a (5.3)



ou

$$\int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\dot{q}}{k} \right] dx dy = 0$$

ou ainda

$$\int_{y_s}^{y_n} \underbrace{\left[ \int_{x_w}^{x_e} \partial f \right]}_{I_1} dy + \int_{x_w}^{x_e} \underbrace{\left[ \int_{y_s}^{y_n} \partial g \right]}_{I_2} dx + \underbrace{\int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left( \frac{\dot{q}}{k} \right)}_{I_3} dx dy = 0 \quad (5.8)$$

onde

$$f = \frac{\partial T}{\partial x} \quad e \quad g = \frac{\partial T}{\partial y} \quad (5.9)$$

Na equação (5.8), considerando-se:

- integrais analíticas em  $I_1$  e  $I_2$
- que  $\dot{q}$  e  $k$  são constantes em todo o domínio de cálculo

obtem-se

$$\int_{y_s}^{y_n} (f_e - f_w) dy + \int_{x_w}^{x_e} (g_n - g_s) dx + \frac{\dot{q}}{k} \Delta x \Delta y = 0$$

ou, com a eq.(5.9),

$$\int_{y_s}^{y_n} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dy + \int_{x_w}^{x_e} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] dx + \frac{\dot{q}}{k} \Delta x \Delta y = 0 \quad (5.10)$$

As integrais da eq.(5.10) são resolvidas considerando-se que cada derivada seja constante ao longo de cada face do VC P, resultando em

$$\left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y + \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x + \frac{\dot{q}}{k} \Delta x \Delta y = 0 \quad (5.11)$$

Para concluir a discretização da eq. (5.1), será considerado que  $T$  varia linearmente entre cada dois nós consecutivos, em cada direção. Assim, a eq. (5.11) resulta em

$$\left[ \left( \frac{T_E - T_P}{\Delta x} \right) - \left( \frac{T_P - T_W}{\Delta x} \right) \right] \Delta y + \left[ \left( \frac{T_N - T_P}{\Delta y} \right) - \left( \frac{T_P - T_S}{\Delta y} \right) \right] \Delta x + \frac{\dot{q}}{k} \Delta x \Delta y = 0$$

ou

$$\frac{(T_W + T_E - 2T_P)}{\Delta x} \Delta y + \frac{(T_S + T_N - 2T_P)}{\Delta y} \Delta x + \frac{\dot{q}}{k} \Delta x \Delta y = 0 \quad (5.12)$$

ou na forma

$$a_p T_P = a_w T_W + a_e T_E + a_s T_S + a_n T_N + b_p \quad (5.13)$$

chega-se a

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = a_e = \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ a_s = a_n = \frac{\Delta x}{\Delta y} \\ a_p = a_w + a_e + a_s + a_n \end{array} \right. \\ \text{termo fonte} \left\{ b_p = \frac{\dot{q}}{k} \Delta y \Delta x \end{array} \right. \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{coeficientes} \\ \text{termo fonte} \end{array}} \right\} \text{ para volumes reais} \quad (5.14)$$

Estrutura do sistema de equações:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right]_{N_T \times N_T} = \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]_{N_T \times 1} = \left[ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right]_{N_T \times 1}$$

ou

$$[A][T] = [B]$$

onde

A: matriz pentadiagonal (apenas 5 diagonais têm coeficientes diferentes de zero)

$$N_T = N_{xT} \cdot N_{yT} = \text{número total de VC} \quad (5.15)$$

onde

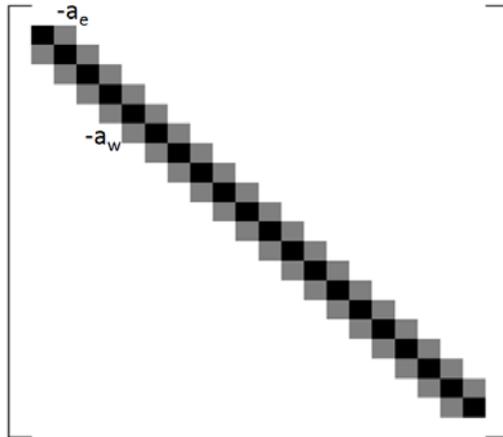
$N_{xT}$ : número de VC na direção x com 2 fictícios

$N_{yT}$ : número de VC na direção y com 2 fictícios

A seguir é apresentada a estrutura da matriz dos coeficientes para um problema 1D com 10 volumes de controle onde eles são numerados da esquerda para a direita (caso 1) e da direita para a esquerda (caso 2), respectivamente. Nas matrizes, o coeficiente central ( $a_p$ ) é representado pelos quadrados pretos, e os coeficientes  $a_e$  e  $a_w$  pelos quadrados cinzas. Deve-se perceber que apenas os coeficientes  $a_e$  e  $a_w$  trocam de posição ao se mudar o sistema de numeração.

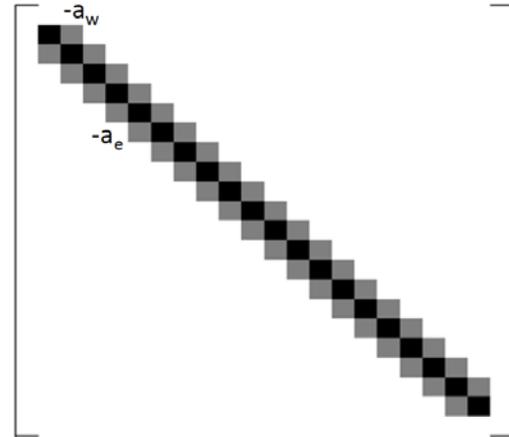
Caso 1: ordenação da esquerda para a direita

.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.10
----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----



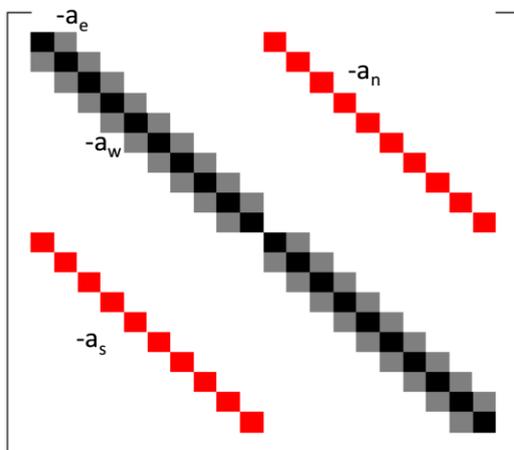
Caso 2: ordenação da direita para a esquerda

.10	.9	.8	.7	.6	.5	.4	.3	.2	.1
-----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

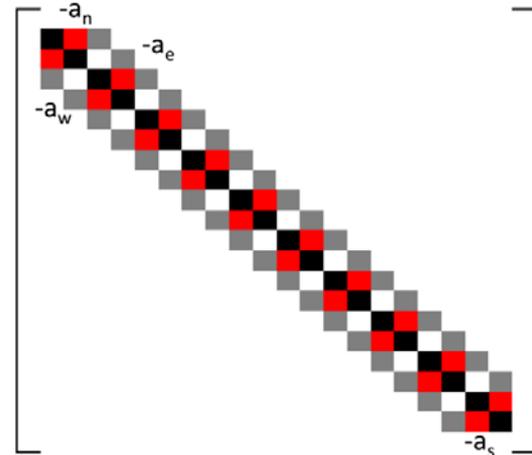


Para um problema 2D com a malha de 10 por 2 volumes de controle há outras opções de numeração, entre outras: (1) da esquerda para a direita e de baixo para cima, ou (2) de baixo para cima e da esquerda para a direita, respectivamente. Os novos coeficientes  $a_s$  e  $a_n$  são representados por quadrados vermelhos.

.11	.12	.13	.14	.15	.16	.17	.18	.19	.20
.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	.10



.2	.4	.6	.8	.10	.12	.14	.16	.18	.20
.1	.3	.5	.7	.9	.11	.13	.15	.17	.19



Ao se resolver o sistema de equações será obtida a mesma solução nos dois tipos de numeração. Porém, há algoritmos de resolução do sistema linear que irão se beneficiar no caso dos coeficientes estarem mais próximos da diagonal principal, como a fatoração LU.

### 5.3 Aplicação das condições de contorno (CC)

As condições de contorno podem ser aplicadas com o uso de volumes fictícios da mesma forma como já foi visto para os problemas 1D. Por exemplo, para o contorno norte do domínio de cálculo:

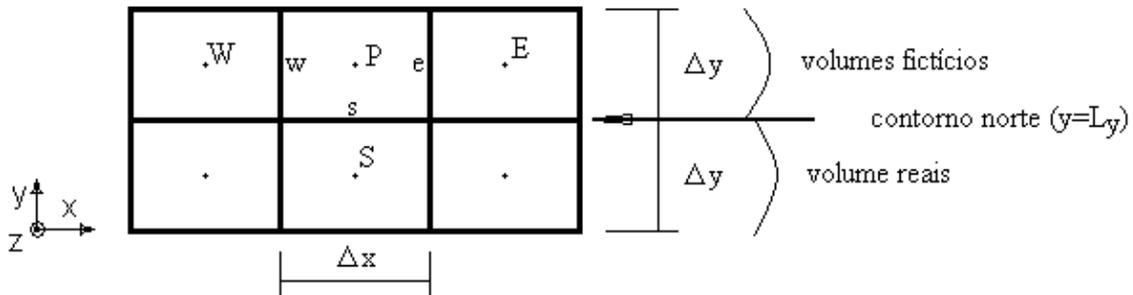


Figura 5.3: Aplicação das CC no contorno norte

$$\frac{T_P + T_S}{2} = T_s = T_{CC} \text{ (valor conhecido)} \quad (5.16)$$

ou

$$T_P = -T_S + 2T_{CC} \quad (5.17)$$

onde  $T_{CC}$  pode ser função de  $x$ ; neste caso, é usado seu valor no centro de cada face sul ( $s$ ) de cada VCP.

Comparando-se a eq.(5.17) com a eq.(5.13), obtém-se

$$a_p = 1; \quad a_s = -1; \quad a_w = a_e = a_n = 0; \quad b_p = 2T_{CC} \quad (5.18)$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado aos outros três contornos.

### 5.4 Gauss-Seidel

O sistema de equações representado pela equação (5.13) pode ser resolvido com o método de Gauss-Seidel, através de

$$T_P = \frac{(a_w T_W + a_e T_E + a_s T_S + a_n T_N + b_P)}{a_P} \quad (5.19)$$

onde  $P = 1, 2, 3, \dots, N_T$  (envolve todos os volumes, reais e fictícios).

## 5.5 Variáveis Secundárias

Através da regra do retângulo ( $T_P$  constante em cada VC P), a solução numérica da eq.(5.4) pode ser obtida com

$$\bar{T} = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{P=1}^{N_R} (T_P \Delta x \Delta y) = \frac{\Delta x \Delta y}{L_x L_y} \sum_{P=1}^{N_R} T_P \quad (5.20)$$

onde  $P=1, 2, \dots, N_R$  (envolve somente os volumes reais).

A solução numérica de  $q_n$ , da eq.(5.6), pode ser obtida com

$$q_n = -k z \int_0^{L_x} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x,y=L_y} dx \quad (5.21)$$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x,y=L_y} \approx \frac{T_P - T_S}{\Delta y}$$

onde P refere-se aos volumes fictícios da fig. 5.3, cujas faces sul (s) coincidem com o contorno norte real do domínio de cálculo.

Com a eq.(5.21) na eq.(5.6) e a regra do retângulo, obtém-se

$$q_n = -k z \sum_{P=1}^{N_{xR}} \left[ \frac{(T_P - T_S)}{\Delta y} \Delta x \right] = -k z \frac{\Delta x}{\Delta y} \sum_{P=1}^{N_{xR}} (T_P - T_S) \quad (5.22)$$

onde  $N_{xR}$  representa os volumes de controle reais na direção x.

## 5.6 Algoritmo

Os passos lógicos (algoritmo) para ser resolvido numericamente o problema definido pelas eqs. (5.1) a (5.6) são:

1- Ler os dados:  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $k$ ,  $\dot{q}$ , funções  $T_{CC}$ ,  $N_{xT}$ ,  $N_{yT}$ , I (número de iterações).

2- Discretizar o domínio de cálculo com

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_{xT} - 2}; \quad \Delta y = \frac{L_y}{N_{yT} - 2} \quad (5.23)$$

e calcular  $x_P$  e  $y_P$ .

- 3- Calcular os coeficientes e termos fontes com as eqs.(5.14), (5.18) e suas análogas para os outros três contornos.
- 4- Estimar a solução de  $T_P$ , por exemplo com  $T_P = 0$ , para  $P = 1$  a  $N_T$
- 5- Resolver o sistema de equações (5.13) através do método de Gauss-Seidel, eq. (5.19).
- 6- Voltar ao passo 5 até ser atingido I (iterações).
- 7- Calcular  $\bar{T}$ ,  $q_n$  e  $q_e$  com as eqs. (5.20), (5.22) e análogas.
- 8- Imprimir e visualizar os resultados.

## 5.7 Solução Analítica

Para  $\dot{q} = 0$  e as condições de contorno das eqs. (5.2) e (5.3), a solução das eqs. (5.1) e (5.4) a (5.6) resulta em

$$T = \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \frac{\sinh\left(\frac{\pi y}{L_x}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \quad (5.24)$$

$$\bar{T} = \frac{2L_x}{\pi^2 L_y \sinh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \left[ \cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1 \right] \quad (5.25)$$

$$q_n = -2k \coth\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) z \quad (5.26)$$

$$q_e = \frac{k}{\sinh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right)} \left[ \cosh\left(\frac{\pi L_y}{L_x}\right) - 1 \right] z \quad (5.27)$$