7. CONVECÇÃO E ESCOAMENTO 1Dp

7.1 Convecção de Calor 1Dp

7.1.1 Modelo matemático

Na equação de conservação da energia térmica, considerando-se:
- escoamento 1Dp laminar
- velocidade constante $u > 0$
- propriedades constantes: ρ , k, c_p
- sem geração de calor $\dot{q}$
- sem dissipação viscosa

obtém-se a eq. de advecção-difusão de calor 1Dp, dada por

$$\underbrace{\underbrace{Pe\frac{dT}{dx}}_{\text{advecção}} = \underbrace{\frac{d^2T}{dx^2}}_{\text{difusão}}}_{\text{convecção}} \tag{7.1}$$

onde

$$Pe = \frac{\rho u c_p L}{k} = \frac{uL}{\alpha} \quad \text{(n° de Peclet, constante)} \tag{7.2}$$

T = temperatura (ºC ou K)
u = velocidade (m/s)
x = coordenada espacial (m)
k = condutividade térmica (W/mK)
ρ = massa específica (kg/m^3)
c_p = calor específico (J/kg.K)
L = comprimento do domínio de cálculo (m)
α = difusividade térmica (m^2/s)

Condições de contorno:

$$T(0) = 0 \tag{7.3}$$

$$T(1) = 1 \tag{7.4}$$

A solução analítica das eqs.(7.1), (7.3) e (7.4) é

$$T = \frac{\left(e^{xPe} - 1\right)}{\left(e^{Pe} - 1\right)} \tag{7.5a}$$

E a solução analítica da temperatura média ao longo do domínio (variável secundária):

$$\overline{T}=\frac{1}{Pe}-\frac{1}{e^{Pe}-1} \tag{7.5b}$$

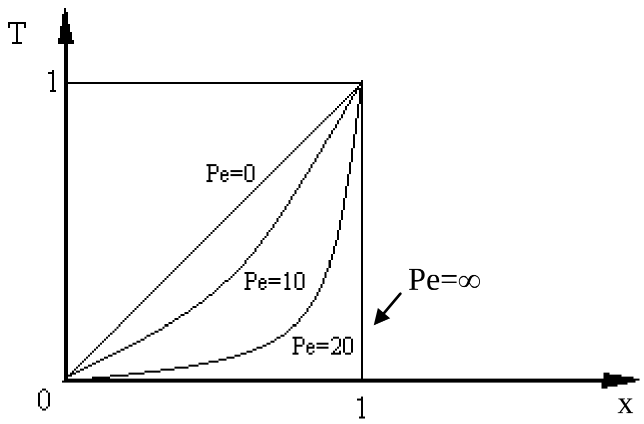

Figura 7.1: Comportamento da temperatura com a variação do número de Peclet

7.1.2 Discretização do modelo matemático

Integrando-se a eq. (7.1) sobre o volume de controle P da fig.7.2, obtém-se

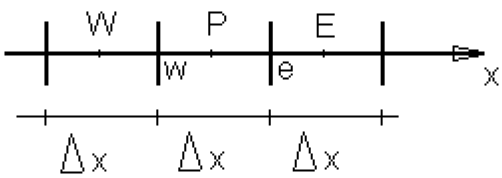

Figura 7.2: Malha 1D uniforme

$$\int_{x_w}^{x_e} Pe\frac{dT}{dx}dx=\int_{x_w}^{x_e}\frac{d^2T}{dx^2}dx \tag{7.6}$$

ou

$$Pe\int_{x_w}^{x_e} dT=\int_{x_w}^{x_e}\frac{d}{dx}\overbrace{\left(\frac{dT}{dx}\right)}^{f}dx$$

ou ainda

$$Pe\int_{x_w}^{x_e} dT=\int_{x_w}^{x_e} df$$

onde $f=\dfrac{dT}{dx}$

que resulta em

$$Pe\left(T_e-T_w\right)=\left(\frac{dT}{dx}\right)_e-\left(\frac{dT}{dx}\right)_w \tag{7.7}$$

Considerando-se funções lineares para T entre cada par de nós consecutivos, isto é, o esquema CDS-2, tem-se

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_e \approx \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x} \qquad \left(\frac{dT}{dx}\right)_w \approx \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x} \tag{7.8}$$

$$T_e = \frac{(T_P + T_E)}{2} \qquad T_w = \frac{(T_W + T_P)}{2} \tag{7.9}$$

Com as eqs. (7.8) e (7.9) em (7.7), obtém-se

$$Pe\left[\frac{(T_P + T_E)}{2} - \frac{(T_P + T_W)}{2}\right] = \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x} - \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x}$$

ou

$$\frac{Pe}{2}(T_E - T_W) = \frac{(T_W + T_E - 2T_P)}{\Delta x} \tag{7.10}$$

Comparando-se a eq.(7.10) a

$$a_P T_P = a_w T_W + a_e T_E + b_P \tag{7.11}$$

obtém-se

$$\left.\begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = \dfrac{1}{\Delta x} + \dfrac{Pe}{2} \\[2ex] a_e = \dfrac{1}{\Delta x} - \dfrac{Pe}{2} \\[2ex] a_P = \dfrac{2}{\Delta x} = a_w + a_e \end{array} \right. \\[6ex] \text{termo fonte } \{ b_P = 0 \end{array}\right\} \text{(VC reais, P=1 a N)} \tag{7.12}$$

As CC podem ser aplicadas com volumes fictícios (P = 0 e N + 1) conforme visto na seção 2.5, com as eqs.(2.27) e (2.31) para $T_A = 0$ e $T_B = 1$.

7.1.3 Algoritmo

1- Ler os dados: Pe, N

2- Calcular $\Delta x = \dfrac{1}{N}$ e x_P (P=1 a N)

3- Calcular os coeficientes e termos fontes

4- Resolver o sistema de equações com TDMA obtendo T_P

5- Imprimir e visualizar T(x) e $\overline{T}$

7.1.4 Oscilações e Peclet de malha

Observando-se a eq. 7.12 percebe-se que dependendo do número de Peclet há uma mudança de sinal entre a_w e a_e. A aproximação CDS-2 nestas situações gera uma oscilação puramente numérica na solução, o que acaba por gerar uma solução numérica não acurada.

Algumas aproximações geram essas oscilações e outras não, conforme mostrado na Fig. 7.3. Para muitas aproximações consegue-se demonstrar que as oscilações surgem dependendo do chamado número de Peclet de malha, que é definido por

$$Pe_{\Delta x} = \frac{Pe}{N} \qquad (7.12b)$$

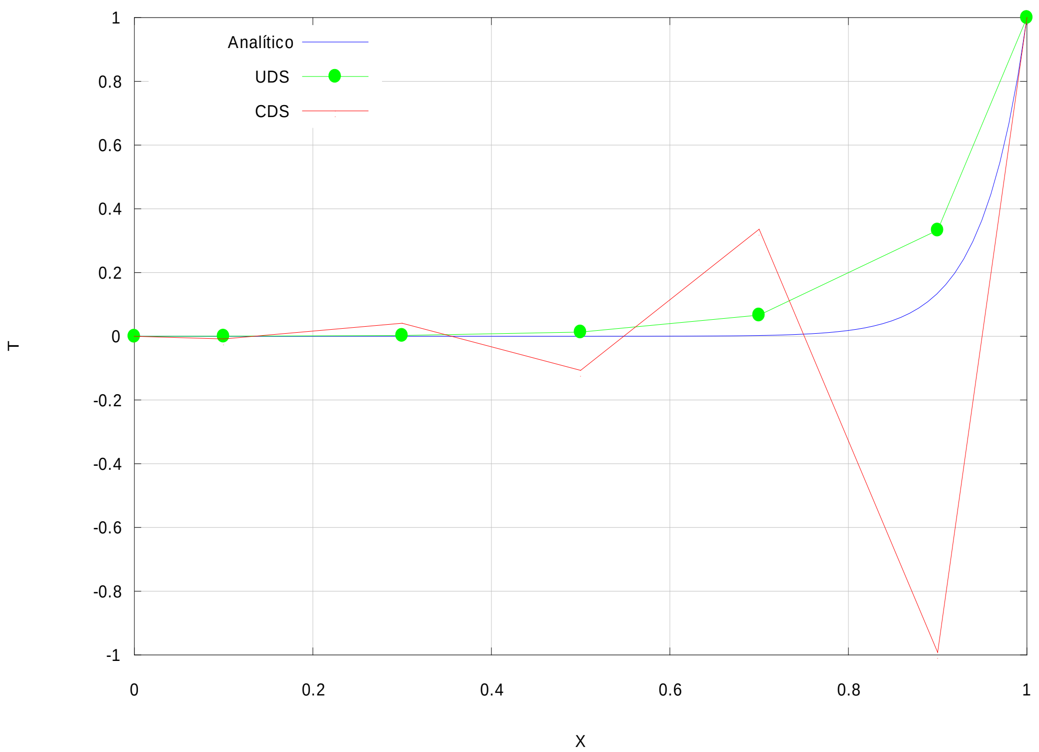

Figura 7.3: Comparação entre as aproximações UDS-1, CDS-2 e analítico para Pe = 20.

No caso do esquema CDS-2 e a Eq. (7.1), pode-se demonstrar que as oscilações numéricas surgem quando $Pe_{\Delta x} > 2$. Enquanto que se $Pe_{\Delta x} < 2$, não existirão oscilações.

Já no caso da aproximação UDS-1 (primeira ordem de acurácia), apresentará uma suavização dos resultados, como mostrado na fig. 7.3, e não existirão oscilações qualquer que seja $Pe_{\Delta x}$.

7.2 Escoamento 1Dp

7.2.1 Modelo matemático

Na eq. de conservação da quantidade de movimento linear (QML), considerando-se:
- escoamento 1Dp laminar
- propriedades constantes: ρ , p (pressão), μ (viscosidade)
- com termo fonte

obtém-se a eq. de Burgers, dada por

$$\mathrm{Re}\frac{du^2}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} + S \tag{7.13}$$

onde Re é o nº de Reynolds , que é definido por

$$\left(\mathrm{Re} = \frac{\rho U L}{\mu}, \text{constante}\right) \tag{7.14}$$

e U é a velocidade de referência (1m/s, neste problema).

Condições de contorno:

$$u(0)=0 \tag{7.15}$$

$$u(1)=1 \tag{7.16}$$

Para o termo fonte dado por

$$S = \mathrm{Re}^2\, e^{x\mathrm{Re}} \frac{\left(2e^{x\mathrm{Re}} - e^{\mathrm{Re}} - 1\right)}{\left(e^{\mathrm{Re}} - 1\right)^2} \tag{7.17}$$

a solução analítica das eqs. (7.13), (7.15) e (7.16) resulta em

$$u = \frac{\left(e^{x\mathrm{Re}} - 1\right)}{\left(e^{\mathrm{Re}} - 1\right)} \tag{7.18a}$$

E a solução analítica da velocidade média ao longo do domínio (variável secundária):

$$\bar{u} = \frac{1}{\mathrm{Re}} - \frac{1}{e^{\mathrm{Re}}-1} \tag{7.18b}$$

7.2.2 Discretização do modelo matemático

Integrando-se a eq.(7.13) sobre o volume de controle P da fig.7.2, obtém-se

$$\int_{x_w}^{x_e} \mathrm{Re}\frac{du^2}{dx}dx = \int_{x_w}^{x_e}\left[\frac{d^2u}{dx^2}+S\right]dx \tag{7.19}$$

ou

$$\mathrm{Re}\int_{x_w}^{x_e}\frac{d}{dx}\overbrace{\left(u^2\right)}^{f}dx = \int_{x_w}^{x_e}\frac{d}{dx}\overbrace{\left(\frac{du}{dx}\right)}^{g}dx + \int_{x_w}^{x_e} S dx$$

onde $f = u^2$ e $g = \dfrac{du}{dx}$

Com isso, tem-se

$$\mathrm{Re}\int_{x_w}^{x_e} d\overbrace{\left(u^2\right)}^{f} = \int_{x_w}^{x_e} d\overbrace{\left(\frac{du}{dx}\right)}^{g} + S_P\Delta x$$

que resulta em

$$\mathrm{Re}\left(u_e^2 - u_w^2\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)_e - \left(\frac{du}{dx}\right)_w + S_P\Delta x \tag{7.20}$$

Para se resolver u na eq. (7.20), os termos com u^2 têm que ser linearizados, isto é, uma parte deve ser mantida como incógnita no sistema de equações, e a outra parte deve ser considerada conhecida da iteração anterior, ficando nos coeficientes, ou seja:

$$u^2 = u^* u \tag{7.21}$$

$$\swarrow\swarrow$$

$$[A]\,[u] = [B]$$

Com a eq.(7.21) em (7.20), chega-se a

$$\mathrm{Re}\left(u_e^* u_e - u_w^* u_w\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)_e - \left(\frac{du}{dx}\right)_w + S_P\Delta x \tag{7.22}$$

Considerando-se funções lineares para u entre cada par de nós consecutivos, isto é, o esquema CDS-2, tem-se

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_e \approx \frac{\left(u_E - u_P\right)}{\Delta x} \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_w \approx \frac{\left(u_P - u_W\right)}{\Delta x} \tag{7.23}$$

$$u_e \approx \frac{\left(u_P + u_E\right)}{2} \qquad u_w \approx \frac{\left(u_W + u_P\right)}{2} \tag{7.24}$$

$$u_e^* \approx \frac{\left(u_P^* + u_E^*\right)}{2} \qquad\qquad u_w^* \approx \frac{\left(u_W^* + u_P^*\right)}{2} \tag{7.25}$$

Com as eqs. (7.23) a (7.25) em (7.22), chega-se a

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\left(u_P^* + u_E^*\right)}{2}\frac{\left(u_P + u_E\right)}{2} - \frac{\left(u_P^* + u_W^*\right)}{2}\frac{\left(u_P + u_W\right)}{2}\right] = \frac{\left(u_E - u_P\right)}{\Delta x} - \frac{\left(u_P - u_W\right)}{\Delta x} + S_P \Delta x \tag{7.26}$$

Comparando-se a eq.(7.26) a

$$a_P u_P = a_w u_W + a_e u_E + b_P \tag{7.27}$$

obtém-se

$$\left.\begin{array}{l} \text{coeficientes} \begin{cases} a_w = \dfrac{1}{\Delta x} + \dfrac{\left(u_P^* + u_W^*\right)}{4}\mathrm{Re} \\[2ex] a_e = \dfrac{1}{\Delta x} - \dfrac{\left(u_P^* + u_E^*\right)}{4}\mathrm{Re} \\[2ex] a_P = \dfrac{2}{\Delta x} + \dfrac{\mathrm{Re}}{4}\left(u_E^* - u_W^*\right) \end{cases} \\[6ex] \text{termo fonte:} \quad \left\{ b_P = S_P \Delta x \right. \end{array}\right\} \text{(VC reais, P=1 a N)} \tag{7.28}$$

As CC podem ser aplicadas com volumes fictícios (P = 0 e N + 1) conforme visto na seção 2.5.

7.2.3 Algoritmo

1- Ler os dados: Re, N, S (função), I (nº de iterações)

2- Calcular $\Delta x = \dfrac{1}{N}$ e x_P (P = 1 a N)

3- Fazer $u_P = 0$ (estimativa inicial) para P = 0 a N + 1

4- Calcular os coeficientes e termos fontes

5- Resolver o sistema de equações com o TDMA obtendo u_P

6- Voltar ao item 4 até atingir I

7- Imprimir e visualizar u(x) e $\bar{u}$