

## 8. CONVECÇÃO E ESCOAMENTO 2Dp

### 8.1 Modelo matemático

A partir da equação de conservação da energia térmica, considerando-se:

- problema bidimensional (2D)
- regime permanente (p)
- coordenadas cartesianas
- escoamento laminar
- propriedades constantes:  $\rho$ ,  $c_p$ ,  $k$
- sem  $\dot{q}$
- sem dissipação viscosa

obtém-se a equação de advecção-difusão de calor 2Dp, dada por

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT)}_{\text{convecção}} = \alpha \underbrace{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}}_{\text{condução}} \quad (8.1)$$

onde

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$$
$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \text{ (m}^2/\text{s)} \quad \text{(difusividade térmica)} \quad (8.2)$$

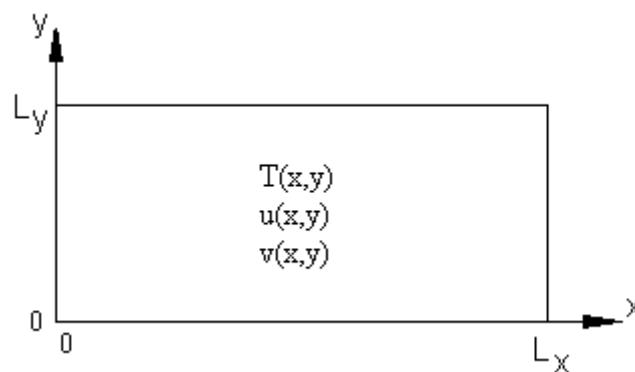


Figura 8.1: Convecção de calor 2Dp

Condições de contorno (por exemplo):

$$T(0,y) = T(1,y) = T(x,0) = 0 \quad (8.3)$$

$$T(x,1) = 100 \text{ sen}(\pi x) \quad (8.4)$$

Neste tipo de problema, o campo de velocidades é considerado conhecido (é um dado do problema); um exemplo é:

$$u = 8(x^4 - 2x^3 + x^2)(4y^3 - 2y) \quad (8.5)$$

$$v = -8(4x^3 - 6x^2 + 2x)(y^4 - y^2) \quad (8.6)$$

## 8.2 Discretização do Modelo Matemático

Integrando-se a eq.(8.1) sobre o volume de controle (VC) P da fig.8.2, obtém-se:

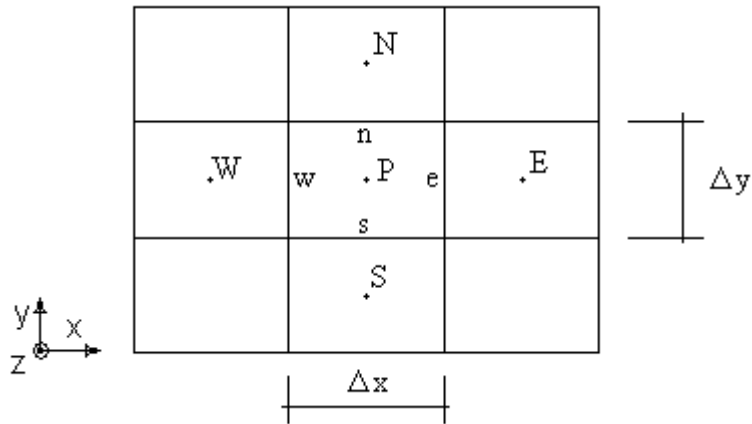


Figura 8.2: Malha 2D uniforme por direção

$$\int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(uT) + \frac{\partial}{\partial y}(vT) \right] dx dy = \int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[ \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (8.7)$$

ou

$$\int_{y_s}^{y_n} \left[ \int_{x_w}^{x_e} \frac{\partial}{\partial x}(uT) dx \right] dy + \int_{x_w}^{x_e} \left[ \int_{y_s}^{y_n} \frac{\partial}{\partial y}(vT) dy \right] dx = \alpha \int_{y_s}^{y_n} \left[ \int_{x_w}^{x_e} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy + \alpha \int_{x_w}^{x_e} \left[ \int_{y_s}^{y_n} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right] dx$$

que resulta em

$$\int_{y_s}^{y_n} [(uT)_e - (uT)_w] dy + \int_{x_w}^{x_e} [(vT)_n - (vT)_s] dx = \alpha \int_{y_s}^{y_n} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] dy + \alpha \int_{x_w}^{x_e} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] dx \quad (8.8)$$

As integrais da eq.(8.8) são resolvidas considerando-se que  $(uT)$ ,  $(vT)$ ,  $\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)$  e  $\left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)$  são constantes em cada face do VC P. Isso resulta em

$$[(uT)_e - (uT)_w] \Delta y + [(vT)_n - (vT)_s] \Delta x = \alpha \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_e - \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y + \alpha \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_n - \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x \quad (8.9)$$

Aproximações para a eq.(8.9):

- CDS para as derivadas nas faces
- CDS para as temperaturas T nas faces
- velocidades u e v constantes em cada face e calculadas com x e y do ponto médio de cada face.

Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} & \left[ u_e \frac{(T_P + T_E)}{2} - u_w \frac{(T_P + T_W)}{2} \right] \Delta y + \left[ v_n \frac{(T_P + T_N)}{2} - v_s \frac{(T_P + T_S)}{2} \right] \Delta x = \\ & = \alpha \left[ \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x} - \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x} \right] \Delta y + \alpha \left[ \frac{(T_N - T_P)}{\Delta y} - \frac{(T_P - T_S)}{\Delta y} \right] \Delta x \end{aligned}$$

que na forma de

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + a_s T_s + a_n T_n + b_p \quad (8.10)$$

resulta em

$$\left. \begin{array}{l} \text{coeficientes} \left\{ \begin{array}{l} a_w = \alpha \frac{\Delta y}{\Delta x} + u_w \frac{\Delta y}{2} \\ a_e = \alpha \frac{\Delta y}{\Delta x} - u_e \frac{\Delta y}{2} \\ a_s = \alpha \frac{\Delta x}{\Delta y} + v_s \frac{\Delta x}{2} \\ a_n = \alpha \frac{\Delta x}{\Delta y} - v_n \frac{\Delta x}{2} \\ * a_p = a_w + a_e + a_s + a_n \end{array} \right. \\ \text{termo fonte} \quad \left\{ b_p = -C \Delta r_p r_p \right. \end{array} \right\} \text{volumes reais } P = 1 \text{ a } N \quad (8.11)$$

\* Para se chegar a expressão do coeficiente  $a_p$  é necessário substituir a eq. da massa discretizada

$$\begin{aligned} & \int u \, dx + \int v \, dy = 0 \\ & (u_e - u_w) \Delta y + (v_n - v_s) \Delta x = 0 \\ & \left( (u_e - u_w) \frac{\Delta y}{2} + (v_n - v_s) \frac{\Delta x}{2} \right) T_p = 0 \end{aligned}$$

As CC podem ser aplicadas com volumes fictícios conforme visto na secção 5.3 do cap. 5 (condução de calor 2Dp).

O sistema de equações pentadiagonal, representado pela eq. (8.10), pode ser resolvido com o método de Gauss-Seidel, conforme a eq. (5.19).

### 8.3 Algoritmo

1- Ler os dados:  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $\alpha$ , funções  $T_{CC}$ , funções  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$  e  $N_x$  e  $N_y$  (com fictícios) e  $I$  (número de iterações)

2- Discretizar o domínio de cálculo com

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_x - 2}; \Delta y = \frac{L_y}{N_y - 2} \quad (8.12)$$

e calcular  $x_p$  e  $y_p$ ,  $x$  e  $y$  no ponto médio de cada face  $x_e$ ,  $y_e$ ,  $x_n$ ,  $y_n$

3- Calcular  $u_w$ ,  $u_e$ ,  $v_s$  e  $v_n$  nas faces de cada VC P real

4- Calcular os coeficientes e termos fontes da eq. (8.11) e dos fictícios para as CC

5- Estimar a solução de  $T_p$ , por exemplo,  $T_p = 0$  para todo P

6- Resolver o sistema de equações (8.10) através do método de Gauss-Seidel (eq. 5.19)

7- Voltar ao item 6 até ser atingido I

8- Pós-processamento

### 8.4 Modelo matemático do escoamento 2Dp

Considerações a partir das equações de Navier-Stokes chega-se a Burgers:

- escoamento laminar 2Dp
- fluido incompressível
- campo de pressões (p) conhecido

Eq. de conservação da Quantidade de Movimento Linear na direção x (QML<sub>x</sub>)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (8.13)$$

Eq. de conservação da Quantidade de Movimento Linear na direção y (QML<sub>y</sub>)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad (8.14)$$

onde

$\rho$  = massa específica do fluido ( $\text{kg/m}^3$ )

$u, v$  = componentes do vetor velocidade nas direções  $x$  e  $y$  (m/s)

$\mu$  = viscosidade absoluta do fluido (Pa/s)

Condições de contorno (por exemplo):

$$\left. \begin{aligned} u(0, y) = u(1, y) = u(x, 0) = 0 \\ u(x, 1) = 16(x^4 - 2x^3 + x^2) \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

$$v(0, y) = v(1, y) = v(x, 0) = v(x, 1) = 0 \quad (8.16)$$

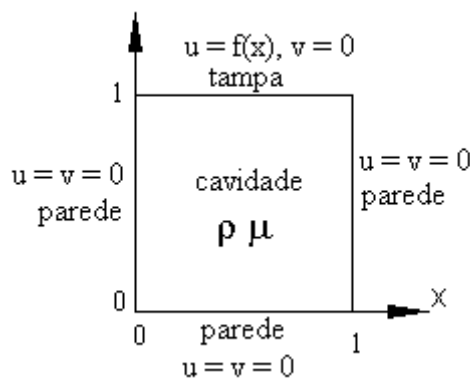


Figura 8.3: Domínio de cálculo e CC do escoamento 2Dp

As eqs.(8.13) e (8.14) podem ser representadas por

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) = S^\phi + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \quad (8.17)$$

onde

equação	$\phi$	$S^\phi$
QMLx	u	$-\partial p / \partial x$
QMLy	v	$-\partial p / \partial y$

Para  $\rho$  e  $\mu$  constantes, a discretização da eq. (8.17) é semelhante às eqs. (8.1) e (7.13).

## 8.5 Discretização da Quantidade de Movimento Linear 2Dp

A integração da eq. (8.17) sobre o volume de controle (VC) P da fig. 8.2 é dada por:

$$\int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \phi) \right] dx dy dz = \int_{y_s}^{y_n} \int_{x_w}^{x_e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S^\phi \right] dx dy dz$$

que resulta em

$$\begin{aligned} & [(\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w] \Delta y + [(\rho v \phi)_n - (\rho v \phi)_s] \Delta x = \\ & = \left[ \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \right] \Delta y + \left[ \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_n - \left( \mu \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_s \right] \Delta x + L[S^\phi]_P \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (8.18)$$

onde  $L[S^\phi]_P$  representa a aproximação numérica de  $S^\phi$  sobre o VC P.

## 8.6 Algoritmo para Quantidade de Movimento Linear 2Dp

- 1- Ler os dados: n° de VC em x e y,  $\rho$ ,  $\mu$ , CC,  $I_v$  (n° de iterações) e  $I_t$  (n° de iterações),  $p(x,y)$
- 2- Inicializar  $u = v = 0$
- 3- Calcular os coeficientes e termos fontes de u
- 4- Resolver o sistema de equações de u com Gauss-Seidel por  $I_v$  vezes
- 5- Calcular os coeficientes e termos fontes de v
- 6- Resolver o sistema de equações de v com Gauss-Seidel por  $I_v$  vezes
- 7- Voltar ao item 3 por  $I_t$  vezes
- 8- Pós-processamento