9. CONDUÇÃO DE CALOR 0Dt e 1Dt

9.1 Modelo Matemático

A partir da equação de conservação da energia térmica, considerando-se:
- problema unidimensional (1D)
- regime transiente (t)
- área (A) de troca de calor constante na direção x
- geração de calor ($\dot{q}$)
- propriedades variáveis (ρ, c, k, $\dot{q}$)

obtém-se

$$c\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{q} \tag{9.1}$$

onde

T = temperatura (ºC ou K), função de x e t
x = direção coordenada espacial (m)
t = coordenada temporal (s)
k = condutividade térmica (W/m.K)
$\dot{q}$ = taxa de geração de calor por volume (W/m^3)
c = calor específico (J/kg.K)
ρ = massa específica (kg/m^3)
A = área de troca de calor na direção x (m^2)
L = comprimento do domínio de cálculo (m)

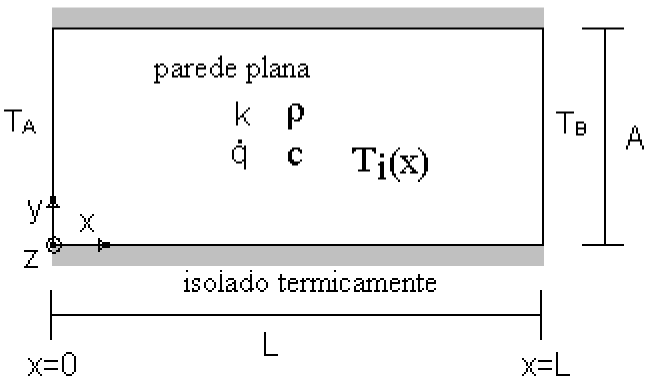

Figura 9.1: Esquema do problema físico

Condições de contorno (C.C.) do tipo Dirichlet:

$$T(0,t) = T_A \tag{9.2}$$

$$T(L,t) = T_B \tag{9.3}$$

onde T_A e T_B são valores conhecidos de T e constantes no tempo. Dependendo do problema, podem variar com t, por exemplo, radiação solar.
Condição inicial (C.I.):

$$T(x,0) = T_i(x) \;\; \text{(função)} \tag{9.4}$$

ou seja, o campo de T em t = 0 é conhecido (é um dado do problema).

9.2 Variáveis de Interesse

1) T(x,t), das eqs.(9.1) a (9.4)

2) média de T em x no instante t, definida por

$$\overline{T}(t) = \frac{1}{L}\int_0^L T(x,t)\,dx \tag{9.5}$$

9.3 Discretização das Equações

Integrando-se a eq.(9.1) sobre o VC P da figura 9.2 e ao longo do tempo, de t a t+Δt, tem-se:

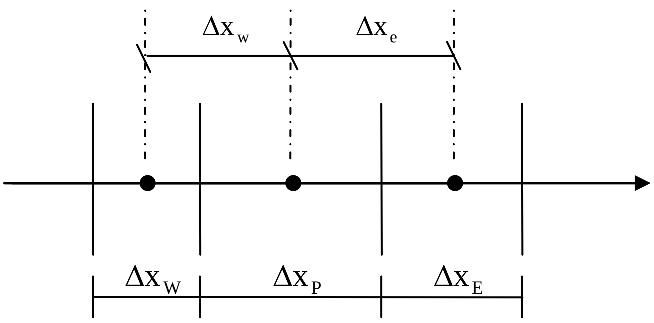

Figura 9.2: Malha 1D não uniforme de nós centrados entre faces

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_{x_w}^{x_e} c\frac{\partial}{\partial t}(\rho T)\,dx\,dt = \underbrace{\int_t^{t+\Delta t}\int_{x_w}^{x_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}\right]dx\,dt}_{\text{já visto no Cap. 2; eq (2.21)}} \tag{9.6}$$

Integrais espaciais:

$$\int_{x_w}^{x_e}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\dot{q}\right]dx \approx k_e\frac{(T_E - T_P)}{\Delta x_e} - k_w\frac{(T_P - T_W)}{\Delta x_w} + \dot{q}_P\Delta x_P \tag{9.7}$$

$$\int_{x_w}^{x_e} c\frac{\partial}{\partial t}(\rho T)\,dx \approx c_P\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho T)\right]_P \Delta x_P \tag{9.8}$$

Na eq. (9.8) está sendo admitido que todos os parâmetros são constantes em cada VC P, da mesma forma que se faz com $\dot{q}$.

Integrais temporais com a formulação totalmente implícita (aproximação numérica): admite-se que todos os parâmetros e T são calculados no tempo t+Δt.

$$\int_t^{t+\Delta t} [eq.(9.7)]dt \approx \left[k_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x_e} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x_w} + \dot{q}_P \Delta x_P \right] \Delta t \tag{9.9}$$

onde k, T e $\dot{q}$ são avaliados em t+Δt (instante de tempo a determinar a solução de T).

$$\int_t^{t+\Delta t} [eq.(9.8)]dt \approx \int_t^{t+\Delta t} c_P \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) \right]_P \Delta x_P dt = c_P \Delta x_P \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho T)_P dt =$$
$$= c_P \Delta x_P \left[(\rho T)_P^{t+\Delta t} - (\rho T)_P^{t} \right] = c_P \Delta x_P \left[\rho_P T_P - \rho_P^0 T_P^0 \right] \tag{9.10}$$

onde c, T e ρ são avaliados em t+Δt, e T° e ρ° são avaliados no instante t (instante de tempo anterior no qual a solução de T é conhecida).

Juntando-se as eqs.(9.9) e (9.10), e dividindo-se o resultado por Δt, chega-se a

$$\frac{c_P \Delta x_P}{\Delta t} \left[\rho_P T_P - \rho_P^0 T_P^0 \right] = \frac{k_e}{\Delta x_e}(T_E - T_P) - \frac{k_w}{\Delta x_w}(T_P - T_W) + \dot{q}_P \Delta x_P \tag{9.11}$$

Com a eq.(9.11) na forma do sistema de equações

$$a_P T_P = a_w T_W + a_e T_E + b_P \tag{9.12}$$

obtém-se

$$\left.\begin{array}{ll} \text{coeficientes (VC reais, P=1 a N)} & \left\{ \begin{array}{l} a_w = \dfrac{k_w}{\Delta x_w} \\ \\ a_e = \dfrac{k_e}{\Delta x_e} \\ \\ a_P = a_w + a_e + \dfrac{c_P \Delta x_P}{\Delta t} \rho_P \end{array} \right. \\ \\ \text{termo fonte} & \left\{ b_P = \dot{q}_P \Delta x_P + \dfrac{c_P \Delta x_P}{\Delta t} \rho_P^o T_P^o \right. \end{array} \right\} \text{volumes reais, P=1 a N} \quad (9.13)$$

A aplicação das CC é idêntica ao que foi visto na seção 2.5, resultando em

$$P = 0: \quad a_P = 1; \quad a_w = 0; \quad a_e = -1; \quad b_P = 2T_A \tag{9.14}$$

$$P = N + 1: \quad a_P = 1; \quad a_w = -1; \quad a_e = 0; \quad b_P = 2T_B \tag{9.15}$$

Com a regra do retângulo na eq. (9.5), obtém-se

$$\overline{T}(t) = \frac{1}{L}\sum_{P=1}^{N}\left(T_P \Delta x_P\right) \tag{9.16}$$

9.4 Algoritmo

Os passos lógicos (algoritmo) para se resolver numericamente o problema definido pelas eqs.(9.1) a (9.5) são:

1- Ler os dados: T_A, T_B, função $k(T)$, função $\dot{q}$(x ou T), função $c(T)$, função ρ(x ou T), função $T_i(x)$, L, N, I (nº de iterações), t_F, M e Δx_P (P = 1 a N), onde

t_F = instante de tempo no qual se deseja T(x) ou parar o avanço em t
M = nº de avanços no tempo entre t = 0 e t = t_F

2- Calcular x_e, x_P e Δx_e para todos os VC P; calcular $\Delta t = t_F/M$ (9.17)

3- Fazer t = 0, $T_P(x_P,t) = T_i(x_P)$ e calcular ρ_P

4- Fazer $t = t + \Delta t$

5- Fazer $T_P = T_P^o$

6- Calcular k_P, $\dot{q}_P$, c_P, ρ_P

7- Calcular k_e

8- Calcular os coeficientes (a_w, a_e, a_P) e termos fontes (b_P)

9- Com o método TDMA, resolver o sistema de equações (9.12), obtendo T_P

10- Voltar ao item 6 até atingir I

11- Obter $\overline{T}(t)$

12- Fazer $T_P^o = T_P$ e $\rho_P^o = \rho_P$

13- Voltar ao item 4 até atingir $t = t_F$

14- Imprimir e visualizar os resultados.

9.5 Condução 0Dt

Para um objeto perdendo calor por convecção (Fig. 9.3), tem-se

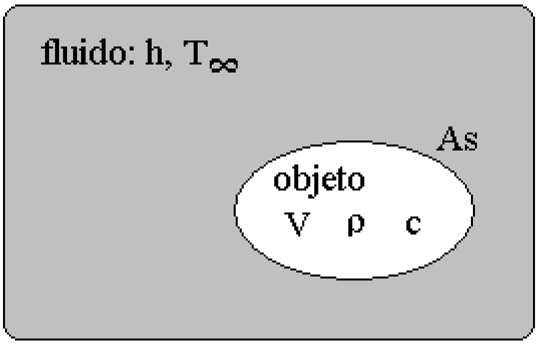

Figura 9.3: Esquema da condução 0Dt

$$\left.\begin{aligned} \rho V c \frac{dT}{dt} &= -hA_s(T - T_\infty) \\ T(0) &= T_i \end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

onde

V = volume do objeto (m^3)

h = coeficiente de convecção ($W/m^2.K$)

A_s = área da superfície do objeto em contato com o fluido a T_∞ (m^2)

T_∞ = temperatura do fluido que envolve o objeto (ºC ou K)

T_i = temperatura inicial do objeto, em $t = 0$ (°C ou K)

c = calor específico (J/kg.K)

ρ = massa específica (kg/m^3)

t = coordenada temporal (s)

O processo é transiente (t) mas não existe condução de calor interna ao objeto, portanto, seu campo de temperaturas (T) é representado por um único valor: um ponto zero-dimensional (0D).

Integrando-se a eq.(9.18) entre os instantes de tempo t e t+Δt, tem-se

$$\int_t^{t+\Delta t} \left(\rho V c \frac{dT}{dt}\right) dt = -\int_t^{t+\Delta t} hA_s(T - T_\infty) dt \tag{9.19}$$

Com a formulação totalmente implícita na eq. (9.19), chega-se a

$$\rho V c\left(T - T^0\right) = -hA_s\left(T - T_\infty\right)\Delta t$$

ou

$$T = \frac{hA_s \Delta t T_\infty + \rho V c T^0}{hA_s \Delta t + \rho V c} \tag{9.20}$$

Como não foi feita nenhuma simplificação entre as eqs. (9.18) e (9.20), todos os parâmetros da eq. (9.20) podem ser variáveis: h, A_s, V, T_∞, c, ρ.