~~8~~ 10

# CAP. ~~8~~ 10 ESCOAMENTO 1D DE FLUIDO INCOMPRESSÍVEL (PROBLEMA DE MOODY) : eqs. da Massa e QML

[ONDE SE LÊ 7 DEVE-SE LER ~~8~~ 10]

ESTE CAPÍTULO ENVOLVERÁ:

- EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA

$$\left.\begin{array}{l} \text{MASSA} \rightarrow p(x) \\ \text{Q.M.L.} \rightarrow u(x) \end{array}\right\} \text{INCÓGNITAS}$$

- PROPRIEDADES CONSTANTES: $\rho, \mu, f$
- FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO UDS E CDS
- VOLUMES FICTÍCIOS
- MALHA UNIFORME
- ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE: SIMPLEC
- SOLVER: TDMA
- TEMPO É USADO COMO ~~COEFICIENTE~~ PARÂMETRO DE RELAXAÇÃO OU PARA OBTER O TRANSIENTE
- SOLUÇÃO SEGREGADA DAS EQUAÇÕES (SEQUENCIAL)
- ARRANJO CO-LOCALIZADO DE VARIÁVEIS

Considerações:
- escoamento laminar ou turbulento através de $f$
- " quase unidimensional (área variável)
- fluido incompressível ($\rho$ constante)
- $u > 0$

## 9
## ~~07~~.1 MODELO MATEMÁTICO

EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA MASSA (MASSA):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A) = 0 \qquad \overset{9}{(\cancel{7}.1)}$$

EQUAÇÃO DE CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR NA DIREÇÃO X (Q.ML):

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u A)}_{\text{termo temporal}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u A u)}_{\text{forças de inércia}} = \underbrace{-A\frac{\partial p}{\partial x}}_{\text{forças devido } p} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu A \frac{\partial u}{\partial x}\right)}_{\text{forças viscosas}} \underbrace{- \frac{\pi}{8} f \rho u^2 D}_{\text{forças devido atrito superficial}} \qquad \overset{9}{(\cancel{7}.2)}$$

onde

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \qquad (7.3)$$

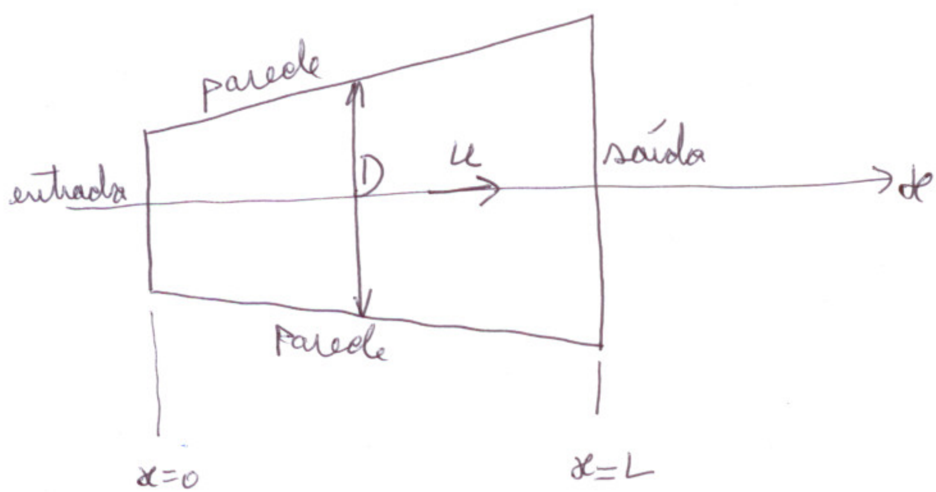



Figura $\overset{9}{7}$.1 Escoamento num duto de área variável.

Nomenclatura:

$x$ = ~~[illegible]~~ coordenada espacial

$t$ = " temporal

$\rho$ = massa específica do fluido

$u$ = velocidade " "

$\mu$ = viscosidade absoluta do fluido

$p$ = pressão estática " "

$A$ = área ~~do~~ local do duto

$D$ = diâmetro local do "

$f$ = fator de atrito de Darcy

CONSTANTES: $\rho$, $\mu$, $f$

Advecção  Difusão e pressão

## 10 ~~7~~.2 DISCRETIZAÇÃO DA Q.ML COM UDS/CDS

A integração da eq. (7.2) sobre o volume de controle P da Fig. 7.2, resulta em

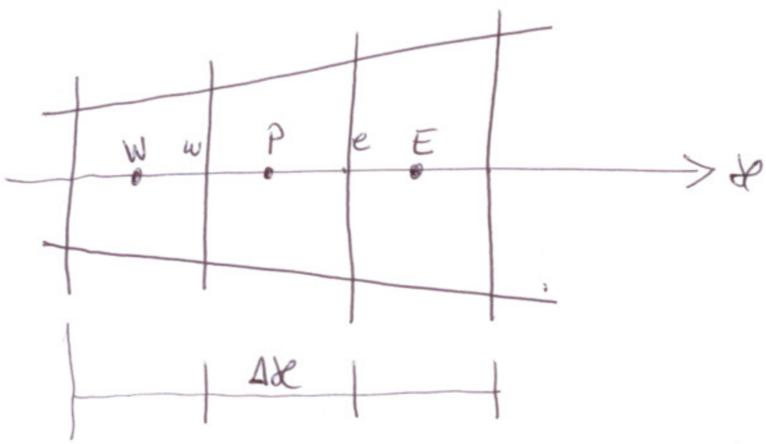



Fig. 7.2 Malha 1D uniforme ($\Delta x = cte$) de área variável.

$$\int_{t-\Delta t}^{t}\int_{x_w}^{x_e}\left[\frac{\partial(\rho u A)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A u)\right]dx\,dt = \int_{t-\Delta t}^{t}\int_{x_w}^{x_e}\left[-A\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu A \frac{\partial u}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left. -\frac{\pi}{8} f \rho u^2 D\right]dx\,dt \qquad (7.4)$$

$$\rho (A)_P (u_P - u_P^o)\Delta x + [(\rho u A)_e u_e - (\rho u A)_w u_w]\Delta t = -A_P (p_e - p_w)\Delta t$$

$$+ \mu \left[\left(A\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e - \left(A\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w\right]\Delta t - \frac{\pi}{8} f \rho u_P^2 D_P \Delta x \Delta t \qquad (7.5)$$

onde $u_P^o$ é avaliado no instante de tempo anterior $(t-\Delta t)$ e $u$ e $p$ em $t$ (formulação tot. implícita).

Dividindo esta eq. por $\Delta t$,

coeficientes — incógnitas desta eq.

$$\frac{M_P}{\Delta t}(u_P - u_P^o) + \dot{M}_e u_e - \dot{M}_w u_w = -A_P(p_e - p_w) + \mu A_e \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e$$

$$- \mu A_w \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w - \frac{\pi}{8} f \rho u_P^2 D_P \Delta x \qquad (7.6)$$

onde

$$M_P = \rho A_P \Delta x \quad \text{(massa do V.C. P)} \ [kg] \qquad (7.7)$$

$$\dot{M}_e = \rho u_e A_e \quad \text{(fluxo de massa na face leste do V.C. P)} \ [kg/s] \qquad (7.8)$$

$$\dot{M}_w = \rho u_w A_w \quad \text{" " " " oeste " " "} \ [\text{"}] \qquad (7.9)$$

<u>Aproximação dos termos viscosos (difusivos) com CDS:</u>

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e \approx \frac{(u_E - u_P)}{\Delta x} \qquad (7.10)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w \approx \frac{(u_P - u_W)}{\Delta x} \qquad (7.11)$$

<u>Aproximação dos termos de pressão com CDS:</u>

$$p_e \approx \frac{(p_P + p_E)}{2} \qquad (7.12)$$

$$p_w \approx \frac{(p_W + p_P)}{2} \qquad (7.13)$$

## Aproximação dos termos de inércia (advectivos) com UDS

para $u > 0$:

$$u_e = u_P \tag{7.14}$$

$$u_w = u_W \tag{7.15}$$

Com as eqs. (7.10) a (7.15) em (7.6), obtém-se

$$\frac{M_P}{\Delta t}(u_P - u_P^o) + \dot{M}_e u_P - \dot{M}_w u_W = -A_P \frac{(p_E - p_W)}{2} + \mu A_e \frac{(u_E - u_P)}{\Delta x}$$

$$- \mu A_w \frac{(u_P - u_W)}{\Delta x} - \frac{\pi}{8} f \rho u_P^2 D_P \Delta x \tag{7.16}$$

$u_P^* u_P$

ou

$$\boxed{a_P^u u_P^* = a_w^u u_W^* + a_e^u u_E^* + b_P^u} \tag{7.17}$$

O asterisco (*), na eq.(7.17), é usado para definir $u^*$ como a velocidade correspondente a um campo de pressão estimado ($p^*$) obtido da QML.

onde

$$a_w^u = \dot{M}_w + \mu \frac{A_w}{\Delta x} \tag{7.18}$$

$$a_e^u = \mu \frac{A_e}{\Delta x} \tag{7.19}$$

$$a_P^u = \cancel{\frac{M_P}{\Delta t}} + a_w^u + a_e^u + a_f^u + a_t^u \tag{7.20}$$

$$b_P^u = b_t^u + b_p^u \tag{7.21}$$

e

$$a_t^u = \frac{M_P}{\Delta t} \tag{7.22}$$

$$a_f^u = \frac{\pi}{8} f \rho u_P^* D_P \Delta x \tag{7.23}$$

$$b_t^u = \frac{M_P}{\Delta t} u_P^0 \qquad (7.24)$$

$$b_P^u = -A_P \frac{(p_E^* - p_W^*)}{2} \qquad (7.25)$$

As eqs. (7.18) a (7.25) valem para os volumes de controle reais, $P = 2, 3, \ldots N-1$; $N$ = nº total de volumes de controle, incluindo 2 fictícios.

C.C. na entrada: $u_{in}$ prescrito (volume fictício, $P=1$) ou ~~$u_P = U_{in}$~~

$$\frac{u_P + u_E}{2} = U_{in} \text{ (veloc. conhecida)} \qquad (7.26)$$

$$u_P = -u_E + 2U_{in} \qquad (7.27)$$

ou

$$a_P^u = 1,\ a_w^u = 0,\ b_P^u = 2U_{in} \text{ (velocidade conhecida)} \qquad (9.27b)$$

~~para que~~ $a_e^u = -1$

A C.C. ~~matematicamente~~ é: $u(0) = U_{in}$ (9.27c)

C.C. na saída: extrapolação linear (volume fictício, $P=N$)

$$u_P = u_W + (u_W - u_{WW}) \quad \text{(para malha uniforme)} \qquad (7.28)$$

ou

$$a_P^u = a_w^u = 1,\ a_e^u = 0,\ b_P^u = u_W - u_{WW} \qquad (7.29a)$$

A C.C. é: ~~natural~~ $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_L = 0$ (9.29b)

## $\boxed{\text{7.3 DISCRETIZAÇÃO DA MASSA}}$

A integração da eq. (7.1) sobre o V.C. P da Fig. 7.2 resulta em

$$\int_{t-\Delta t}^{t} \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u A)\right] dx\, dt = 0 \qquad (7.30)$$

$$\underbrace{[(\rho A_P) - (\rho A_P)^0]\Delta x}_{\text{zero pois } \rho \text{ e } A \text{ não variam no tempo}} + [(\rho u A)_e - (\rho u A)_w]\Delta t = 0 \qquad (7.31)$$

ou

$$\dot{M}_e - \dot{M}_w = 0 \qquad (7.32)$$

ou, ainda, $\cancel{\rho} u_e A_e - \cancel{\rho} u_w A_w = 0$, pois $\rho$ é constante

$$u_e A_e - u_w A_w = 0 \qquad (7.33)$$

**A prescrição das velocidades nas faces com o método de acoplamento pressão-velocidade chamado SIMPLEC:**

$$u_e = u_e^* - d_e (p_E' - p_P') \qquad (7.34)$$

$$u_w = u_w^* - d_w (p_P' - p_W') \qquad (7.35)$$

onde

$$p_P' = p_P - p_P^* \quad \text{(correção da pressão)} \qquad (7.36)$$

$d_e$ e $d_w$ são coeficientes do método SIMPLEC (a ~~dedução~~ obter)

$u^*$ é a velocidade resultante da Q.ML (satisfaz a Q.ML)

$p^*$ é a pressão usada na Q.ML

$u$ é a velocidade resultante da MASSA (satisfaz a MASSA)

$p$ é a pressão que satisfaz a MASSA

Com as eqs. (7.34) e (7.35) em (7.33), chega-se a

$$\left[u_e^* - d_e (p_E' - p_P')\right] A_e - \left[u_w^* - d_w (p_P' - p_W')\right] A_w = 0 \qquad (7.37)$$

ou

$$\boxed{a_P^p p_P' = a_w^p p_W' + a_e^p p_E' + b_P^p} \qquad (7.38)$$

onde

$$a_w^p = d_w A_w \qquad (7.39)$$

$$a_e^p = d_e A_e \qquad (7.40)$$

$$a_P^p = a_w^p + a_e^p \qquad (7.41)$$

$$b_P^p = u_w^* A_w - u_e^* A_e \quad \text{(própria cons. da massa)} \qquad (7.42)$$

[Idealmente, $b_P^p \to 0$ p/ nº iterações $\to \infty$]

As Eqs. (7.39) a (7.42) valem p/ os volumes de controle reais, $P = 2, 3, \ldots N-1$.

Para usar o TDMA na solução da eq. (7.38), é necessário aplicar as C.C. de $p'$ explicitamente. Isso é feito em dois passos:

Primeiro (antes de resolver o sistema de $p'$)

C.C. nos volumes $P=1$ e $P=N$:

$$a_P^p = 1, \quad a_w^p = a_e^p = b_P^p = 0 \qquad (7.43)$$

→ só para o processo iterativo não divergir com o TDMA.

Segundo (depois de resolver o sistema de $p'$)

C.C. de extrapolação linear para os dois volumes de controle fictícios.
(são as C.C. realmente desejadas)

$$P=1: \quad p'_P = 2p'_E - p'_{EE} \qquad (7.44)$$

$$P=N: \quad p'_P = 2p'_W - p'_{WW} \qquad (7.45)$$

## 7.4 ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE COM O MÉTODO SIMPLEC

Objetivo de um método de acoplamento pressão-velocidade: transformar a eq. de conservação da massa numa equação para a pressão. Há várias formas para se fazer isso. A seguir, apresenta-se um procedimento geral aplicado ao método SIMPLEC.

A Eq. (7.17) pode ser reescrita como

$$a_P^u u_P = a_w^u u_W + a_e^u u_E + b_t^u - A_P \frac{(p_E - p_W)}{2} \qquad (7.46)$$

Esta eq. resulta da discretização da Q.ML. Ao obter a sua solução, o objetivo é que $u$ satisfaça tanto a Q.ML quanto a MASSA. Vamos supor que este seja o caso da Eq. (7.46). E vamos escrever novamente esta eq. para um campo estimado de pressão ($p^*$), que não satisfaz a MASSA, mas cuja solução ($u^*$) ~~satisfaz~~ satisfaz a Q.ML:

$$a_P^u u_P^* = a_w^u u_W^* + a_e u_E^* + b_t^u - A_P \frac{(p_E^* - p_W^*)}{2} \qquad (7.47)$$

Subtraindo esta eq. da eq. (7.46), chega-se a
[fazer os passos]

$$a_P^u u_P' = a_w^u u_W' + a_e u_E' - A_P \frac{(p_E' - p_W')}{2} \qquad (7.48)$$

onde

$$u_P' = u_P - u_P^* \qquad (7.49)$$

e $p_W'$ e $p_E'$ seguem a Eq. (7.36).

O método SIMPLEC consiste em admitir que

$$u_W' = u_E' = u_P' \qquad (7.50)$$

Com isso, a eq. (7.48) resulta em
[fazer os passos]

$$(a_P^u - a_w^u - a_e^u)\, u_P' = - A_P \frac{(p_E' - p_W')}{2}$$

ou

$$\boxed{u_P = u_P^* - d_P \frac{(p_E' - p_W')}{2}} \qquad (7.51)$$

[P = 2, 3, ... N-1]

onde

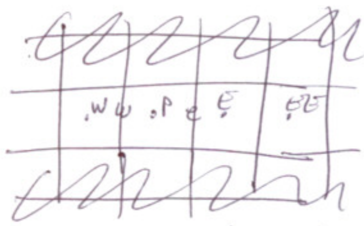
$$\boxed{d_P = \frac{A_P}{(a_P^u - a_W^u - a_E^u)}} \qquad [P = 2, 3, \ldots N-1] \qquad (7.52)$$

e ~~onde~~ $d_P$ é o coeficiente do método SIMPLEC para o V.C. P.

## 7.5 CÁLCULO DAS VELOCIDADES NAS FACES ~~INTERNAS~~ ~~DOS VOLUMES DE CONTROLE~~

As velocidades $u_e$ e $u_w$ que aparecem nos coeficientes e fontes da Q.ML e da MASSA ~~são obtidas~~, relacionadas a fluxos de massa ou vazões, são obtidas através de um cálculo direto, ~~que se baseia em uma média aritmética da Q.M., conforme segue exceto o termo de pressão~~.

Reescrevendo a eq. (7.17), para o ~~volume~~ V.C. P:




~~$a_P^u u_P = \Sigma_P^u + b_P^u$~~

$$(a_P^u)_P u_P^* = \underbrace{(a_W^u)_P u_W^* + (a_E^u)_P u_E^*}_{\Sigma_P^u} + \frac{(M_P)}{\Delta t} u_P^o - A_P \frac{(p_E^* - p_W^*)}{2} + S_P \qquad (7.53)$$

outros termos fontes

e para o ~~volume~~ V.C. E:

$$(a_P^u)_E u_E^* = \underbrace{(a_W^u)_E u_P^* + (a_E^u)_E u_{EE}^*}_{\Sigma_E^u} + \frac{M_E u_E^o}{\Delta t} - A_E \frac{(p_{EE}^* - p_P^*)}{2} + S_E \qquad (7.54)$$

A velocidade na face leste do V.C. P, $u_e$, é obtida ~~pela~~ através de uma espécie de média ~~aritmética~~ das eqs. (7.53) e (7.54), exceto no termo de pressão, resultando em

$$\frac{[(a_P^u)_P + (a_P^u)_E]}{2} u_e^* = \frac{(\Sigma_P^u + \Sigma_E^u)}{2} + \frac{(M_P + M_E)}{2\Delta t} u_e^o - \underbrace{A_e (p_E^* - p_P^*)}_{A_e \left(\frac{dp}{dx}\right)_e \Delta x} + \frac{(S_P + S_E)}{2} \qquad (7.55)$$

ou

$$\boxed{u_e^* = \frac{\left[\Sigma_P^u + \Sigma_E^u + \frac{(M_P + M_E)}{\Delta t} u_e^o + S_P + S_E - 2A_e (p_E^* - p_P^*)\right]}{[(a_P^u)_P + (a_P^u)_E]}} \qquad (7.56)$$

$[P = 2, 3, \ldots N-2]$

onde $S_P$ envolve outros termos fontes que não aparecem explicitamente na eq. (7.56).

A Eq. (7.34), para $u_e$, pode ser deduzida de forma semelhante à que foi feita p/ obter a Eq. (7.51).

Uma forma simples e efetiva de calcular o coeficiente ($d_e$) do método SIMPLEC para as velocidades das faces ($u_e$) é

$$d_e = \frac{(d_P + d_E)}{2} \qquad [P = 2, 3, \ldots N-2] \qquad (7.57)$$

e nos contornos,

para $\dot{M}$ nos contornos

$$(d_e)_{P=1} = d_E \qquad \cancel{(P \neq 1)} \qquad (7.58)$$

$$(d_e)_{P=N-1} = d_P \qquad (7.59)$$

Para o problema em consideração, nos contornos, $u_e^*$ pode ~~pode~~ ser calculado com

$$P=1: \quad u_e^* = U_{in} \; (C.C.) \qquad (7.60)$$

$$P=N-1: \quad u_e^* = \frac{(u_P^* + u_E^*)}{2} \qquad (7.61)$$

$$Fat = \frac{\dot{M}_{in}}{\dot{M}_{out}} = \frac{\rho U_{in} A_{in}}{\rho u_e^* A_{out}} = \frac{U_{in} A_{in}}{u_e^* A_{out}} \qquad (7.62)$$

$$u_e^* = Fat \cdot u_e^* \qquad (7.63)$$

(Isso acelera a convergência e pode ser aplicado em 2D e 3D)

OBS.: ~~$d$~~ $(d_w)_P = (d_e)_W$ (7.57b)

# 7.6 ALGORITMO

① LER OS DADOS: $N,\ \Delta t,\ \underset{\text{nº iterações}}{I},\ L,\ \mu,\ \rho,\ \cancel{D(x)},\ f,\ U_{in},\ \overbrace{D_0,\ C_D}^{p/D(x)}$

② INICIALIZAÇÕES:

$$\Delta x = \frac{L}{N-2} \qquad (7.64)$$

$$x_P = (P-2)\Delta x + \frac{\Delta x}{2} \qquad [P = 2, 3, \dots N-1] \qquad (7.65)$$

$$x_1 = 0 \qquad (7.66)$$

$$x_N = L \qquad (7.67)$$

$$x_e = x_P + \frac{\Delta x}{2} \qquad [P = 2, 3, \dots N-1] \qquad (7.67b)$$

$$D_P = D_0 + C_D x_P \qquad [P = 1, 2, \dots N] \qquad (7.68)$$

$$D_e = D_0 + C_D x_e \qquad [P = 2, 3, \dots N-1] \qquad (7.68b)$$

$$p_P = p'_P = u_P = u_P^0 = u_e = u_e^0 = 0 \qquad (7.69)$$

$$A_P = \frac{\pi}{4} D_P^2 \qquad (7.68c)$$

$$A_e = \frac{\pi}{4} D_e^2 \qquad (7.68d)$$

③ CALCULAR OS COEFICIENTES E FONTES DE $u_P^*$ (Q.M.L) COM AS EQS. (7.18) A (7.25), E (7.27b) E (7.29a)

④ RESOLVER O SISTEMA DA EQ. (7.17) PARA $u_P^*$ (Q.M.L) COM O TDMA

⑤ CALCULAR AS VELOCIDADES NAS FACES ($u_e^*$) COM AS EQS. (7.56), (7.60) E (7.63)

⑥ CALCULAR OS COEFICIENTES DO SIMPLEC ($d_P$ E $d_e$) COM AS EQS. (7.52) E (7.57) A (7.59).

⑦ CALCULAR OS COEFICIENTES E FONTES DE $p'_P$ (MASSA) COM AS EQS. (7.39) A (7.43) ~~E (7.43)~~.

⑧ RESOLVER O SISTEMA DA EQ. (7.38) PARA $p'_P$ (MASSA) COM O TDMA

⑨ ATUALIZAR OS FICTÍCIOS DE $p'$ COM AS EQS. (7.44) E (7.45)

⑨B CORRIGIR A PRESSÃO ($p^*_P$) COM $p'_P$ ATRAVÉS DE ~~EQ.~~

obter $p_P$ AO

$$p_P = p^*_P + p'_P \qquad [P = 1, 2, \ldots N] \qquad (7.70)$$

⑩ OBTER $u_P$ AO CORRIGIR AS VELOCIDADES NODAIS $u^*_P$ COM $p'_P$ ATRAVÉS DAS EQS (7.51), (7.~~27~~ 7a) E (7.2~~7~~)

⑪ OBTER $u_e$ AO CORRIGIR AS VELOCIDADES DAS FACES ($u^*_e$) COM $p'_P$ ATRAVÉS DA~~S~~ EQ~~S~~. (7.~~34~~), só $P = 2, \ldots N-2$; para $u_e(1)$, não e $u_e(N-1)$ ~~EQ.~~

⑫ ATUALIZAR OS CAMPOS PARA NOVO AVANÇO NO TEMPO:

$$u^o_P = u_P \qquad (7.71)$$

$$u^o_e = u_e \qquad (7.72)$$

⑬ VOLTAR AO ~~ITEM~~ PASSO ③ ATÉ ATINGIR I OU SATISFAZER ALGUM CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA~~S~~

⑭ ESCREVER OS CAMPOS DE $u_P$, $u_e$, $p_P$, $\dot{M}_e$, $p'_P$, $b^P_P$

⑮ VISUALIZAR OS CAMPOS DE $u_P$, $p_P$ E $\dot{M}_e$

OBS.: É COMUM FAZER 2 OU 3 ITERAÇÕES NO CICLO COMPREENDIDO ENTRE OS PASSOS ⑦ E ⑪ PARA ACELERAR OU GARANTIR A CONVERGÊNCIA DO PROCESSO ITERATIVO

ciclo = 3 a 11, p/ solução transiente, deve satisfazer o critério de convergência

## 9.7 CDS COM CORREÇÃO ADIADA

Para ~~avaliar~~ usar o esquema CDS no termo advectivo da QML, através de correção adiada, basta reescrever a Eq. (9.21) como

$$b_P^u = b_t^u + b_p^u + b_C^u \tag{9.73}$$

onde

$$b_C^u = \frac{\beta}{2}\left[\dot{M}_e\left(u_P^* - u_E^*\right) - \dot{M}_w\left(u_W^* - u_P^*\right)\right] \tag{9.74}$$

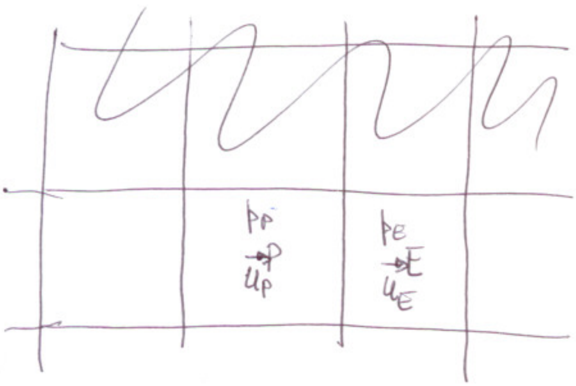
e

$$\beta = \begin{cases} 0 \rightarrow \text{UDS} \\ > 0 \text{ e } < 1, \text{ misto} \\ 1 \rightarrow \text{CDS} \end{cases} \tag{9.75}$$

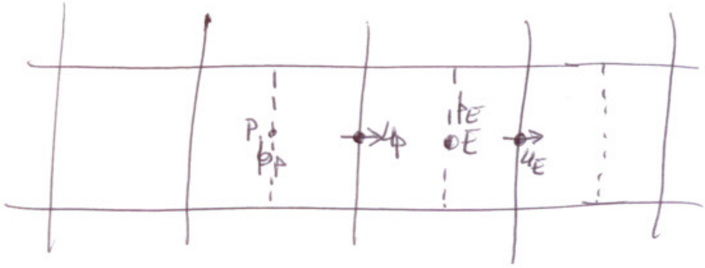
E na Eq. (9.56), deve-se considerar $S_P = \left(b_C^u\right)_P$ (9.76)

e $S_E = \left(b_C^u\right)_E$ (9.77)

[COMENTAR ARRANJO CO-LOC. X DESENC.]




CO-LOCALIZADO 1D
(Nesta disciplina)




DESENCONTRADO 1D
(Ver Patankar e Maliska)