MACH2D 5.5 MODELO MATEMÁTICO (1) 11 AGO 06

MODELO FÍSICO

- FLUIDO:
  - * COMPRESSÍVEL
  - * CONTÍNUO
  - * $\boxed{\text{INVÍSCIDO } (\mu=0)}$
  - * GÁS PERFEITO TERMICAMENTE
  - * SEM RADIAÇÃO TÉRMICA
  - * PROPRIEDADES CONSTANTES: R
  - * " VARIÁVEIS: c_p, γ
  - ~~* CALOR SEM TROCA DE CALOR COM AS PAREDES?~~
  - * ADIABÁTICO ($k=0$)

ESCOAMENTO

- ESTADO PERMANENTE
- BIDIMENSIONAL PLANO OU AXISSIMÉTRICO
- ~~INTERNO~~
- NÃO-REATIVO

~~TUBEIRA~~

~~1. CIRCULAR~~

Tubeira

- C. I. p/ tubeira circular
- parede adiabática

- sem radiação térmica

MODELO MATEMÁTICO PLANO

EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO DA

MASSA:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

QML x:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

QML y:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

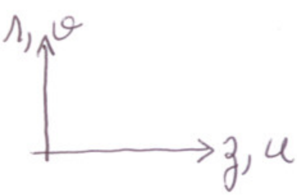
COM BASE EM BIRD, STEWART e LIGHTFOOT (1960)

ENERGIA:

$$c_p\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v T)\right] = \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}$$

COM BASE EM BEJAN (1995)

MODELO MATEMÁTICO AXISSIMÉTRICO



MASSA:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u) = 0$$

QML z:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

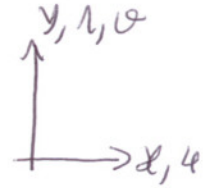
QML r:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u v) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \rho v v) = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

ENERGIA:

$$c_p\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u T) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \rho v T)\right] = \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial z} + v\frac{\partial p}{\partial r}$$

MODELO MATEMÁTICO GERAL (PLANO OU AXISSIMÉTRICO)



MASSA: $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(r \rho v) = 0$$

QML x: $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(r \rho v u) = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

QML y: $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(r \rho v v) = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

ENERGIA: $$c_p\left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u T) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial y}(r \rho v T)\right] = \frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}$$

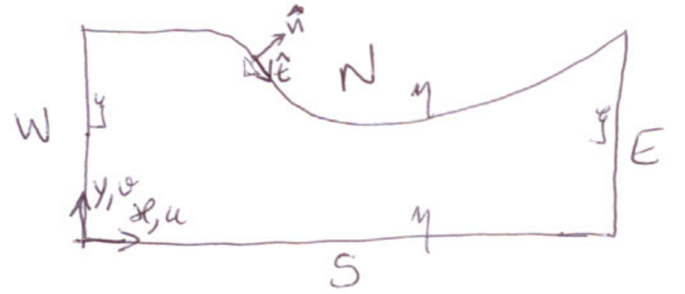
ESTADO: $p = \rho R T$

INCÓGNITAS: ρ, u, v, T, p

GEOMETRIA PLANA: $r = 1$

GEOMETRIA AXISSIMÉTRICA: $r = y =$ RAIO

CONDIÇÕES DE CONTORNO — ESCOAMENTO LAMINAR



Em todos os 4 contornos:

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

CONTORNO OESTE (W)

- ENTRADA SUBSÔNICA ($x = 0$)
- $v = 0$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (extrapolação linear)
- $T = T(T_0, \gamma_0, M)$ } prescrito
- $p = p(p_0, \gamma_0, M)$ }

$T_0 = T$ na estagnação da câmara
$p_0 = p$ " " " "
$\gamma_0 =$ razão de calores específicos na est. da cam.
$M =$ nº de Mach na entrada

CONTORNO LESTE (E)

- SAÍDA SUPERSÔNICA ($x = cte$)
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$
(extrapolação linear)

CONTORNO SUL (S)

- LINHA DE SIMETRIA ($y = 0$)
- $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = \frac{\partial T}{\partial y} = \cancel{\frac{\partial p}{\partial y}}$ (adiabático)
- $v = 0$ (impermeável)
- $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

CONTORNO NORTE (N) - ex

- PAREDE IMPERMEÁVEL (y variável)
- $u = v = 0$ (não escorregamento)
- $\frac{\partial p}{\partial \vec{n}} = 0$
- $T = T_{wall}$ (T prescrito)
ou
- $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$ (adiabático)

ALTERAÇÕES PARA ESCOAMENTO INVÍSCIDO - EULER

CONTORNO NORTE (N)

- $\frac{\partial \vec{V}_t}{\partial \vec{n}} = 0$ (escorregamento)

$v_t =$ componente de $\vec{V}$ tangencial ao contorno
$v_n =$ " " " normal " "

- $\vec{V}_n = 0$ (impermeabilidade)
- $\frac{\partial T}{\partial \vec{n}} = 0$ (adiabático)

MODELO MATEMÁTICO GERAL EM ξ-η

BASE: MINHAS DEDUÇÕES DE DEZ/88

MASSA: $$\frac{1}{J}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi}(r\rho U) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \eta}(r\rho V) = 0$$

ONDE

$$U = u\, y_\eta - v\, x_\eta$$

$$V = v\, x_\xi - u\, y_\xi$$

$$J = |x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta|^{-1}$$

QML x: $$\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi}(r\rho U u) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \eta}(r\rho V u) = \frac{\partial}{\partial \eta}(p\, y_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi}(p\, y_\eta)$$

QML y: $$\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \xi}(r\rho U v) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \eta}(r\rho V v) = \frac{\partial}{\partial \xi}(p\, x_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta}(p\, x_\xi)$$

ENERGIA: $$\frac{c_p}{J}\frac{\partial}{\partial t}(\rho T) + \frac{c_p}{r}\frac{\partial}{\partial \xi}(r\rho U T) + \frac{c_p}{r}\frac{\partial}{\partial \eta}(r\rho V T) = \frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial t} + u\left[\frac{\partial}{\partial \xi}(p\, y_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta}(p\, y_\xi)\right]$$
$$+ v\left[\frac{\partial}{\partial \eta}(p\, x_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi}(p\, x_\eta)\right]$$

ESTADO: $p = \rho R T$

INCÓGNITAS: ρ, u, v, T, p

GEOMETRIA PLANA: $r = 1$

GEOMETRIA AXISSIMÉTRICA: $r = y =$ raio

MODELO MATEMÁTICO GERAL EM ξ-η

$$\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{1}{r^a}\frac{\partial}{\partial \xi}(r^a\rho U\phi) + \frac{1}{r^a}\frac{\partial}{\partial \eta}(r^a\rho V\phi) = S^{\phi}$$

EQUAÇÃO	ϕ	S^{ϕ}
MASSA	1	0
QMLX	u	$\frac{\partial}{\partial \eta}(p y_\xi) - \frac{\partial}{\partial \xi}(p y_\eta) = y_\xi \frac{\partial p}{\partial \eta} - y_\eta \frac{\partial p}{\partial \xi}$
QMLY	v	$\frac{\partial}{\partial \xi}(p x_\eta) - \frac{\partial}{\partial \eta}(p x_\xi) = x_\eta \frac{\partial p}{\partial \xi} - x_\xi \frac{\partial p}{\partial \eta}$
ENERGIA	T	$\frac{1}{c_p J}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{u}{c_p}S^u - \frac{v}{c_p}S^v = \frac{1}{c_p}\left(\frac{1}{J}\frac{\partial p}{\partial t} - u S^u - v S^v\right)$

$$M = \frac{\|\vec{V}\|}{\sqrt{\gamma R T}} \quad \text{(nº DE MACH)}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{u^2 + v^2}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_p - R}$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)}$$

ESTADO: $p = \rho R T$

INCÓGNITAS: u, v, p, T, ρ

$$a = \begin{cases} 0, & \text{para geometria plana} \\ 1, & \text{" \quad " axissimétrica} \end{cases}$$

VARIÁVEIS DE INTERESSE

COEFICIENTE DE DESCARGA (C_d): eficiência do convergente

$$C_d = \frac{\dot{M}_n}{\dot{M}_a} \qquad \text{(adimensional)}$$

$\dot{M}_n$ = FLUXO DE MASSA NUMÉRICO DO MACH2D 5.5
$\dot{M}_a$ = " " " ANALÍTICO Q1D

VELOCIDADE CARACTERÍSTICA (C^*): eficiência do propelente e da combustão

$$C^* = \frac{F_0}{\dot{M}} \qquad (m/s)$$

onde

$$F_0 = p_0 A_g$$ (empuxo de referência, ou padrão; empuxo sem tubeira no vácuo)

$$C_a^* = \frac{F_0}{\dot{M}_a} \qquad (C^* \text{ analítico})$$

$$C_n^* = \frac{F_0}{\dot{M}_n} \qquad (C^* \text{ numérico})$$

p_0 = pressão de estagnação; A_g = área da garganta da tubeira

---

$$\dot{M}_n = 2\pi \int_0^r \rho u r \, dr \qquad (kg/s)$$

→ é constante para cada tubeira, não varia com x

onde
r = raio local
ρ = massa específica local
u = velocidade local na direção x, para malha com linhas verticais

MACH2D 5.5 MOD. MAT. 14 29 AGO 06

EMPUXO DE PRESSÃO (F_p)

$$F_p\Big|_{2D} = (p_e - p_a)\,A_e \qquad (N)$$

onde p_e = pressão na saída, se constante com r

p_a = " ambiente (considerar nula para vácuo, e 101325 Pa para o nível do mar)

A_e = área da saída da tubeira

Caso geral:

$$F_p = 2\pi \int_0^r (p - p_a)\, r\, dr \qquad (N)$$

onde p = pressão local para um x constante, variável com r

F_p = função de x

EMPUXO DINÂMICO (F_d)

$$F_d = 2\pi \int_0^r \rho u^2 r\, dr \qquad (N)$$

→ varia com x

$$F_d\Big|_{1D} = \dot{m} u \qquad (N)$$

EMPUXO TOTAL (F)

$$F = F_d + F_p \qquad (N)$$

29/30 AGO 06

VELOCIDADE DE EXAUSTÃO EFETIVA (C)

$$C = \frac{F}{\dot{M}} \qquad (m/s)$$

COEFICIENTE DE EMPUXO (C_F): eficiência da tubeira (expansão)

$$C_F = \frac{F}{F_0} \qquad (\text{adimensional})$$

IMPULSO ESPECÍFICO (I_s): eficiência global do motor

$$I_s = \frac{C}{g} = \frac{F}{\dot{M} g} \qquad (s)$$

onde g = aceleração gravitacional ao nível do mar $= 9.80665 \ m/s^2$

KLIEGEL e LEVINE

$$C_d = 1 - \frac{(\gamma+1)}{(1+R)^2}\left[\frac{1}{96} - \frac{(8\gamma-27)}{2304(1+R)} + \frac{(754\gamma^2-757\gamma+3633)}{276480(1+R)^2}\right]$$

onde γ = razão dos calores específicos

$$R = \frac{\text{raio de curvatura na garganta}}{\text{raio da garganta}} = \frac{R_g}{r_g}$$

$$R_g = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)_g^2\right]^{3/2}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_g}$$