

2.1. MODELO MATEMÁTICO

EDUAÇÃO GERAL DA DIFUSÃO DE CALOR (COORDENADAS CARTESIANAS):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.1)$$

HIPÓTESES SIMPLIFICADORAS:

- REGIME PERMANENTE;
- MODELO UNIDIMENSIONAL;
- ÁREA DE SEÇÃO TRANSVERSAL CONSTANTE NA DIREÇÃO x .

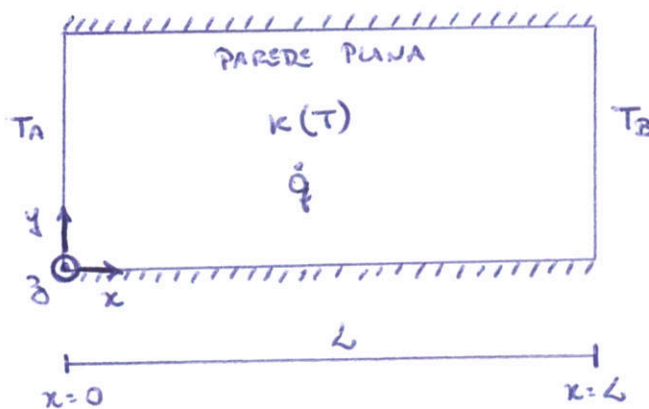
OBTÉM-SE, NESSE CASO, A SEGUINTE EQUAÇÃO:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0 \quad (2.2)$$

QUE SE CONSTITUI EM UMA EQUAÇÃO DO TIPO POISSON. CONSIDERANDO-SE, ENTÃO, CONDIÇÕES DE CONTORNO (C.C) DE DIRICHLET:

$$\begin{cases} T(0) = T_A & (2.3) \\ T(L) = T_B & (2.4) \end{cases}$$

(VALORES CONHECIDOS DA TEMPERATURA NOS CONTORNOS)



EXEMPLO: CONDUTOR ELÉTRICO
(EFEITO JOULS, \dot{q})

FIG. 2.1: CONDUÇÃO (DIFUSÃO) DE CALOR EM UMA PAREDE PLANA

ONDE: T É A TEMPERATURA [$^{\circ}\text{C}$ OU K]

k É A CONDUTIVIDADE TÉRMICA [W/mK]

\dot{q} É A TAXA VOLUMÉTRICA DE GERAÇÃO DE CALOR $[W/m^3]$

(2)

A É A ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL DA PAREDE $[m^2]$, CONSTANTE EM x .

2.2. VARIÁVEIS DE INTERESSE:

- CAMPO DE TEMPERATURAS, $T(x)$, DA EQ. (2.2).

- TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR (q) NOS CONTOURNOS (DA LEI DE FOURIER)

$$q|_{x=0} = q_0 = - \left[k A \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \right]_{x=0} = - A \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (2.6)$$

$$q|_{x=L} = q_L = - A \left[k \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=L} \quad (2.7)$$

- TEMPERATURA MÉDIA (\bar{T}) DO DOMÍNIO, DEFINIDA POR:

$$\bar{T} = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx \quad (2.8)$$

2.3. DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO GOVERNANTE:

CONSIDERANDO-SE O SEGUINTE VOLUME DE CONTROLE P E SEUS VIZINHOS, MOSTRADO:

NA FIG. 2.2:

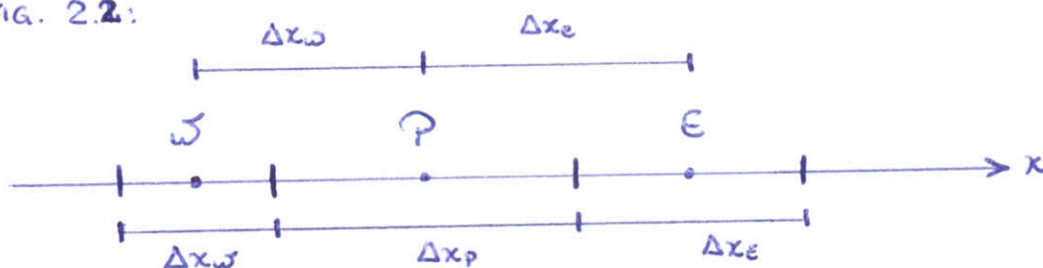


FIG. 2.2: MALHA UNIDIMENSIONAL NÃO-UNIFORME DE NÓS CENTRADOS ENTRE FACES.

E INTEGRANDO-SE A EQ. (2.2) OBTÉM-SE:

$$\int_3 \int_y \int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} \right] dx dy dz = 0 \quad (2.9)$$

RESULTANDO EM:

$$\left[k \frac{dT}{dx} \right]_e - \left[k \frac{dT}{dx} \right]_w + \dot{q}_P \Delta x_P \Delta y \Delta z = 0 \quad (2.10)$$

ONDE SE OBSERVA QUE O VALOR DE \dot{q} É AVALIADO NO NÓ P, SENDO CONSIDERADO

UM VALOR MÉDIO REPRESENTATIVO (E CONSTANTES) NO VOLUME DE CONTROLE P.

(3)

OS TERMOS ENTRE PARÊNTESES DA EQ. (2.10) DEVEM SER APROXIMADOS UTILIZANDO-SE UMA FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO ADEQUADA. CONSIDERANDO-SE, ENTÃO, UMA SÉRIE DE TAYLOR EM QUE T_p SEJA EXPANDIDA AO REDOR DE T_e , TEM-SE:

$$T_p = T_e + \left. \frac{dT}{dx} \right|_e \left(\frac{x_p - x_e}{2} \right) + \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_e \left(\frac{x_p - x_e}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \left(\frac{x_p - x_e}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots \quad (2.11)$$

OU SEJA,

$$T_p = T_e + \left. \frac{dT}{dx} \right|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right) + \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots \quad (2.12)$$

SEJA TAMBÉM UMA SÉRIE DE TAYLOR EM QUE T_e SEJA EXPANDIDA AO REDOR DE T_e , TEM-SE:

$$T_e = T_e + \left. \frac{dT}{dx} \right|_e \left(\frac{x_e - x_e}{2} \right) + \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_e \left(\frac{x_e - x_e}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \left(\frac{x_e - x_e}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots \quad (2.13)$$

OU SEJA,

$$T_e = T_e + \left. \frac{dT}{dx} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right) + \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{2!} + \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + \dots \quad (2.14)$$

SUBTRAINDO-SE, ENTÃO, A EQ. (2.12) DA EQ. (2.14), OBTÉM-SE:

$$T_e - T_p = \left. \frac{dT}{dx} \right|_e \Delta x_e + 2 \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right)^3 \cdot \frac{1}{3!} + 2 \left. \frac{d^5T}{dx^5} \right|_e \left(\frac{\Delta x_e}{2} \right)^5 \cdot \frac{1}{5!} + \dots \quad (2.15)$$

ISOLANDO-SE $\left. \frac{dT}{dx} \right|_e$, OBTÉM-SE:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_e = \frac{T_e - T_p}{\Delta x_e} - 2 \left. \frac{d^3T}{dx^3} \right|_e \frac{(\Delta x_e)^2}{2^3 \cdot 3!} - 2 \left. \frac{d^5T}{dx^5} \right|_e \frac{(\Delta x_e)^4}{2^5 \cdot 5!} - \dots \quad (2.16)$$

CONSIDERANDO-SE, ENTÃO, APENAS O PRIMEIRO TERMO DA EXPANSÃO DADA PELA EQ.

(2.16), TEM-SE

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_e \approx \frac{T_e - T_p}{\Delta x_e} \quad (2.17)$$

A EXPRESSÃO DADA PELA EQ. (2.17) PODE SER INTERPRETADA COMO SENDO A INTERPOLA-

ÇÃO LINEAR ENTRE OS NÓS P E E, CONFORME A FIG. 2.3:

(4)

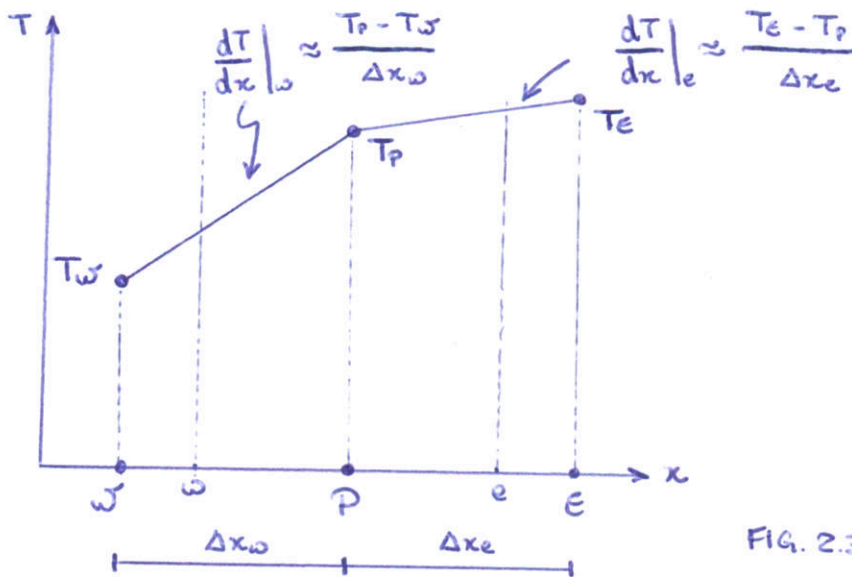


FIG. 2.3: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DAS APROXIMAÇÕES CDS.

ANALOGAMENTE, PARA A FACE W, OBTÉM-SE:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_w \approx \frac{T_p - T_w}{\Delta x_w} \quad (2.18)$$

AS EXPRESSÕES DADAS PELAS EDS. (2.17) E (2.18) SÃO APROXIMAÇÕES CONHECIDAS COMO FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO CDS ("CENTRAL DIFFERENCING SCHEME") OU DIFERENÇAS CENTRAIS.

OBSERVA-SE QUE, DESSE MODO,

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e \approx k_e \frac{T_e - T_p}{\Delta x_e} \quad (2.19)$$

$$\text{e} \quad \left(k \frac{dT}{dx} \right)_w \approx k_w \frac{T_p - T_w}{\Delta x_w} \quad (2.20)$$

NOTA-SE, CONTUDO, QUE AS TEMPERATURAS SERÃO OBTIDAS PARA OS NÓS (J, P, E) E NÃO PARA AS FACES (w, e). ASSIM, SERÁ NECESSÁRIO AVALIAR (APROXIMAR) A CONDUTIVIDADE TÉRMICA K NAS FACES DE CADA VOLUME DE CONTROLO. PARA TANTO, SERÃO EMPREGADAS EXPRESSÕES PROPOSTAS POR PATANKAR (p.44-46), QUE RESULTAM EM q CONSTATANTE ENTRE DOIS NÓS CONSECUTIVOS, E SÃO DADAS POR

$$k_w = \frac{(\Delta x_w + \Delta x_p) k_w k_p}{(\Delta x_p k_w + \Delta x_w k_p)} \quad (2.21)$$

$$\text{e} \quad k_e = \frac{(\Delta x_p + \Delta x_e) k_p k_e}{(\Delta x_e k_p + \Delta x_p k_e)} \quad (2.22)$$

NO CASO PARTICULAR DE UMA MALHA UNIFORME,

(5)

$$\Delta x = \Delta x_w = \Delta x_o = \Delta x_w = \Delta x_p = \Delta x_e \quad (2.23)$$

AS EQS. (2.21) E (2.22) SE TRANSFORMAM EM MÉDIAS HARMÔNICAS

$$k_w = \frac{2k_w k_p}{k_w + k_p} \quad (2.24)$$

$$k_e = \frac{2k_p k_e}{k_p + k_e} \quad (2.25)$$

EMPREGANDO-SE AS EQS. (2.19) E (2.20) NA EQ. (2.10) E TOMANDO-SE $A = \Delta y \Delta z$, OBTÉM-SE

$$\left[k_e \frac{(T_e - T_p)}{\Delta x_e} - k_w \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_w} + \dot{q}_p \Delta x_p \right] A = 0 \quad (2.26)$$

OU, REORGANIZANDO-SE OS TERMOS:

$$A \left(\frac{k_w}{\Delta x_w} + \frac{k_e}{\Delta x_e} \right) T_p = \left(A \frac{k_w}{\Delta x_w} \right) T_w + \left(A \frac{k_e}{\Delta x_e} \right) T_e + \dot{q}_p \Delta x_p A \quad (2.27)$$

UMA EQUAÇÃO DESSE TIPO É VÁLIDA PARA CADA UM DOS NÓS $P=2, 3, \dots, N-1$, CHAMADOS DE VOLUMES INTERNOS. NOTA-SE QUE PARA CADA UM DESSES NÓS, SEMPRE EXISTE UM NÓ VIZINHO À ESQUERDA (W) E UM NÓ VIZINHO À DIREITA (E).

A EQ. (2.27) É, NORMALMENTE, REPRESENTADA COMO:

$$a_p T_p = a_w T_w + a_e T_e + b_p \quad (2.28)$$

ONDE:

$$\text{COEFICIENTES: } \left\{ \begin{array}{l} a_w = A \frac{k_w}{\Delta x_w} \end{array} \right. \quad (2.29)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_e = A \frac{k_e}{\Delta x_e} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_p = a_w + a_e \end{array} \right. \quad (2.31)$$

$$\text{TERMO-FONTE: } b_p = \dot{q}_p \Delta x_p A \quad (2.32)$$

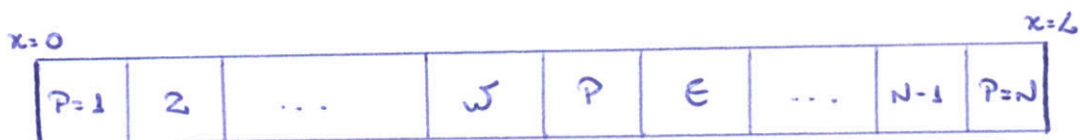


FIG. 2.4: DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO EM N VOLUMES DE CONTROLE.

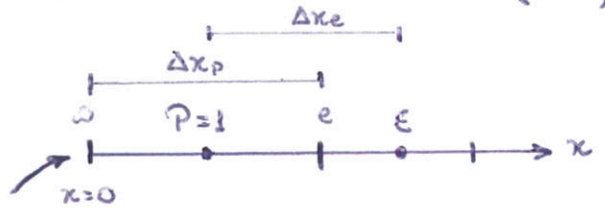
2.4. APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTOURNO DE DIRICHLET:

OS COEFICIENTES E TERMOS-FONTES OBTIDOS E REPRESENTADOS NAS EQS. (2.29) A (2.32) SÃO VÁLIDOS PARA OS CHAMADOS VOLUMES INTERNOS, ISTO É, VOLUMES NÃO ADJACENTES AOS CONTOURNOS. PARA A APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTOURNO EXISTEM DIVERSAS TÉCNICAS, DENTRE AS QUAIS SE CITAM:

- 1) INCORPORAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTOURNO NOS VOLUMES ADJACENTES AO MESMO
- 2) USO DE VOLUMES FICTÍCIOS
- 3) USO DE VOLUMES DE ESPESSURA ZERO
- 4) USO DE MEIO VOLUME.

NA SEQUÊNCIA, SERÁ APRESENTADA A TÉCNICA DE INCORPORAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTOURNO NOS VOLUMES A ELE ADJACENTES:

2.4.1. CONTOURNO ESQUERDO (P=1)



CONTOURNO ESQUERDO,
 $T(0) = T_A$

FIG. 2.5: CONTOURNO ESQUERDO, P=1 (x=0)

NO CASO DO VOLUME P=1, CUIA FACE OESTE (omega) COINCIDE COM O CONTOURNO DO DOMÍNIO, NOTA-SE QUE É IMPOSSÍVEL REALIZAR UMA APROXIMAÇÃO DO TIPO CDS PARA A FACE omega, UMA VEZ QUE NÃO EXISTE VOLUME À ESQUERDA DE P=1. NESTE CASO, É NECESSÁRIO UTILIZAR OUTRA FORMA DE APROXIMAÇÃO. NESTE CASO, SERÁ ADOPTADA UMA FUNÇÃO DE INTERPOLAÇÃO A JUSANTE OU DDS ("DOWNSTREAM DIFFERENCING SCHEME"), QUE SE CONSTITUI EM UMA INTERPOLAÇÃO LINEAR UTILIZANDO O VALOR CONHECIDO NA FACE OESTE, omega (CONTOURNO) E O VALOR OBTIDO NO NÓ P. ASSIM:

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_{\omega} \approx k_0 \frac{T_P - T_{\omega}}{\Delta x_P / 2} = 2 \frac{(T_P - T_A)}{\Delta x_P} k_0 \tag{2.33}$$

PARA A APROXIMAÇÃO DE $\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e$ NÃO EXISTE NENHUMA MUDANÇA POIS EXISTE UM VIZINHO À DIREITA (VOLUME DE CONTOURNO E).

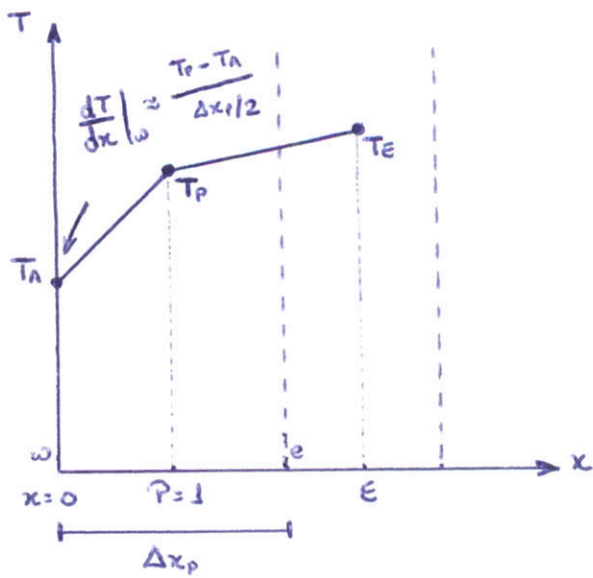


FIG. 2.6: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO ESQUEMA DDS.

UTILIZANDO-SE, ENTÃO, AS Eqs. (2.17) E (2.33), E SUBSTITUINDO-SE NA EQ. (2.10), OBTÉM-SE

$$A k_e \frac{(T_e - T_p)}{\Delta x_e} - 2k_w A \frac{(T_p - T_A)}{\Delta x_p} + \dot{q}_p \Delta x_p A = 0 \quad (2.34)$$

QUE ESCRITA NA FORMA DA EQ. (2.28) APRESENTA COMO COEFICIENTES / TERMO FONTE:

$$\text{COEFICIENTES: } \begin{cases} a_\omega = 0 \\ a_e = \frac{k_e A}{\Delta x_e} \\ a_p = a_e + \frac{2k_w A}{\Delta x_p} \end{cases} \quad (2.35)$$

$$(2.36)$$

$$(2.37)$$

$$\text{TERMO FONTE: } b_p = \dot{q}_p \Delta x_p A + \frac{2k_w A}{\Delta x_p} T_A \quad (2.38)$$

2.4.2. CONTORNO DIREITO (P=N)

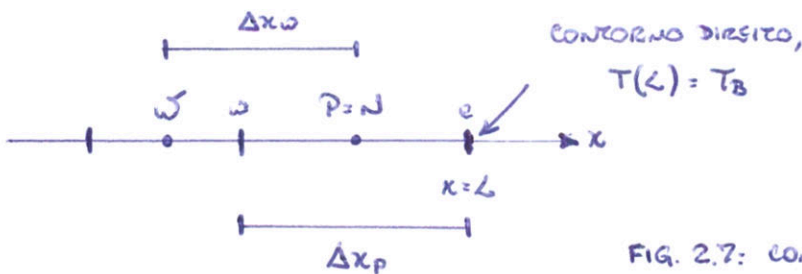


FIG. 2.7: CONTORNO DIREITO, P=N (x=L)

NO CASO DO VOLUME P=N, CUSA FACE LESTE (e) COINCIDE COM O CONTORNO DO DOMÍNIO SERÁ NECESSÁRIO ALTERAR A APROXIMAÇÃO DE $\left(\frac{dT}{dx}\right)_e$, VISTO QUE NÃO EXISTE UM VOLUME DE CONTROLE À DIREITA DE P=N. NESTE CASO, AO INVÉS DE SE UTILIZAR UMA APROXIMAÇÃO DO TIPO CDS, RECORRE-SE A UMA APROXIMAÇÃO A MONTANTE OU UDS ("UPSTREAM

DIFFERENCING SCHEME"). NESTE CASO, SERÁ REALIZADA UMA INTERPOLAÇÃO LINEAR UTILIZANDO O VALOR CONHECIDO NA FACE LESTE, e (CONTORNO) E O VALOR OBTIDO NO NÓ P. ASSIM

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e \approx k_e \frac{T_e - T_p}{\Delta x_p / 2} = 2k_e \frac{(T_B - T_p)}{\Delta x_p} \tag{2.39}$$

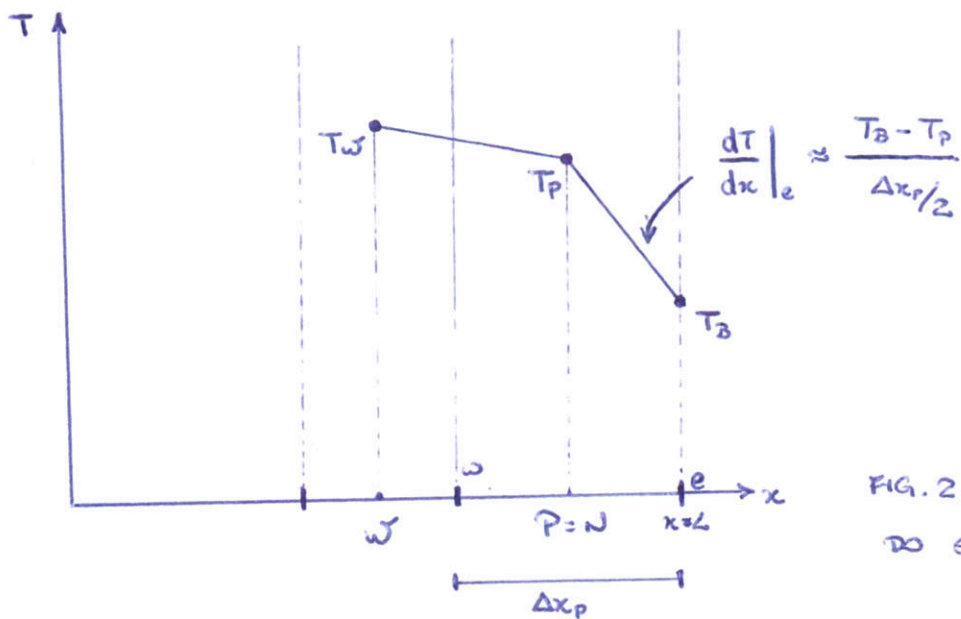


FIG. 2.8: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO ESQUEMA UDS

UTILIZANDO-SE, ENTÃO, AS EQS. (2.18) - VISTO QUE NÃO EXISTE ALTERAÇÃO PARA A APROXIMAÇÃO DE $\left(k \frac{dT}{dx} \right)_w$, UMA VEZ QUE EXISTE UM VOLUME VIZINHO À ESQUERDA (VOLUME DE CONTROLE W)

- E (2.39), E SUBSTITUINDO-SE NA EQ. (2.10), OBTÉM-SE

$$2k_e A \frac{(T_B - T_p)}{\Delta x_p} - k_w A \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_w} + \dot{q}_{pp} \Delta x_p A = 0 \tag{2.40}$$

QUE EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (2.28) APRESENTA COMO COEFICIENTES/TERMO FONTE:

$$\text{COEFICIENTES: } \begin{cases} a_w = \frac{k_w A}{\Delta x_w} \end{cases} \tag{2.41}$$

$$\begin{cases} a_e = 0 \end{cases} \tag{2.42}$$

$$\begin{cases} a_p = a_w + \frac{2k_e A}{\Delta x_p} \end{cases} \tag{2.43}$$

$$\text{TERMO FONTE: } b_p = \dot{q}_{pp} \Delta x_p A + \frac{2k_e A}{\Delta x_p} T_B \tag{2.44}$$

2.5. SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

O PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO GOVERNANTE GERA, PARA CADA VOLUME DE CONTROLE, UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA CORRESPONDENTE. DESTA MODO, SE EXISTEM N VOLUMES

DE CONTROLES NO MODELO DISCRETIZADO, HAVERÁ N EQUAÇÕES E N INCÓGNITAS A SEREM SOLUCIONADAS. DESSE MODO, A EQ. (2.28) REPRESENTA, NA REALIDADE, UM SISTEMA DE EQUAÇÕES DO TIPO

$$[A]_{N \times N} \{T\}_N = \{B\}_N \quad (2.45)$$

ONDE:

$[A]$ É A MATRIZ DOS COEFICIENTES, QUADRADA ($N \times N$), TRIDIAGONAL:

$$[A] = \begin{bmatrix} (a_p)_1 & -(a_e)_1 & & & & & & & & & \\ & -(a_w)_2 & (a_p)_2 & -(a_e)_2 & & & & & & & \\ & & -(a_w)_3 & (a_p)_3 & -(a_e)_3 & & & & & & \\ & & & \dots & & & & & & & \\ & & & & -(a_w)_j & (a_p)_j & -(a_e)_j & & & & \\ & & & & & -(a_w)_p & (a_p)_p & -(a_e)_p & & & \\ & & & & & & -(a_w)_e & (a_p)_e & -(a_e)_e & & \\ & & & & & & & \dots & & & \\ & & & & & & & & -(a_w)_{n-1} & (a_p)_{n-1} & -(a_e)_{n-1} \\ & & & & & & & & & -(a_w)_n & (a_p)_n \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (2.46)$$

$\{T\}$ É O VETOR INCÓGNITA, COM N ELEMENTOS:

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} (T_p)_1 \\ (T_p)_2 \\ \vdots \\ (T_p)_j \\ (T_p)_p \\ (T_p)_e \\ \vdots \\ (T_p)_{n-1} \\ (T_p)_n \end{Bmatrix}_N \quad (2.47)$$

$\{B\}$ É O VETOR DE TERMOS INDEPENDENTES, COMPOSTO PELOS TERMOS-FONTE DO PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO, COM N ELEMENTOS:

$$\{B\} = \begin{Bmatrix} (h_p)_1 \\ (h_p)_2 \\ \vdots \\ (h_p)_w \\ (h_p)_p \\ (h_p)_e \\ \vdots \\ (h_p)_{N-1} \\ (h_p)_N \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

2.6. DISCRETIZAÇÃO DAS VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS

PARA A AVALIAÇÃO DAS VARIÁVEIS DE INTERESSE SECUNDÁRIAS, SERÃO EMPREGADAS:

- 1) A APROXIMAÇÃO DO TIPO DDS, DADA PELA EQ. (2.33), PARA A TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR q em $x=0$, EQ. (2.6). NESTE CASO, OBTÉM-SE:

$$q_0 = -A \cdot \left[k \frac{dT}{dx} \right]_{x=0} \approx -A \cdot 2k_w \cdot \frac{(T_p - T_A)}{\Delta x_p} = -2k_w A \frac{(T_p - T_A)}{\Delta x_p} \quad (2.49)$$

SENDO $P=1$ (PRIMEIRO VOLUME DE CONTROLES).

- 2) A APROXIMAÇÃO DO TIPO UDS, DADA PELA EQ. (2.39), PARA A TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR q em $x=L$, EQ. (2.7). NESTE CASO, OBTÉM-SE:

$$q_L = -A \left[k \frac{dT}{dx} \right]_{x=L} \approx -A \cdot 2k_e \frac{(T_B - T_p)}{\Delta x_p} = -2k_e A \frac{(T_B - T_p)}{\Delta x_p} \quad (2.50)$$

SENDO $P=N$ (ÚLTIMO VOLUME DE CONTROLES).

- 3) A REGRA DO RETÂNGULO PARA A ESTIMATIVA DA INTEGRAL EXISTENTE NO CÁLCULO DA TEMPERATURA MÉDIA \bar{T} , EQ. (2.8), RESULTANDO EM

$$\bar{T} = \frac{1}{L} \sum_{P=1}^N (T_p \Delta x_p) \quad (2.51)$$

AO SE UTILIZAR A REGRA DO RETÂNGULO, ASSUME-SE QUE A TEMPERATURA OBTIDA NO NÓ P SEJA CONSTANTE EM TODO O INTERIOR DO VOLUME DE CONTROLES P . ASSIM, AO SE PROCEDER A INTEGRAÇÃO NUMÉRICA, SÃO CRIADOS RETÂNGULOS DE LARGURA EQUIVALENTE A Δx_p E ALTURA IGUAL A T_p PARA CADA VOLUME DE CONTROLES P ($P=1, 2, \dots, N$).

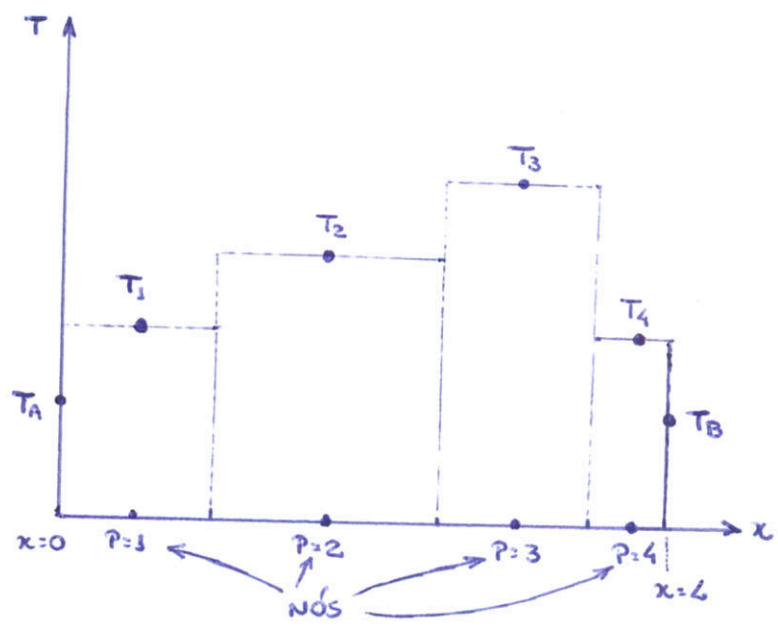


FIG. 2.9: CONCEPÇÃO DA INTEGRAÇÃO ATOMAR DA REGRA DO RETÂNGULO

2.7. ALGORITMO

- 1) LER OS DADOS: CONDIÇÕES DE CONTOURNO T_A E T_B ; FUNÇÃO PARA AVALIAR $k(T)$; COMPRIMENTO DO DOMÍNIO L ; ÁREA DA SEÇÃO TRANSVERSAL A ; NÚMERO DE VOLUMES DE CONTROLE N ; Δx_p PARA CADA VOLUME DE CONTROLE P ; NÚMERO DE ITERAÇÕES I ; GERAÇÃO GEOMÉTRICA DE CALOR \dot{q}_p PARA CADA VOLUME DE CONTROLE.
- 2) TENDO-SE POR BASE Δx_p E N , OBTEN x_p , Δx_e E Δx_d PARA CADA VOLUME DE CONTROLE.
- 3) ESTIMAR UM CAMPO DE TEMPERATURAS T_p ; POR EXEMPLO, PODE-SE USAR $T_p = \frac{T_A + T_B}{2}$, $P=1, 2, \dots, N$ OU UMA INTERPOLAÇÃO LINEAR.
- 4) AVALIAR $k(T)$ PARA $P=1, 2, \dots, N$.
- 5) AVALIAR k_e E k_d PARA TODOS OS VOLUMES DE CONTROLE ($P=1, 2, \dots, N$)
- 6) CALCULAR OS COEFICIENTES (a_p, a_d, a_e) E TERMOS-FONCES (b_p) PARA TODOS OS VOLUMES DE CONTROLE.
- 7) RESOLVER O SISTEMA LINEAR GERADO NO ITEM ANTERIOR, OBTENDO-SE T_p ($P=1, 2, \dots, N$). PODE-SE USAR, PARA TANTO, O MÉTODO TDMA, POR EXEMPLO.
- 8) VOLTAR AO ITEM 4 ATÉ ATINGIR O NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES I OU ATÉ QUE ALGUM OUTRO CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA SEJA SATISFEITO.
- 9) IMPRIMIR E VISUALIZAR O CAMPO DE TEMPERATURAS, $T_p(x_p)$.
- 10) AVALIAR AS VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS: q_0, q_L, \bar{T} .

2.8. SOLUÇÕES ANALÍTICAS:

CASO 1: CONSIDERANDO-SE k E \dot{q} CONSTANTES. NESTE CASO, A EQ. (2.2) PODE SER ESCRITA COMO

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (2.52)$$

QUE SE TRATA DE UMA EQUAÇÃO TIPO POISSON. CONSIDERANDO-SE, ENTÃO, AS SEGUINTESS CONDIÇÕES DE CONTORNO, EXPRESSAS PELAS ERS. (2.3) E (2.4), JÁ APRESENTADAS:

$$\begin{cases} T(0) = T_A \\ T(L) = T_B \end{cases}$$

TEM-SE AS SEGUINTESS EXPRESSÕES PARA AS VARIÁVEIS DE INTERESSE:

$$T(x) = T_A + \frac{(T_B - T_A)}{L} x + \frac{\dot{q}}{2k} (L - x)x \quad (\text{PERFIL QUADRÁTICO}) \quad (2.53)$$

$$q(x) = \left[k \frac{(T_A - T_B)}{L} + \dot{q}x - \frac{\dot{q}L}{2} \right] A \quad (2.54)$$

$$\bar{T} = \frac{(T_A + T_B)}{2} + \frac{\dot{q}L^2}{12k} \quad (2.55)$$

CASO 2: CONSIDERANDO-SE AS SEGUINTESS HIPÓTESES / CONDIÇÕES DE CONTORNO:

$$\dot{q} = 0 \quad (2.56)$$

$$k(T) = e^T \quad (2.57)$$

$$T(0) = 0 \quad (2.58)$$

$$T(L) = L = A = 1 \quad (2.59)$$

TEM-SE QUE A EQ. (2.2) PODE SER EXPRESSA COMO

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (2.60)$$

CUJAS EXPRESSÕES ANALÍTICAS PARA AS VARIÁVEIS DE INTERESSE SÃO:

$$T(x) = \ln [1 + (e-1)x] \quad (2.61)$$

$$q = 1 - e \quad (2.62)$$

$$\bar{T} = \frac{1}{e-1} \quad (2.63)$$

2.9. CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN

ADMITINDO-SE A EQ. (2.2), REESCRITA ABAIXO

$$\frac{d}{dx} \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0$$

QUE REGE A DIFUSÃO DE CALOR EM REGIME PERMANENTE EM UMA PAREDE PLANA, E AS SEGUINTE CONDÇÕES DE CONTORNO:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(0) = T_A \quad (\text{C.C. DIRICHLET}) \\ - \left[\kappa A \frac{dT}{dx} \right]_{x=L} = \dot{q}_L \quad (\text{C.C. NEUMANN}) \end{array} \right. \quad (2.64)$$

$$(2.65)$$

DESEJA-SE, ENTÃO, VERIFICAR QUAIS SÃO AS MUDANÇAS A SEREM REALIZADAS COM RELAÇÃO AOS PROCEDIMENTOS APRESENTADOS NA SEÇÃO 2.4. COM RELAÇÃO À EQ. (2.65), DEVE-SE NOTAR QUE TANTO $\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L}$ QUANTO $T(L) = T_L$, E CONSEQUENTEMENTE, κ_L , SÃO DESCONHECIDOS.

NOTA-SE, TAMBÉM, QUE A ÚNICA MUDANÇA A SER REALIZADA COM RELAÇÃO AOS PROCEDIMENTOS JÁ APRESENTADOS SE REFERE AO ÚLTIMO NÓ OU VOLUME DE CONTROLE ($P=N$), NO QUAL A CONDIÇÃO DE NEUMANN SERÁ AVALIADA.

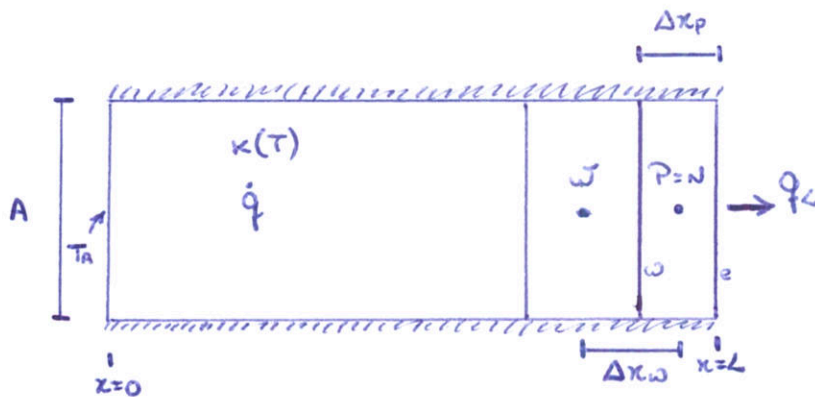


FIG. 2.10: CONDIÇÃO DE CONTORNO DE NEUMANN

PARTINDO-SE DA EQ. (2.10), REESCREVA A SEGUIR:

$$\left[\left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_\omega + \dot{q}_p \Delta x_p \right] A = 0$$

E APLICANDO-A AO NÓ $P=N$, TEM-SE

$$\left(\kappa A \frac{dT}{dx} \right)_e - A \left(\kappa \frac{dT}{dx} \right)_\omega + \dot{q}_p \Delta x_p A = 0 \quad (2.66)$$

NOTA-SE QUE $\left(\kappa A \frac{dT}{dx} \right)_e$ NO CASO DO VOLUME $P=N$ CORRESPONDE A $-q_e$, PELA LEI DE FOURIER, OU MELHOR, É O SIMÉTRICO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO. ASSIM, EMPREGANDO-SE

AS EQS. (2.65) E (2.20) NA EQ. (2.66), OBTÉM-SE:

(14)

$$-q_L - k_w A \frac{(T_p - T_w)}{\Delta x_w} + \dot{q}_p \Delta x_p A = 0 \quad (2.67)$$

OU SEJA,

$$\left(\frac{k_w A}{\Delta x_w} \right) T_p = \left(\frac{k_w A}{\Delta x_w} \right) T_w + (\dot{q}_p \Delta x_p A - q_L) \quad (2.68)$$

QUE EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (2.28) POSSUI OS SEGUINTESS COEFICIENTES / TERMO-FONTE:

$$\text{COEFICIENTES: } \begin{cases} a_e = 0 & (2.69) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_w = \frac{k_w A}{\Delta x_w} & (2.70) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_p = a_w & (2.71) \end{cases}$$

$$b_p = \dot{q}_p \Delta x_p A - q_L \quad (2.72)$$

DEVE-SE NOTAR QUE O SINAL DE q_L DEVE RESPECTAR A ORIENTAÇÃO DO EIXO x . DESTES MODO, SE A TAXA DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR q APRESENTAR VALOR NEGATIVO EM $x=L$, O CALOR ESTARÁ ENTRANDO NO DOMÍNIO.

APÓS SER OBTIDA A TEMPERATURA T_p , $p=1, 2, \dots, N-1, N$ (CAMPO DE TEMPERATURAS) PODE-SE AVALIAR A TEMPERATURA $T(L) = T_L$ ATRAVÉS DA APROXIMAÇÃO NUMÉRICA APLICADA À EQ. (2.65), OU SEJA,

$$-k_2 A \frac{(T_L - T_N)}{\Delta x_N / 2} = q_L \quad (2.73)$$

OU SEJA,

$$T_L = T_N - \frac{q_L \Delta x_N}{2 k_2 A} \quad (2.74)$$

DEVE-SE NOTAR QUE, SE $k = k(T)$, A OBTENÇÃO DE T_L É FEITA ITERATIVAMENTE, UMA VEZ QUE k_2 TAMBÉM DEVERÁ SER AVALIADA A CADA ITERAÇÃO.

2.10. CONDIÇÃO DE CONTORNO DE ROBIN

ADMITINDO-SE NOVAMENTE A EQ. (2.2) REESCRITA ABAIXO

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0$$

E AS SEGUINTES CONDIÇÕES DE CONTORNO:

$$\left\{ \begin{array}{l} T(0) = T_A \end{array} \right. \quad (\text{C.C. DIRICHLET}) \quad (2.75)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_k = - \left(k A \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h A (T_L - T_\infty) \end{array} \right. \quad (\text{C.C. ROBIN}) \quad (2.76)$$

(CONDUÇÃO) (CONVECÇÃO)

NESTE CASO, SÃO DESCONHECIDOS q_k , $\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L}$, T_L E k_L .

DE MODO SEMELHANTE AO SELECIONADO NA SEÇÃO ANTERIOR, A ÚNICA MUDANÇA A SER REALIZADA EM RELAÇÃO AOS PROCEDIMENTOS DA SEÇÃO 2.4 ENVOLVE O ÚLTIMO VOLUME, $P=N$, PARA O QUAL A NOVA CONDIÇÃO DE CONTORNO (C.C. ROBIN), EQ. (2.76) SERÁ AVALIADA.

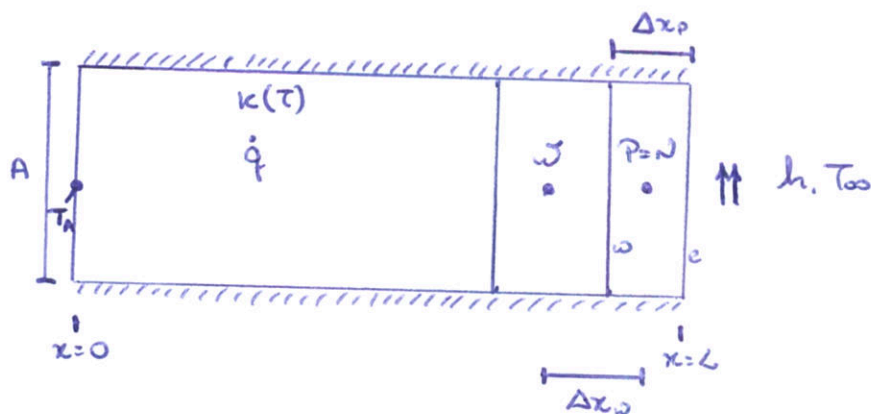


FIG. 2.11: CONDIÇÃO DE CONTORNO DE ROBIN

PARA A APLICAÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO, É NECESSÁRIO AVALIAR $T(L) = T_L$. ASSIM, O PROCEDIMENTO ADOPTADO INCLUI A DISCRETIZAÇÃO DA EQ. (2.76), O QUE RESULTA EM

$$-k_L A \frac{(T_L - T_N)}{\Delta x_w/2} = h A (T_L - T_\infty) \quad (2.77)$$

ISOLANDO-SE T_L , OBTÉM-SE

$$T_L = \frac{(2k_L T_N + h \Delta x_w T_\infty)}{(2k_L + h \Delta x_w)} \quad (2.78)$$

EMPREGANDO-SE, ENTÃO, AS EQS. (2.18), (2.39) E (2.78) NA EQ. (2.10), OBTÉM-SE

$$\left[\frac{2k_L}{\Delta x_w} \frac{(2k_L T_N + h \Delta x_w T_\infty)}{(2k_L + h \Delta x_w)} - \frac{2k_L}{\Delta x_w} T_N - \frac{k_w}{\Delta x_w} T_N + \frac{k_w}{\Delta x_w} T_W + \dot{q}_p \Delta x_p \right] A = 0 \quad (2.79)$$

QUE EXPRESSA NA FORMA DA EQ. (2.28) APRESENTA COMO COEFICIENTES / TERMO-FONTE:

$$\text{COEFICIENTES} \left\{ \begin{array}{l} a_e = 0 \\ a_w = \frac{k_w A}{\Delta x_w} \\ a_p = a_w + \frac{2k_2 A h}{2k_2 + h \Delta x_w} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (2.80) \quad (16) \\ (2.81) \\ (2.82) \end{array}$$

$$\text{Termo-fonte: } h_p = \dot{q}_p \Delta x_p A + \frac{2k_2 A h}{2k_2 + h \Delta x_w} T_{\infty} \quad (2.83)$$

DEVE-SE NOTAR QUE, CASO $k = k(T)$, OS VALORES DE Q_p E h_p DEVEM SER ATUALIZADOS ITERATIVAMENTE COM A OBTENÇÃO DO CAMPO DE TEMPERATURAS, $T_p, p = 1, 2, \dots, N$ E CONSEQUENTE AVALIAÇÃO DE T_k PELO USO DA EQ. (2.7B).

CAP. 02: EXEMPLO:

CONSIDERE UMA BARRA UNIDIMENSIONAL, DE COMPRIMENTO IGUAL A 1m, CONSTITUÍDA DE COBRE ($k = 400 \text{ W/mK}$). POR ESSA BARRA PASSA UMA CORRENTE ELÉTRICA QUE, POR EFEITO JOULE, GERA CALOR A UMA TAXA CONSTANTE DE $3 \times 10^5 \text{ W/m}^3$. SUPONHA QUE AS TEMPERATURAS NAS EXTREMIDADES DA BARRA SEJAM MANTIDAS CONSTANTES E IGUAIS A $T(0) = T_A = 50^\circ\text{C}$ E $T(L) = T_B = 200^\circ\text{C}$. PARA A AVALIAÇÃO DO PERFIL DE TEMPERATURAS NA BARRA, EMPREGUE O MÉTODO DE VOLUMES FINITOS, COM UMA MALHA NÃO UNIFORME CONSTITUÍDA DE 7 VOLUMES, CUJOS COMPRIMENTOS SÃO IGUAIS A: 0,10m, 0,15m, 0,20m, 0,15m, 0,10m, 0,20m E 0,1m. CONSIDERE QUE A ÁREA DE SEÇÃO TRANSVERSAL DA BARRA É DE $0,1 \text{ m}^2$.