

2. CONDUÇÃO DE CALOR 1Dp COM ÁREA CONSTANTE

2.1 Modelo Matemático

A partir da equação de conservação de energia térmica, considerando-se

- problema unidimensional (1D);
- regime permanente (p);
- área (A) de troca de calor constante na direção x;
- geração de calor (\dot{q});

obtém-se

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} = 0 \quad (2.1)$$

onde

T = temperatura (°C ou K);

x = direção coordenada (m);

k = condutividade térmica (W/mK);

\dot{q} = taxa de geração de calor por volume (W/m³) [efeito Joule, ou reações exotérmicas/endotérmicas].

Condições de contorno do tipo Dirichlet:

$$T(0) = T_A \quad (2.2)$$

$$T(L) = T_B \quad (2.3)$$

sendo T_A e T_B os valores conhecidos de temperatura, L é o comprimento do domínio de cálculo na direção x, e k e \dot{q} podem ser variáveis com T ou x.

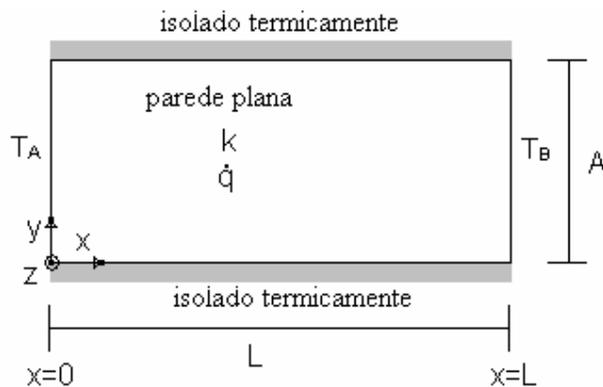


Figura 2.1: Esquema do problema físico

A = produto da altura em y pela profundidade em z ; é a área de troca de calor na direção x , em m^2 , que é constante.

2.2 Variáveis de Interesse

1) $T(x)$, da eq.(2.1);

2) média de $T(x)$ no domínio inteiro, definido por

$$\bar{T} = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx \quad (2.4)$$

3) taxa de transferência de calor q em $x = 0$, definida por

$$q_0 = -A \left(k \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} \quad (2.5)$$

4) q em $x = L$:

$$q_L = -A \left(k \frac{dT}{dx} \right)_{x=L} \quad (2.6)$$

2.3 Discretização do Domínio

O comprimento L do domínio de cálculo é subdividido (discretizado) em N partes ou volumes de controle, conforme a figura 2.2

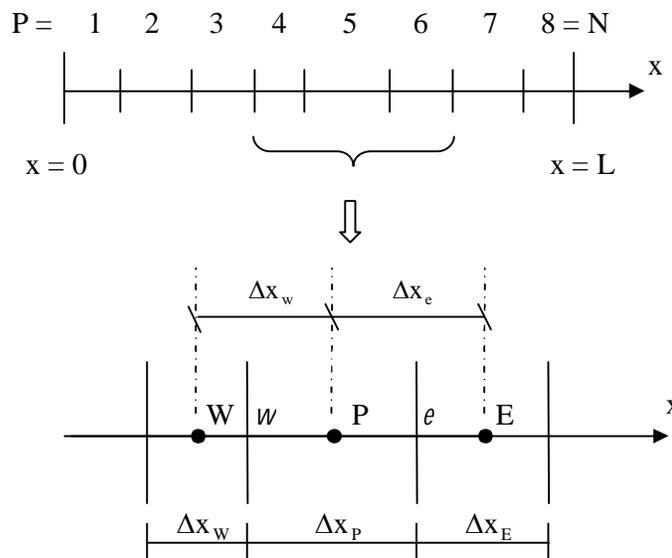


Figura 2.2: Malha 1D não-uniforme de nós centrados entre as faces

P = volume de controle (VC) ou nó genérico sobre o qual o modelo matemático é discretizado

W = VC à esquerda de P (ou oeste)
 E = VC à direita de P (ou leste)
 w = face oeste ou limite à esquerda do VC P
 e = face leste ou limite à direita do VC P

Malha: conjunto de todos os nós ou volumes de controle que discretizam ou subdividem o domínio de cálculo

Geração da malha: processo que define o tamanho de cada VC (Δx_p), suas coordenadas limites (x_w e x_e) e a posição do seu nó (x_p).

No caso da malha da figura 2.2, a geração é feita da seguinte forma:

1) Dados: Δx_p para $P = 1, 2, \dots, N$

2) Cálculo de x_e de cada VC P:

$$x_{e,P} = x_{e,W} + \Delta x_p \quad (P = 1, 2, \dots, N) \quad (2.7)$$

onde

$$x_{e,0} = 0, \quad x_{e,N} = L \quad \text{e} \quad x_{w,E} = x_{e,P} \quad (2.8)$$

3) Cálculo de x_p de cada VC P:

$$x_p = \frac{(x_{e,W} + x_{e,P})}{2} \quad (P = 1, 2, \dots, N) \quad (2.9)$$

4) Cálculo de Δx_e , com

$$\Delta x_e = x_E - x_p \quad (P = 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.9b)$$

$$\Delta x_e = \Delta x_E \quad (P = 0) \quad (2.9c)$$

$$\Delta x_e = \Delta x_p \quad (P = N) \quad (2.9d)$$

2.4 Discretização da Equação Diferencial

O princípio do método dos volumes finitos é integrar o modelo matemático do problema sobre cada VC da malha. Portanto, integrando-se a eq.(2.1) sobre o VC P da fig. 2.2 obtém-se:

$$\int_{x_w}^{x_e} \left[\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + \dot{q} \right] dx = 0 \quad (2.10)$$

ou

$$\int_{x_w}^{x_e} \frac{df}{dx} dx + \int_{x_w}^{x_e} \dot{q} dx = 0 \quad (2.11)$$

onde

$$f = k \frac{dT}{dx} \quad (2.12)$$

A eq.(2.11) também pode ser escrita como

$$\int_{x_w}^{x_e} df + \int_{x_w}^{x_e} \dot{q} dx = 0 \quad (2.13)$$

que resulta em

$$f_e - f_w + \dot{q}_p \Delta x_p = 0 \quad (2.14)$$

$f_e - f_w$: é exata analiticamente, sem aproximação (explicar, da eq. 2.13 para 2.14)

\dot{q}_p : constante no VC P; isto é, uma aproximação numérica (integral numérica do tipo retângulo).

Com a eq.(2.12) em (2.14),

$$\left(k \frac{dT}{dx} \right)_e - \left(k \frac{dT}{dx} \right)_w + \dot{q}_p \Delta x_p = 0 \quad (2.15)$$

Para continuar o processo de discretização é necessário definir como aproximar k e dT/dx nas faces do VC P. Para T serão usadas funções lineares entre cada dois nós adjacentes, conforme a fig. 2.3. Esta aproximação (ou esquema) é chamada CDS-2 (esquema de diferença central de 2ª ordem).

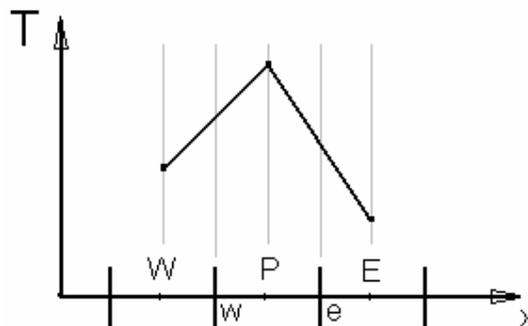


Figura 2.3: Esquema CDS-2

Com CDS-2

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_w \approx \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x_w} \quad (2.16)$$

$$\left(\frac{dT}{dx} \right)_e \approx \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x_e} \quad (2.17)$$

E, com Patankar,

$$k_e = \frac{(\Delta x_P + \Delta x_E)k_P k_E}{(\Delta x_P k_E + \Delta x_E k_P)} \quad (2.18)$$

Recomenda-se usar para variações abruptas de k , como em paredes de 2 ou mais materiais.

ou

$$k_e = \frac{(\Delta x_P k_E + \Delta x_E k_P)}{(\Delta x_P + \Delta x_E)} \quad (\text{interpolação linear}) \quad (2.19)$$

Recomenda-se usar para variações menos abruptas ou suaves de k , como em paredes de apenas 1 material.

onde

$$(k_w)_P = (k_e)_W \quad (\text{basta calcular } k \text{ só na face leste de cada VC}) \quad (2.20)$$

As eqs.(2.18) e (2.19) são válidas para o tipo de malha da fig.2.2 e para $P = 1$ a $N - 1$.

Nos contornos,

$$k_e(P = 0) = k(T_A)$$

$$k_e(P = N) = k(T_B)$$

Com as eqs.(2.16) e (2.17) em (2.15)

$$k_e \frac{(T_E - T_P)}{\Delta x_e} - k_w \frac{(T_P - T_W)}{\Delta x_w} + \dot{q}_P \Delta x_P = 0 \quad (2.21)$$

ou

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + b_P \quad (2.22)$$

onde

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{coeficientes (P=1 a N)} \left\{ \begin{array}{l}
 a_w = \frac{k_w}{\Delta x_w} \\
 a_e = \frac{k_e}{\Delta x_e} \\
 a_p = a_w + a_e
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{termofonte} \quad \left\{ b_p = \dot{q}_p \Delta x_p \right.
 \end{array} \right\} \quad (2.23)$$

2.5 Aplicação das Condições de Contorno

As condições de contorno (CC) são aplicadas através da técnica dos volumes fictícios e com as figuras 2.4 e 2.5. O Δx_p de um volume fictício é o mesmo do volume real adjacente.

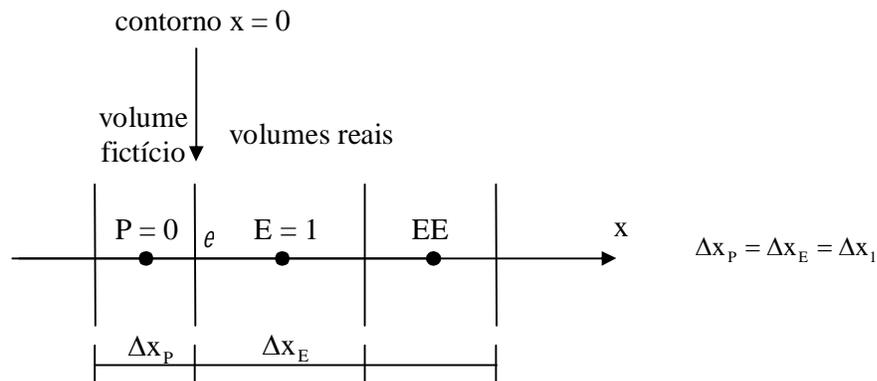


Figura 2.4: Aplicação da CC em $x = 0$

A condição de contorno a ser aplicada em $x = 0$ é a eq.(2.2), isto é,

$$T(0) = T_A$$

portanto, para a figura 2.4,

$$T_e = T_A \quad (2.24)$$

A condição de contorno de T prescrita (conhecida) é aplicada através da média aritmética do nó fictício com o nó real adjacente, ou seja,

$$\frac{T_p + T_e}{2} = T_c = T_A \quad (2.25)$$

Isolando-se T_p na eq.(2.25), tem-se

$$T_p = -T_E + 2T_A \quad (2.26)$$

Comparando-se as eqs.(2.26) e (2.22), obtém-se

$$a_p = 1; \quad a_w = 0; \quad a_e = -1; \quad b_p = 2T_A \quad (P = 0) \quad (2.27)$$

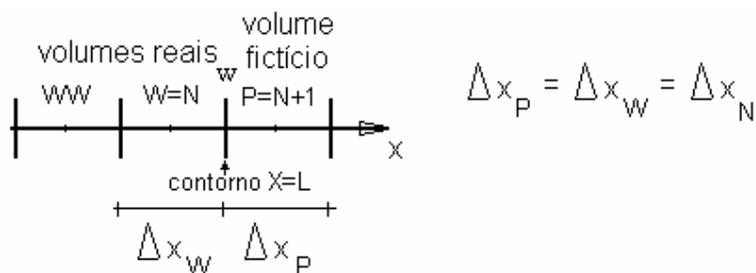


Figura 2.5: Aplicação da CC em $X = L$

A condição de contorno a ser aplicada em $X = L$ é a eq.(2.3), isto é, $T(L) = T_B$, portanto, para a figura 2.5,

$$T_w = T_B \quad (2.28)$$

e

$$\frac{T_w + T_p}{2} = T_w = T_B \quad (2.29)$$

Isolando-se T_p na eq.(2.29), tem-se

$$T_p = -T_w + 2T_B \quad (2.30)$$

Comparando-se as eqs.(2.30) e (2.22), obtém-se

$$a_p = 1; \quad a_w = -1; \quad a_e = 0; \quad b_p = 2T_B \quad (P = N + 1) \quad (2.31)$$

2.6 Sistema de Equações

A eq.(2.22) pode ser reescrita como

$$-a_w T_w + a_p T_p - a_e T_e = b_p \quad \text{para } P = 0 \text{ a } N + 1 \quad (2.32)$$

Deve-se perceber que cada VC P depende de dois VC vizinhos (W e E). Juntando-se as eqs.(2.32) para todos os $N + 2$ VC P , obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas:

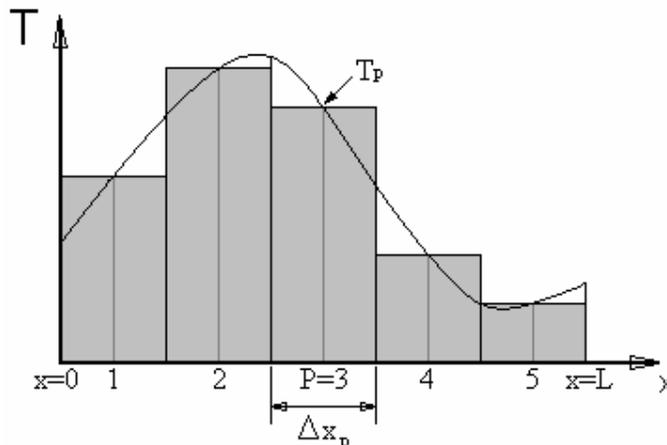


Figura 2.6: Integral pela regra do retângulo

Deve-se perceber que os VC fictícios ($P=0$ e $N+1$) não entram na eq.(2.37). Isso ocorre porque a integração é sobre $x=0$ a L , e os fictícios são apenas um artifício para aplicar as CC.

2.8 Algoritmo Geral

Os passos lógicos (algoritmo) para se resolver numericamente o problema definido pelas eqs.(2.1) a (2.6) são:

- 1 - Ler os dados: T_A , T_B , função $k(T)$, função $\dot{q}(x$ ou $T)$, L , A , N , I (n° de iterações) e Δx_P ($P=1$ a N)
- 2 - Calcular x_e com as eq.(2.7) e (2.8), x_P com a eq.(2.9), e Δx_e com as eqs.(2.9b), (2.9c) e (2.9d)
- 3 - Estimar a solução de T_P ; por exemplo, $T_P = (T_A + T_B)/2$, $P = 1$ a N (2.38)
- 4 - Calcular $k_P(T_P)$ para $P = 1$ a N
- 5 - Calcular k_e com a eq.(2.18) ou (2.19), para $P=1$ a $N-1$; nos contornos: $k_e(P = 0) = k(T_A)$ e $k_e(P = N) = k(T_B)$
- 6 - Calcular os coeficientes (a_w , a_e , a_P) e termos fontes (b_P) com as eqs.(2.23), (2.27) e (2.31)
- 7 - Resolver o sistema de equações (2.33) ou (2.34) com o método TDMA, obtendo T_P para $P=0$ a $N + 1$
- 8 - Voltar ao passo 4 até atingir I ou satisfazer algum critério de convergência
- 9 - Calcular q_0 , q_L e \bar{T} com as eqs. (2.35) a (2.37)
- 10 - Imprimir e visualizar os resultados

2.9 Caso Simplificado

O que foi visto nas seções 2.1 a 2.8, para o caso de k , \dot{q} e Δx constantes, se reduz a:

seção 2.1 – modelo matemático

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (2.39)$$

seção 2.3 – discretização do domínio -malha 1D uniforme

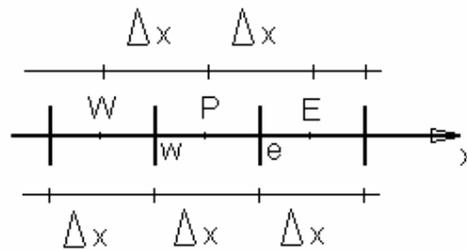


Figura 2.7: Malha 1D uniforme

$$\Delta x = \frac{L}{N} \quad (2.40)$$

$$x_p = \frac{(2P-1)}{2} \Delta x \quad P=1 \text{ a } N \quad (2.41)$$

seção 2.4 – discretização da equação diferencial

$$a_w = a_e = \frac{1}{\Delta x}; \quad a_p = a_w + a_e; \quad b_p = \frac{\dot{q}}{k} \Delta x \quad (2.42)$$

seção 2.7 – discretização das variáveis secundárias

$$q_0 = -A k \left(\frac{T_{P=1} - T_{P=0}}{\Delta x} \right) \quad (2.43)$$

$$q_L = -A k \left(\frac{T_{P=N+1} - T_{P=N}}{\Delta x} \right) \quad (2.44)$$

$$\bar{T} = \frac{\Delta x}{L} \sum_{P=1}^N T_P \quad (2.45)$$