

6. DIFUSÃO DE QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR (QML) 1Dp

6.1 Modelo Matemático

A partir das equações de Navier-Stokes, considerando-se:

- escoamento unidimensional (1D);
 - regime permanente (p);
 - coordenadas cilíndricas;
 - escoamento plenamente desenvolvido em um duto circular (fig. 6.1);
- obtem-se

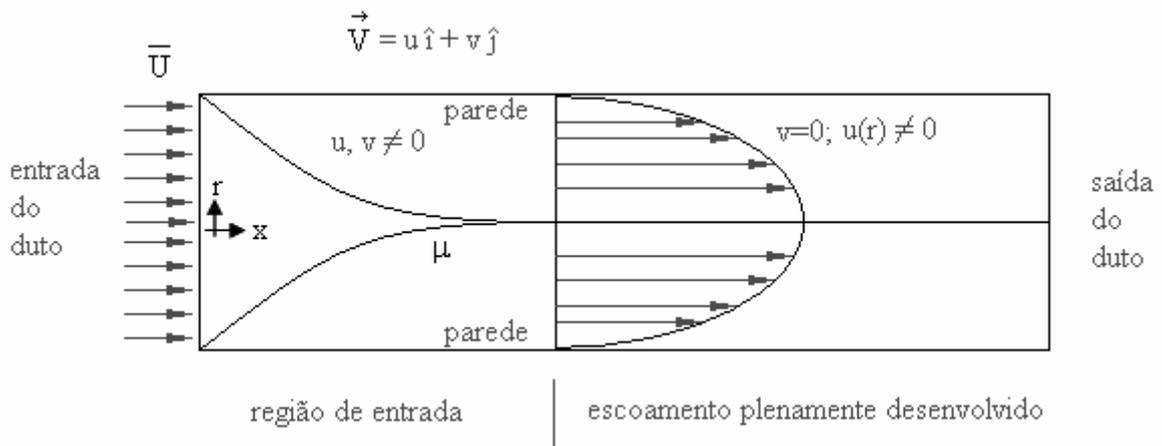


Figura 6.1: Escoamento em um duto circular

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\mu r \frac{du}{dr} \right) = \frac{dp}{dx} = C \quad (6.1)$$

onde

- u = componente da velocidade \vec{V} na direção x ;
- r = direção coordenada radial [raio];
- μ = viscosidade absoluta do fluido, função de r ;
- p = pressão estática do fluido;
- C = constante.

As condições de contorno são dadas por (fig. 6.2):

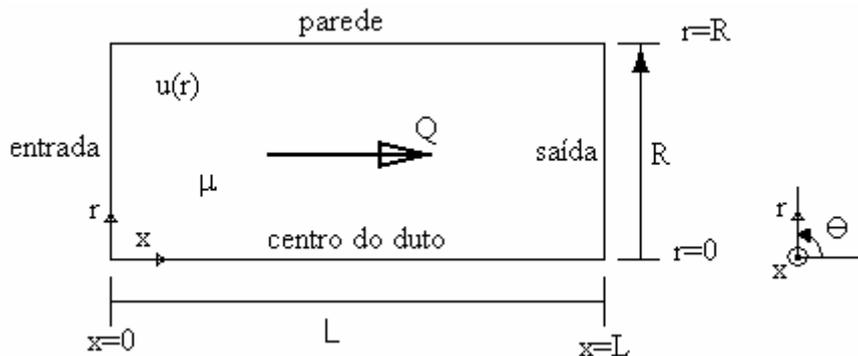


Figura 6.2: Esquema do problema físico

- Dirichlet (velocidade conhecida) em $r = R$:

$$u(R) = 0; \quad (\text{condição de não-escorregamento}) \quad (6.2)$$

- Neumann (derivada conhecida) em $r = 0$:

$$\left(\frac{du}{dr} \right)_{r=0} = 0 \quad (\text{condição de contorno de simetria}) \quad (6.3)$$

onde o R é o raio do duto.

6.2 Variáveis de Interesse

a) $u(r)$, obtido da solução das eqs.(6.1) a (6.3);

b) $u_{\max} =$ valor máximo de u , que ocorre em $r = 0$;

c) vazão que escoo no duto,

$$Q = \int_A u dA = 2\pi \int_0^R u r dr \quad (6.4)$$

d) força viscosa do fluido sobre o duto,

$$F = (A\tau)_{r=R} = -2\pi RL \left[\mu \left(\frac{du}{dr} \right) \right]_{r=R} \quad (6.5)$$

onde A é a área, τ é a tensão, e L é o comprimento do duto.

6.3 Discretização da Equação Diferencial

Integrando-se a eq.(6.1) sobre o volume de controle P da fig.6.3, obtém-se

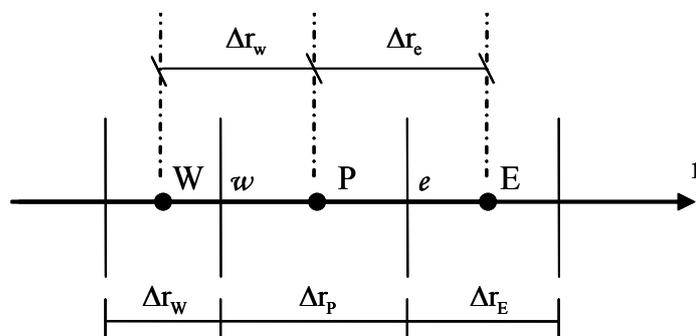


Figura 6.3: Malha 1D não-uniforme de nós centrados entre faces

$$\int_{r_w}^{r_e} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\overbrace{\mu r \frac{du}{dr}}^f \right) \right] dr = \int_{r_w}^{r_e} C dr \quad (x \ r) \quad (6.6)$$

ou

$$\int_{r_w}^{r_e} df = C \int_{r_w}^{r_e} r dr \quad (6.7)$$

onde

$$f = \mu r \frac{du}{dr} \quad (6.8)$$

A eq.(6.7) resulta em

$$f_e - f_w = C \frac{(r_e^2 - r_w^2)}{2} = C(r_e - r_w) \frac{(r_e + r_w)}{2} = C \Delta r_p r_p \quad (6.9)$$

(A integração analítica de $\int r dr$ é igual à numérica)

ou, com a eq.(6.8)

$$\left(\mu r \frac{du}{dr} \right)_e - \left(\mu r \frac{du}{dr} \right)_w = C \Delta r_p r_p \quad (6.10)$$

- μ_e e μ_w podem ser obtidos diretamente da função dada $\mu(r)$ com r_w e r_e .

- r_w , r_e , Δr_p e r_p são obtidos da malha gerada.

- As duas derivadas podem ser aproximadas com o esquema CDS-2 (fig. 2.3), resultando em

$$\left(\frac{du}{dr} \right)_w \approx \frac{(u_p - u_w)}{\Delta r_w} \quad (6.11)$$

$$\left(\frac{du}{dr} \right)_e \approx \frac{(u_e - u_p)}{\Delta r_e} \quad (6.12)$$

Com as eqs. (6.11) e (6.12) em (6.10), chega-se a

$$\mu_e r_e \frac{(u_e - u_p)}{\Delta r_e} - \mu_w r_w \frac{(u_p - u_w)}{\Delta r_w} = C \Delta r_p r_p \quad (6.13)$$

que na forma do sistema de equações

$$a_p u_p = a_w u_w + a_e u_e + b_p \quad (6.14)$$

resulta em

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{coeficientes (VC reais, } P = 1 \text{ a } N) \left\{ \begin{array}{l}
 a_w = \frac{\mu_w r_w}{\Delta r_w} \\
 a_e = \frac{\mu_e r_e}{\Delta r_e} \\
 a_p = a_w + a_e
 \end{array} \right. \\
 \\
 \text{termo fonte} \quad \left\{ b_p = -C \Delta r_p r_p \right.
 \end{array} \right\} \quad (6.15)$$

6.4 Aplicação das Condições de Contorno (C.C.)

A condição de contorno em $r = R$, dada pela eq.(6.2) pode ser aplicada com o VC fictício $P = N + 1$, da fig. 2.5, isto é,

$$\frac{(u_p + u_w)}{2} = u(R) = 0$$

ou

$$u_p = -u_w \quad (6.16)$$

que, comparada à eq.(6.14), resulta em

$$a_p = 1; \quad a_w = -1; \quad a_e = b_p = 0 \quad (P = N + 1) \quad (6.17)$$

A C.C. em $r = 0$, dada pela eq.(6.3), pode ser aplicada com o VC fictício $P = 0$ da fig. 2.4, da seguinte forma, com CDS-2:

$$\left(\frac{du}{dr} \right)_{r=0} \approx \frac{(u_E - u_p)}{\Delta r_p} = 0$$

ou

$$u_p = u_E \quad (6.18)$$

que, comparada à eq.(6.14), resulta em

$$a_p = a_e = 1; \quad a_w = b_p = 0 \quad (P = 0) \quad (6.19)$$

6.5 Obtenção das Variáveis Secundárias

u_{\max} pode ser obtido com a aproximação DDS-2 (*downstream differencing scheme* de 2ª ordem) para a eq.(6.3), resultando em

$$u_{\max} = \frac{[(1 + \lambda)^2 u_P - u_E]}{(2 + \lambda)\lambda} \quad (P = 1) \quad (6.20)$$

onde

$$\lambda = 2 \frac{\Delta r_e}{\Delta r_p} \quad (P = 1) \quad (6.21)$$

Q pode ser obtido com a integração pela regra do retângulo na eq.(6.4), resultando em

$$Q = 2\pi \sum_{P=1}^N (u_P r_P \Delta r_P) \quad (6.22)$$

Com a aproximação dada pela eq.(6.12) na eq.(6.5), obtém-se

$$F = -2\pi R L \mu_{r=R} \frac{(u_E - u_P)}{\Delta r_p} \quad (P = N) \quad (6.23)$$

6.6 Algoritmo

Os passos lógicos (algoritmo) para se resolver numericamente o problema definido pelas eqs.(6.1) a (6.5) são:

- 1- Ler os dados: R, C, L, N, Δr_P (P = 1 a N), função $\mu(r)$
- 2- Calcular r_e , r_w , Δr_w , Δr_e e r_P para todos os VC
- 3- Calcular μ_w e μ_e com a função dada no item 1
- 4- Calcular os coeficientes e termos fontes com as eqs.(6.15),(6.17) e (6.19)
- 5- Resolver o sistema de equações (6.14) com o método TDMA, obtendo u_P para P = 0 a N + 1
- 6- Calcular u_{\max} , Q e F
- 7- Imprimir e visualizar os resultados